



KTH Teknikvetenskap

# ENVARIABELANALYS

TOMAS EKHOLM

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK

# Innehåll

<b>1 Att läsa innan vi börjar</b>	<b>4</b>
1.1 Varför läsa matematik? . . . . .	4
1.2 Definitioner, satser och bevis . . . . .	4
1.3 Mängder . . . . .	4
1.4 Lite historik om mängderlära . . . . .	7
<b>2 Delmängder av reella tal</b>	<b>8</b>
2.1 Intervall . . . . .	8
2.2 Egenskaper för delmängder av reella tal . . . . .	8
<b>3 Funktioner</b>	<b>11</b>
3.1 Inverser och inverterbarhet . . . . .	12
3.2 Egenskaper för reella funktioner . . . . .	14
3.3 Trigonometriska funktioner . . . . .	15
3.4 Cyklometriska funktioner . . . . .	21
3.5 Exponentialfunktionen . . . . .	22
3.6 Logaritmfunktionen . . . . .	23
3.7 Absolutbelopp . . . . .	24
3.8 Övningar . . . . .	26
<b>4 Talföljder</b>	<b>27</b>
4.1 Definitionen och konvergens . . . . .	27
4.2 Binomialsatsen . . . . .	30
4.3 Talet $e$ . . . . .	32
4.4 Standardgränsvärden . . . . .	35
4.5 Bolzano-Weierstrass sats . . . . .	35
<b>5 Gränsvärden av funktioner vid oändligheten</b>	<b>37</b>
5.1 Övningar . . . . .	39
<b>6 Lokala gränsvärden</b>	<b>40</b>
6.1 Övningar . . . . .	42
<b>7 Kontinuitet</b>	<b>43</b>
7.1 Definitionen och exempel . . . . .	43

7.2	Satser om kontinuerliga funktioner . . . . .	44
7.3	Lokala standardgränsvärden . . . . .	48
7.4	Övningar . . . . .	50
<b>8</b>	<b>Derivata</b>	<b>51</b>
8.1	Definitionen . . . . .	51
8.2	Derivatan av elementära funktioner . . . . .	51
8.3	Derivationsregler . . . . .	52
8.4	Definitioner av lokala max- och minpunkter . . . . .	54
8.5	Medelvärdessatsen . . . . .	55

# 1 Att läsa innan vi börjar

## 1.1 Varför läsa matematik?

Matematisk teori är ett ypperligt tillfälle att lära sig att analysera, resonera, argumentera, strukturera och ordna. Matematik bygger på abstraktion och den som lär sig att lätt ta till sig abstraktion besitter en enorm styrka i analytiska sammanhang.

Här följer en lista med intressanta länkar för den som läser denna text elektroniskt:

- Matematik vägen till finansbranschen

## 1.2 Definitioner, satser och bevis

Matematik struktureras i huvudsak med hjälp av definitioner, satser och bevis. En **definition** är ett införande av ett begrepp. Följande är ett exempel på en definition

**Definition 1.1.** Ett heltal  $a$  är **jämnt** om det finns ett heltal  $b$  sådant att  $a = 2b$ .

En sats är ett påstående och ett bevis av en sats är ett logiskt stärkt resonemang som visar att satsen är sann. Exempelvis

**Sats 1.2.** *Produkten av två jämna tal är ett jämnt tal.*

BEVIS: Låt  $a_1$  och  $a_2$  vara två jämna tal, d.v.s. enligt definitionen finns det tal  $b_1$  och  $b_2$  sådana att  $a_1 = 2b_1$  och  $a_2 = 2b_2$ . Produkten kan skrivas som

$$a_1 a_2 = (2b_1)(2b_2) = 4b_1 b_2 = 2c,$$

där  $c = 2b_1 b_2$ . Eftersom  $c$  är ett heltal är produkten enligt definitionen ett jämnt tal. ■

## 1.3 Mängder

Låt oss börja med att titta på ett av de mest grundläggande begreppen i matematiken, nämligen mängder. En **mängd** är en samling objekt, som till exempel tal, och dessa objekt kallar vi för **element** i mängden. Det enklaste sättet att beskriva en mängd är att räkna upp dess element. Vi använder oss då av en kommateparerad uppräkningslista av elementen innanför symbolerna  $\{\}$ . Ett sådant exempel är mängden

$$A = \{1, 3, a, 7, Pelle\}.$$

Detta betyder att  $A$  är en mängd som innehåller elementen  $1, 3, a, 7$  och *Pelle*. Vi säger att  $A$  är mängden av  $1, 3, a, 7$  och *Pelle*.

Om  $A$  är en mängd och  $x$  är ett element i mängden  $A$  så skriver vi  $x \in A$  och säger att  $x$  **tillhör**  $A$ . Exempelvis gäller att  $3 \in \{1, 3, 7\}$  och  $b \in \{a, b, 10, 3\}$ . Att ett element  $x$  inte tillhör mängden  $A$  skrivs  $x \notin A$ . Den **tomma mängden** innehåller ingenting och betecknas  $\emptyset$ .

Ett annat sätt att beskriva en mängd är att skriva

$$\{x \in D : \text{villkor på } x\}. \quad (1.1)$$

Med detta menar man mängden av alla element i  $D$  som uppfyller de givna villkoren. Vi tar oss även friheten att utelämna mängden  $D$  om den är given utifrån villkoren på  $x$ . Som exempel tar vi

$$B = \{n \in \{1, 2, 3, \dots\} : n \text{ är udda}\} = \{n : n \text{ är ett positivt udda heltal}\}$$

och

$$C = \{y \in \{1, 2, 3, 4\} : y > 2\}.$$

Mängden  $B$  innehåller alla udda positiva heltal, medan  $C$  innehåller alla element från mängden  $\{1, 2, 3, 4\}$  som är större än 2. Alltså har vi

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots\} \quad \text{och} \quad C = \{3, 4\}.$$

**Exempel 1.3.** Låt  $A = \{4, 5, 8, 4711, 12, 18\}$  och  $B = \{x \in A : x > 10\}$ . Då är  $B = \{12, 18, 4711\}$  medan  $\{x \in A : x < 3\} = \emptyset$ . Vidare har vi att  $4 \in A$  och  $4 \notin B$ . ▲

Vi bryr oss inte om i vilken ordning eller hur många gånger elementen räknas upp och därmed gäller till exempel

$$\{1, 2, 3, 4\} = \{3, 1, 4, 2\} = \{1, 3, 3, 1, 2, 4, 4, 1, 3, 2, 4\}.$$

Vi använder även notationen  $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$  för att säga att  $a_1 \in A, a_2 \in A$  och  $a_n \in A$ .

**Definition 1.4.** Låt  $A$  och  $B$  vara mängder. Om alla element i mängden  $A$  också är element i mängden  $B$  så sägs  $A$  vara en **delmängd** till  $B$ . Detta betecknas  $A \subseteq B$ .

**Exempel 1.5.** Mängden  $\{1, a\}$  är en delmängd till  $\{1, 3, a\}$ , eftersom alla element i  $\{1, a\}$  finns i mängden  $\{1, 3, a\}$ . Vi skriver  $\{1, a\} \subseteq \{1, 3, a\}$ . ▲

**Definition 1.6.** Antag att  $A$  och  $B$  är mängder. **Unionen** av  $A$  och  $B$  består av de element som ligger i någon av mängderna och betecknas  $A \cup B$ . **Snittet** av  $A$  och  $B$  består av de element som ligger i båda mängderna och betecknas  $A \cap B$ .

**Exempel 1.7.** Låt  $A = \{1, 3, 5, 6\}$  och  $B = \{5, 3, 4711\}$ . Då har vi  $A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 4711\}$  och  $A \cap B = \{3, 5\}$ . ▲

Det är dags att titta på några viktiga talmängder. Den mängd vi använder för att räkna föremål är de **naturliga talen**

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Tar vi med negativa tal får vi **heltalen**

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Beteckningen kommer från tyskans *zahl* som betyder tal. Bråken eller de **rationella talen**

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

Här kommer beteckningen från engelskans *quotient*. Slutligen betecknar vi med  $\mathbb{R}$  de **reella talen**. De reella talen kan ses som mängden av alla tal på tallinjen, exempelvis  $0, -1, 3/2, -527/3, \sqrt{2}$  och  $\pi$ . Det ligger utanför ramarna för detta häfte att göra en stringent definition av dessa tal. Vi betecknar med

$$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}, i \text{ är den imaginära enheten}\}$$

de **komplexa talen**. Notera att  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ .

**Exempel 1.8.** Vi har att  $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0\}$ . ▲

**Exempel 1.9.** Mängden  $\{n \in \mathbb{Z} : n = 2k \text{ för något } k \in \mathbb{Z}\}$  är mängden av alla jämna heltal. Denna mängd kan också skrivas som  $\{2k : k \in \mathbb{Z}\}$ , eller som  $\{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$ . ▲

**Exempel 1.10.** Låt oss påpeka att en mängd även kan ha andra mängder bland dess element. Exempelvis kan vi låta

$$A = \{2, 3, \{-1, 1\}, 4\},$$

och vi har att  $\{-1, 1\} \in A$ , det vill säga mängden  $\{-1, 1\}$  är ett element i mängden  $A$ . Observera att  $-1 \notin A$ . ▲

Låt  $A$  vara en mängd. För att ta bort element ur  $A$  används symbolen  $\setminus$ . Vi definierar  $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$ . Exempelvis är  $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  mängden av alla reella tal utom 0 och 1.

## 1.4 Lite historik om mängderlära

Under den senare delen av 1800-talet chockerade Georg Cantor den matematiska världen genom att visa att det finns flera oändligheter. Speciellt visade han att antalet delmängder till en given mängd är större än antalet element i mängden. Intresset för mängdteori växte och en av pionjärerna för den formella aspekten av ämnet var Gottlob Frege. Han försökte se mängdteorin som en grund för matematiken. Mitt under skrivandet av sin bok i ämnet fick han ett brev från en viss ung herre vid namn Bertrand Russell. Russell hade noterat att allt inte stod rätt till i Freges system. Enligt Frege kunde en mängd specificeras med en formel som utgör en restriktion på de element som ingår i mängden. Det var möjligt att bilda mängden av alla  $x$  som uppfyller villkoret  $P(x)$ , där  $P(x)$  är ett påstående som beror av  $x$ . I symboler blir det

$$\{x: P(x)\},$$

jämför med (1.1).

Russells paradox bestod av att han valde  $P(x)$  till  $x \notin x$  och bildade mängden

$$A = \{x: x \notin x\},$$

som är som en oändlig rekursion. Vi får då att  $A \in A$  medför att  $A \notin A$  och omvänt att  $A \notin A$  medför att  $A \in A$ . Detta är uppenbarligen en logisk motsägelse.

Många försökte rädda mängdteorin på olika sätt. Russell själv införde sin så kallade typteori med olika nivåer av mängder, där han kunde undvika paradoxer. Det mest framgångsrika förslaget kom 1908 från Ernst Zermelo och sedermera Adolf Fraenkel. Deras huvudidé var att man bara kunde bilda mängder på formen  $\{x \in A: P(x)\}$ , där  $A$  var en given mängd. I praktiken underförstår man ofta mängden  $A$  och skriver lite slarvigt  $\{x: P(x)\}$ . Dock bör man således vara en smula försiktig vid handhavandet av mängder.

*Ett tack till Lars Svensson för detta delavsnitt.*

## 2 Delmängder av reella tal

### 2.1 Intervall

Låt  $a$  och  $b$  vara reella tal. Följande mängder kallas **intervall**

a)  $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ ,

b)  $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ ,

c)  $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ ,

d)  $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ ,

e)  $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$ ,

f)  $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ ,

g)  $(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$ ,

h)  $(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$ ,

i)  $(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$ .

Här står tecknet  $:=$  för att vänsterledet är definierat som högerledet. Talen  $a$  och  $b$  kallas **ändpunkter** eller **randpunkter** till intervallet. Vi använder symbolen  $[$  om  $a$  tillhör intervallet och  $($  om  $a$  inte tillhör intervallet. Om båda randpunkterna tillhör intervallet kallas intervallet **slutet**. Om inga av randpunkterna tillhör intervallet kallas intervallet **öppet**.

**Exempel 2.1.** Intervallen  $(1, 5)$ ,  $(-\infty, 4)$ ,  $(-3, \infty)$  och  $(-\infty, \infty)$  är öppna intervall eftersom alla randpunkter till intervallen ej tillhör intervallen. Intervallen  $[1, 4]$ ,  $[-2, \infty)$  och  $(-\infty, \infty)$  är slutna för alla randpunkter till intervallen även tillhör intervallen. Intervallet  $[2, 3)$  är varken öppet eller slutet. Läsaren har säkert noterat att intervallet  $(-\infty, \infty)$  både är öppet och slutet, eftersom det inte finns några randpunkter. ▲

### 2.2 Egenskaper för delmängder av reella tal

En **omgivning** till en punkt  $a \in \mathbb{R}$  är ett öppet intervall som innehåller  $a$ . Exempelvis är det öppna intervallet  $(0, 1)$  en omgivning till talet  $3/4$  och intervallen  $(-1/n, 1/n)$  för  $n > 0$  är alla omgivningar till 0. En **punkterad omgivning** till en punkt  $a$  är en omgivning till  $a$  där vi har tagit bort talet  $a$ .

**Exempel 2.2.** Mängden  $\{x \in (-1, 2) : x \neq 0\} = (-1, 0) \cup (0, 2)$  är en punkterad omgivning till 0. ▲



**Definition 2.3.** Ett tal  $m$  sägs vara en **övre begränsning** till en mängd  $A$  om  $x \leq m$  för varje  $x \in A$ . En mängd som har en övre begränsning kallas **uppåt begränsad**, annars **uppåt obegränsad**.

**Undre begränsning** till en mängd, en **nedåt begränsad** mängd och en **nedåt obegränsad** mängd definieras på ett analogt sätt. En mängd som är uppåt begränsad och nedåt begränsad sägs vara **begränsad**, annars **obegränsad**. Ett exempel på en obegränsad mängd är intervallet  $[2, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x\}$  som är uppåt obegränsad och nedåt begränsad.

Ett grundläggande axiom för de reella talen är

**Axiom 2.4** (Supremumaxiomet). Varje uppåt begränsad delmängd av de reella talen har en minsta övre begränsning.

**Definition 2.5.** Ett tal  $m$  sägs vara **supremum** till en mängd  $A$  och betecknas  $\sup A$  om  $m$  är den minsta övre begränsningen till  $A$ .

På samma vis definieras **infimum** av en mängd  $A$  som den största undre begränsningen till  $A$  och betecknas  $\inf A$ .

Supremumaxiomet säger med andra ord att om  $A$  är en mängd av reella tal som är uppåt begränsad så finns talet  $\sup A$ .

**Exempel 2.6.** Låt

$$A = \left\{ \frac{4n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Visa att  $\sup A = 4$ . För att se att 4 är en övre begränsning till  $A$  räcker det med att notera att för en godtycklig punkt  $i$  i  $A$  gäller att

$$a_n := \frac{4n}{n+1} \leq \frac{4n}{n} = 4.$$

Nu måste vi visa att 4 är den minsta övre begränsningen, dvs att det inte finns någon mindre övre begränsning. Låt oss anta att  $K < 4$  är en övre begränsning och försöka finna en motsägelse. Polynomdivision ger

$$\frac{4n}{n+1} = 4 - \frac{4}{n+1}.$$

För att få en motsägelse vill vi finna ett  $n$  sådant att  $a_n > k$ , vilket skulle motsäga att  $K$  är en övre begränsning. Alltså, kan vi finna ett  $n$  sådant att

$$4 - \frac{4}{n+1} > K?$$

Vi noterar att

$$4 - \frac{4}{n+1} > K \iff n > \frac{4}{4-K} - 1.$$

Det är klart att vi kan välja  $n > 4/(4-K) - 1$  och alltså få  $a_n > K$ . Vi har fått en motsägelse och alltså är 4 den minsta övre begränsningen.  $\blacktriangle$

**Exempel 2.7.** Ett sätt att illustrera supremumasxiomet är att visa att de rationella talen  $\mathbb{Q}$  inte uppfyller denna egenskap, d.v.s. varje uppåt begränsad delmängd av  $\mathbb{Q}$  har inte en minsta övre begränsning i  $\mathbb{Q}$ . Studera mängden  $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$ . Om vi godkänner reella tal så är  $\sup A = \sqrt{2}$ . Detta tal är dock inte ett rationellt tal (se här om ni inte har sett det tidigare). Antag att vi har funnit ett rationellt tal  $q$  som är supremum till  $A$ , d.v.s.  $q$  är en övre begränsning till  $A$  och  $q$  är den minsta övre begränsningen till  $A$ .

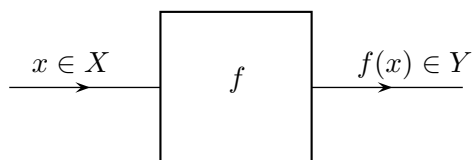
Eftersom  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$  så följer att  $q$  är antingen större eller mindre än  $\sqrt{2}$ . Om  $q < \sqrt{2}$  så följer att det finns rationella tal i intervallet  $(q, \sqrt{2})$  som strider mot att  $q$  är en övre begränsning. Om  $q > \sqrt{2}$  så finns det rationella tal i intervallet  $(\sqrt{2}, q)$  som är mindre övre begränsningar än  $q$ . Alltså är  $q$  inte den minsta övre begränsningen till  $A$ . ▲

### 3 Funktioner

Innan vi gör en allmän definition av vad en funktion är kan det vara på sin plats att titta på något välbekant, nämligen en formel som  $f(x) = x^2 + 1$ , för  $x > 0$ . Formeln säger att om vi tar ett tal  $x > 0$  så får vi ett nytt tal  $f(x) \in \mathbb{R}$  genom att göra beräkningen  $x^2 + 1$ ; till exempel får vi  $f(2) = 2^2 + 1 = 5$ . Vi säger att  $f$  är en funktion från de positiva reella talen till de reella talen, eftersom det vi stoppar in,  $x$ , är ett positivt reellt tal och det vi får ut,  $f(x)$ , är ett reellt tal. Vi betecknar detta med  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Nu till den allmänna definitionen.

**Definition 3.1.** Låt  $X$  och  $Y$  vara mängder. En **funktion**  $f: X \rightarrow Y$  är ett sätt att till varje element  $a \in X$  tilldela ett välbestämt element  $b \in Y$ . Vi skriver  $f(a) = b$ . Vi säger att  $a$  **avbildas** på  $b$  och att  $b$  är **bilden** av  $a$ . Mängderna  $X$  och  $Y$  kallas **definitionsområde** respektive **målmängd**.

**Kommentar 3.2.** Beteckningen  $f: X \rightarrow Y$  utläses:  $f$  är en funktion från  $X$  till  $Y$ . Ett vanligt alternativ till ordet funktion är **avbildning**. Vi kan se funktionen som ett eget objekt som utför en handling som bilden nedan visar.



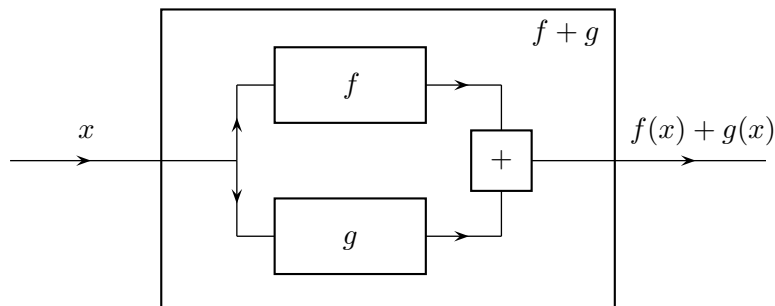
**Exempel 3.3.** Låt  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , sådan att  $f(x) = 1 + 2 \cdot 3^x$ . ▲

Om inget anges om definitionsområdet antas funktionen vara definierad på så stor delmängd av de reella talen som möjligt och målmängd antas alltid vara  $\mathbb{R}$ . Detta är en konvention mellan er som läsare och oss som skribenter. Vi kommer tydligt skilja på  $f$  och  $f(x)$ , det första är funktionen  $f$ , medan det andra är funktionens värde i punkten  $x$ . Som ett exempel på denna notation så definierar vi summan och produkten av två reellvärda funktioner  $f$  och  $g$ , sådana att  $D_f = D_g \subset \mathbb{R}$  enligt

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) := f(x)g(x)$$

Bildmässigt kan vi se additionen som



Om vi inte vill namnge den funktion som vi arbetar med eller introducerar används notationen  $x \mapsto 1 + x^2$  istället för  $f(x) = 1 + x^2$ .<sup>1</sup>

**Värdemängden** till en funktion  $f: X \rightarrow Y$  definieras som

$$V_f := \{y \in Y : y = f(x) \text{ för något } x \in X\}.$$

**Exempel 3.4.** Betrakta mängderna  $A = \{1, 2, 3\}$  och  $B = \{1, 2, \dots, 100\}$ . Ett exempel på funktion  $f: A \rightarrow B$  ges av  $f(n) = 2n$  för  $n \in A$ . Vi har alltså att  $f(1) = 2$ ,  $f(2) = 4$  och  $f(3) = 6$ . Per definition måste vi ha  $f(x) \in B$  för alla  $x \in A$ , och detta gäller ju här eftersom

$$f(1) = 2 \in B, \quad f(2) = 4 \in B, \quad \text{och} \quad f(3) = 6 \in B.$$

I detta exempel definieras funktionen  $f$  av formeln  $f(n) = 2n$ , men det är inte alls nödvändigt att det finns en formel som beskriver hur funktionen verkar. Om vi som här har en funktion från den *ändliga* mängden  $A = \{1, 2, 3\}$  kan man till exempel definiera funktionen med hjälp av en tabell:

$n$	$f(n)$
1	2
2	4
3	6

▲

**Exempel 3.5.** Låt  $h(x) = 3/2 \cdot x^2 - x^3$ . Detta definierar en funktion  $h$  från  $\mathbb{R}$  till  $\mathbb{R}$ . Vi har exempelvis att

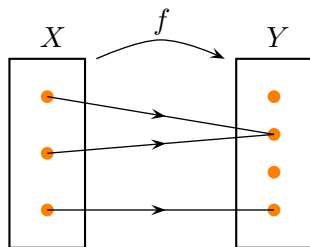
$$h(1) = \frac{1}{2}, \quad \text{och} \quad h(-2) = 14.$$

▲

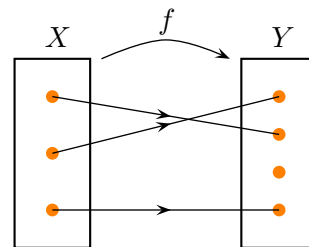
### 3.1 Inverser och inverterbarhet

**Definition 3.6.** En funktion  $f: X \rightarrow Y$  säges vara **injektiv** om det för varje  $x, y \in X$  gäller att om  $f(x) = f(y)$  så är  $x = y$ .

Uttryckt i ord säger den här definitionen att funktionen aldrig skickar två olika element i  $X$  på samma element i  $Y$ .



Exempel då  $f$  ej är injektiv

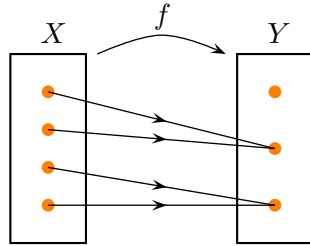


Exempel då  $f$  är injektiv

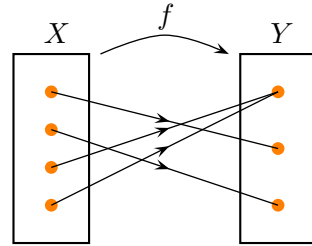
<sup>1</sup>För er som uppskattar programmering är det väldigt likt det sätt som anonyma klasser eller funktioner definieras i olika programspråk.

**Definition 3.7.** En funktion  $f: X \rightarrow Y$  säges vara **surjektiv** om det för varje  $y \in Y$  existerar ett  $x \in X$  sådant att  $f(x) = y$ .

Varje element i  $Y$  är alltså bilden av något  $x$  under funktionen  $f$  om funktionen är surjektiv. En funktion är surjektiv om och endast om dess målmängd sammanfaller med dess värdemängd.



Exempel då  $f$  ej är surjektiv



Exempel då  $f$  är surjektiv

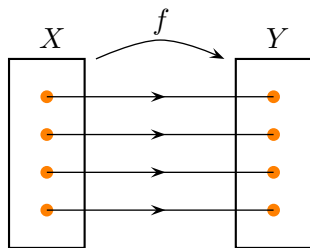
En funktion kan vara surjektiv utan att vara injektiv, och tvärtom.

**Exempel 3.8.** Låt  $\mathbb{R}_+$  beteckna de icke-negativa reella talen. Betrakta funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  som definieras av  $f(x) = x^2$ . Då är  $f$  surjektiv, men inte injektiv — till exempel har vi  $f(-2) = f(2) = 4$ .

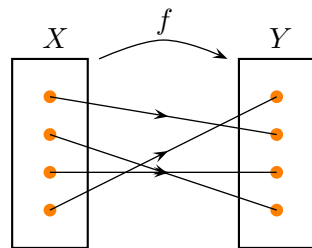
Ett exempel på en funktion som är injektiv men inte surjektiv ges av funktionen i 3.4. Det finns till exempel inget  $n \in \{1, 2, 3\}$  sådant att  $f(n) = 3$ .



**Definition 3.9.** En funktion  $f: X \rightarrow Y$  som både är injektiv och surjektiv säges vara **bijektiv**, eller en **bijektion**.



Exempel då  $f$  är bijektiv



Exempel då  $f$  är bijektiv

**Definition 3.10.** Låt  $f: X \rightarrow Y$  vara en bijektiv funktion. **Inversen** till  $f$  är avbildningen  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  som ges av  $f^{-1}(y) = x$ , där  $x$  är det entydiga element i  $X$  som uppfyller  $f(x) = y$ . En funktion som har en invers kallas **inverterbar**.

Vi ser här att både injektivitet och surjektivitet är viktigt. Om  $f$  inte är injektiv kan det finnas många  $x \in X$  med  $f(x) = y$ . Om  $f$  inte är surjektiv kan det vara så att det inte finns något  $x$  med  $f(x) = y$ . För inversen gäller att  $f(f^{-1}(y)) = y$  för alla  $y \in Y$  och  $f^{-1}(f(x)) = x$  för alla  $x \in X$ .

**Exempel 3.11.** Betrakta funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  som ges av  $f(x) = x^3$ . Denna funktion är injektiv och surjektiv, och därmed en bijektion. Inversen till  $f$  ges av funktionen  $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  som definieras av  $f^{-1}(y) = y^{1/3}$ . ▲

**Exempel 3.12.** Både definitionsmängden och bildmängden måste beaktas när vi undersöker om en funktion är en bijektion.

Funktionen  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  med  $f(x) = x^2$  är en bijektion, med invers  $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ . Som vi såg tidigare är detta påstående är falskt om vi betraktar  $f$  definierad på hela  $\mathbb{R}$ . ▲

Antag att  $f: X \rightarrow Y$  är en injektiv funktion. Då vet vi att vi kan för varje  $y \in V_f$  finna ett  $x \in X$  sådant att  $f(x) = y$ . Men, om  $Y$  innehåller element som inte finns i  $V_f$  är funktionen  $f$  inte surjektiv och därmed inte bijektiv. I detta fall är förutsättningarna för en invers inte uppfyllda. Detta kan i många fall, men inte alla, ses som en teknikalitet. Ty, om vi bara skulle ändra på definitionen av  $f$  så att målmängden  $Y$  exakt var de element vi kunde få (nämligen  $V_f$ ) så skulle vi ha en bijektiv funktion och alltså en invers. Vi kan säga att varje funktion som är injektiv har en invers definierad på funktionens värdemängd  $V_f$ . Dvs, om  $g: X \rightarrow V_f$  är injektiv så är den inverterbar.

**Exempel 3.13.** Låt  $f(x) = x + 2$  vara en funktion definierad för  $x \in [0, 3]$ . Det är en enkel verifikation att se att  $f$  är injektiv. Värdemängden till  $f$  är  $V_f = [2, 5]$ . Alltså är  $f$  inverterbar om  $f$  ses som funktionen  $f: [0, 3] \rightarrow [2, 5]$ . I detta fall är  $f^{-1}: [2, 5] \rightarrow [0, 3]$  och  $f^{-1}(y) = y - 2$ . ▲

## 3.2 Egenskaper för reella funktioner

**Definition 3.14.** Vi säger att en funktion  $f$  är **växande på ett intervall**  $I \subset D_f$  om det för varje  $x, y \in I$  för vilka  $x < y$  ger att  $f(x) \leq f(y)$ . Om en funktion är växande på hela sin definitionsmängd kallas  $f$  **växande**.

Observera att den konstanta funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  och  $f(x) = 42$  är växande. Den är däremot inte strängt växande som definieras enligt:

**Definition 3.15.** Vi säger att en funktion  $f$  är **strängt växande på ett intervall**  $I \subset D_f$  om det för varje  $x, y \in I$  för vilka  $x < y$  ger att  $f(x) < f(y)$ . Om en funktion är strängt växande på hela sin definitionsmängd kallas  $f$  **strängt växande**.

**Definition 3.16.** En funktion  $f$  är **uppåt obegränsad** om dess värdemängd  $V_f$  är uppåt obegränsad och **uppåt begränsad** om dess värdemängd  $V_f$  är uppåt begränsad.

Egenskaper som **avtagande**, **strängt avtagande**, **nedåt obegränsad** och **nedåt begränsad** funktioner definieras på ett analogt sätt.

**Exempel 3.17.** Låt  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  vara en given funktion positiv funktion. Visa att om  $g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  med  $g(x) = xf(x)$  uppfyller att  $V_g = [1, 2]$  så är  $f$  obegränsad.

Vi visar detta med hjälp av en motsägelse. Antag att  $f$  är uppåt begränsad, d.v.s.  $V_f$  är uppåt begränsad, vilket i sin tur ger att det existerar ett tal  $M$  sådant  $f(x) \leq M$  för varje  $x \in (0, 1)$  och  $M > 1$ . Vi observerar att  $1/2M \in (0, 1)$  och att

$$g(1/2M) = \frac{1}{2M} \cdot f(1/2M) \leq \frac{1}{2M} \cdot M = \frac{1}{2} < 1.$$

Detta strider mot att  $V_g = [1, 2]$ , alltså är  $f$  obegränsad. ▲

**Definition 3.18.** En funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  säges vara **jämn** om  $f(-x) = f(x)$  för alla  $x \in \mathbb{R}$ .

**Definition 3.19.** En funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  säges vara **udda** om  $f(-x) = -f(x)$  för alla  $x \in \mathbb{R}$ .

Observera att en funktion som inte är jämn inte behöver vara udda. Exempelvis är  $x \mapsto x^3$  udda,  $x \mapsto |x|$  jämn och  $x \mapsto 1 + x$  varken jämn eller udda.

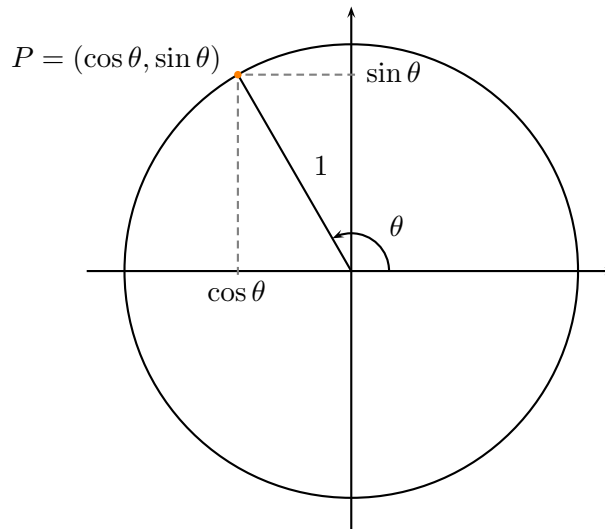
### 3.3 Trigonometriska funktioner

Vi ska i detta delkapitel definiera sinus och cosinus och vilka grundläggande egenskaper som de besitter.

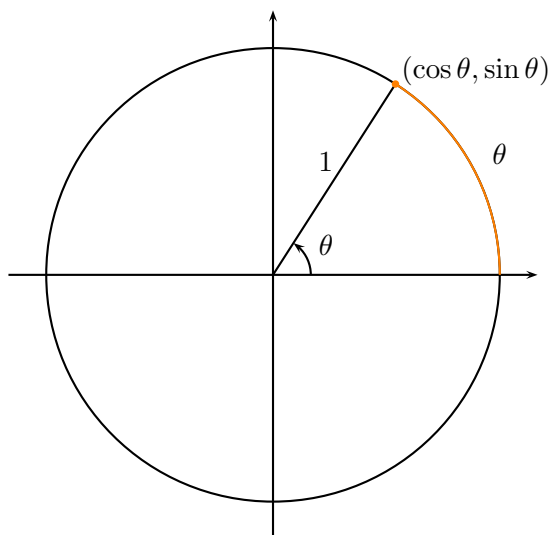
Låt oss betrakta en punkt  $P$  på enhetscirkeln vars linje in mot origo bildar vinkeln  $\theta$  till  $x$ -axeln om vi använder orienteringen moturs från  $x$ -axeln. Vi kallar koordinaterna i  $P$  för  $(\cos \theta, \sin \theta)$ . Direkt ser vi att

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

vilket kallas för den trigonometriska ettan.



Det är viktigt att vi inför en enhet eller skala för vinkeln  $\theta$ . Låt oss säga att vinkeln  $\theta = 1$  om längden på den cirkelbåge som bildas har längden 1. Vi ska inte problematisera Denna enhet kallas **radianer** och är på många sätt den naturliga skalan för vinklar. Vi kommer i detta häfte alltid förutsätta att vinklar mäts i radianer.



Vi har bildat funktionerna  $\theta \mapsto \cos \theta$  och  $\theta \mapsto \sin \theta$  för  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Vi utvidgar dessa funktioner periodiskt till hela  $\mathbb{R}$ , d.v.s.

$$\cos \theta = \cos(\theta + n2\pi),$$

$$\sin \theta = \sin(\theta + n2\pi)$$

för alla  $n \in \mathbb{Z}$ . Funktionen  $x \mapsto \sin x$  kallas **sinus** och  $x \mapsto \cos x$  kallas **cosinus**.

Av symmetriskäl får vi följande relationer direkt från definitionen ovan

$$\sin \theta = \cos(\theta - \pi/2), \tag{3.1}$$

$$\cos \theta = \sin(\theta + \pi/2), \tag{3.2}$$

$$\cos \theta = \cos(-\theta), \tag{3.3}$$

$$\sin \theta = \sin(-\theta), \tag{3.4}$$

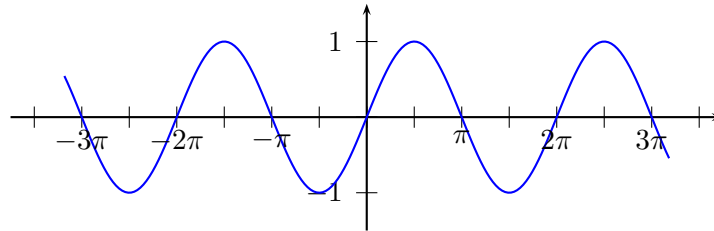
$$\cos \theta = -\cos(\pi - \theta), \tag{3.5}$$

$$\sin \theta = \sin(\pi - \theta). \tag{3.6}$$

Relationerna (3.3) och (3.4) säger att cosinus och sinus är en jämn respektive udda funktion.

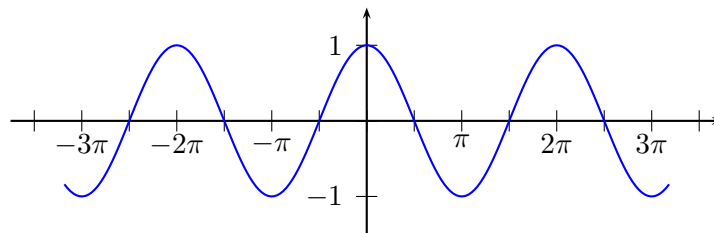
Grafen till funktionerna sinus och cosinus är





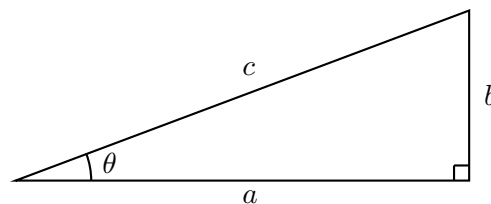
Figur 3.1: Grafen till funktionen  $x \mapsto \sin x$ .

respektive

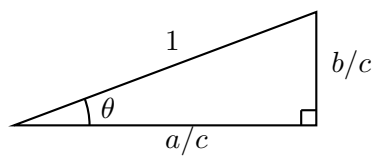


Figur 3.2: Grafen till funktionen  $x \mapsto \cos x$ .

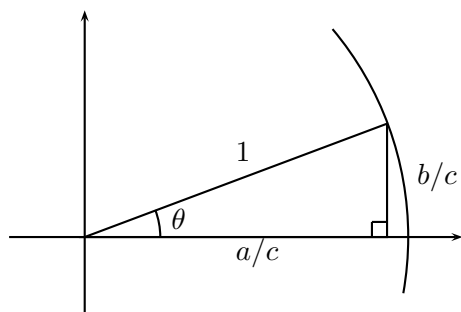
**Exempel 3.20.** Observera att vi kan med hjälp av sinus och cosinus relatera sidor och vinklar med varandra i rätvinkliga trianglar. Låt oss börja med den rätvinkliga triangeln med sidorna  $a$ ,  $b$  och  $c$



Om vi skalar denna triangel så att hypotenusan får längden 1 så får vi den likformiga triangeln



Om vi nu skriver in denna triangeln i enhetscirkeln så får vi de önskade relationerna



Vi ser att

$$\cos \theta = \frac{a}{c} \quad \text{och} \quad \sin \theta = \frac{b}{c}. \quad (3.7)$$

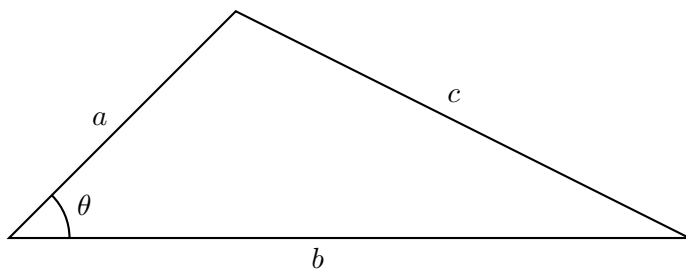


Vi behöver en generalisering av Pythagoras sats som heter Cosinussatsen, nämligen

**Sats 3.21** (Cosinussatsen). *Låt  $a$ ,  $b$  och  $c$  vara sidlängderna i en triangel. Då gäller att*

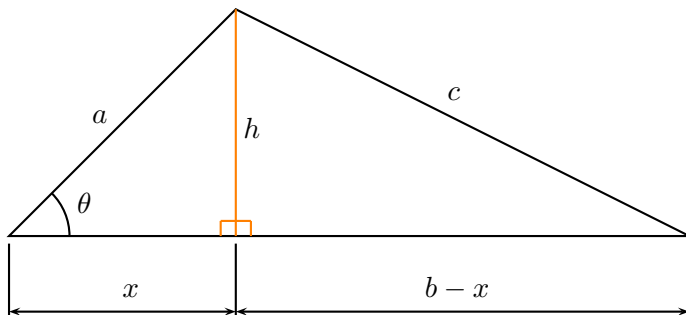
$$a^2 + b^2 = c^2 - 2ab \cos \theta, \quad (3.8)$$

där  $\theta$  är den vinkel i triangel där sidlängderna  $a$  och  $b$  möts.



BEVIS: I fallet  $\theta = \pi/2$  så återfår vi Pythagoras sats. Vi bevisar satsen för spetsiga och trubbiga vinklar var för sig.

Vi börjar med fallet då vinkeln  $\theta < \pi/2$ , alltså då  $\theta$  är spetsig. Vi inför höjden  $h$  och låter  $x$  vara en del av sidan  $b$  som i figuren nedan



Vi använder nu Pythagoras sats i de två rätvinkliga trianglarna och får

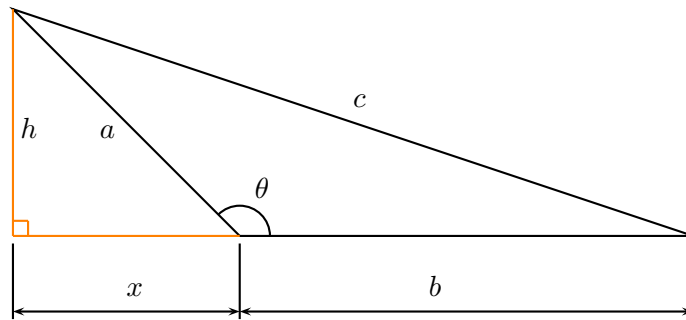
$$\begin{cases} a^2 = h^2 + x^2 \\ c^2 = h^2 + (b-x)^2 \end{cases}$$

Vi löser ut  $h$  i den första ekvationen och sätter in resultatet i den andra ekvationen och får

$$c^2 = a^2 - x^2 + (b-x)^2 = a^2 + b^2 - 2bx.$$

Det återstår att konstatera att  $x = a \cos \theta$  vilken följer från formel (3.7).

Det andra fallets lösning är näst intill lika. Med hjälp av en bild lämnar vi det som en övning åt läsaren.



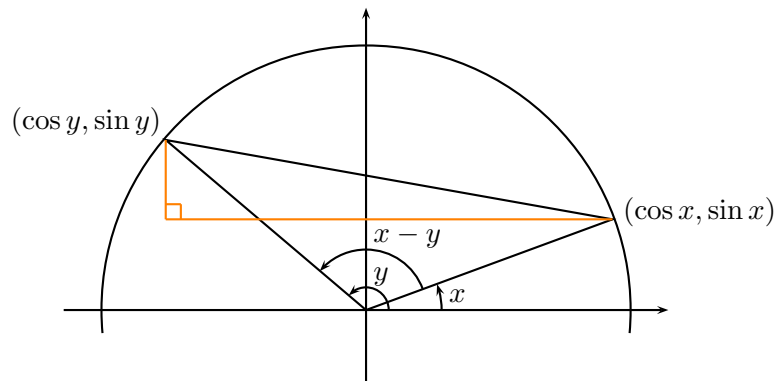
■

**Sats 3.22.** *Följande identitet gäller*

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \quad (3.9)$$

BEVIS: Cosinussatsen (se 3.21) ger att

$$(\cos y - \cos x)^2 + (\sin y - \sin x)^2 = 1 + 1 - 2 \cos(x-y).$$



Om vi förenklar med hjälp av den trigonometriska ettan får vi

$$\begin{aligned} 2 - 2 \cos y \cos x - 2 \sin y \sin x &= 2 - 2 \cos(x - y) \\ \cos y \cos x + \sin y \sin x &= \cos(x - y) \end{aligned}$$

vilket skulle bevisas. ■

**Följsats 3.23.** *Följande identiteter gäller*

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad (3.10)$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad (3.11)$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y \quad (3.12)$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \quad (3.13)$$

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x \quad (3.14)$$

BEVIS: Vi bevisar här (3.10). Låt  $y = -z$  i (3.9). Vi får då

$$\begin{aligned} \cos(x + z) &= \cos x \cos(-z) + \sin x \sin(-z) \\ &= \cos x \cos z - \sin x \sin z \end{aligned}$$

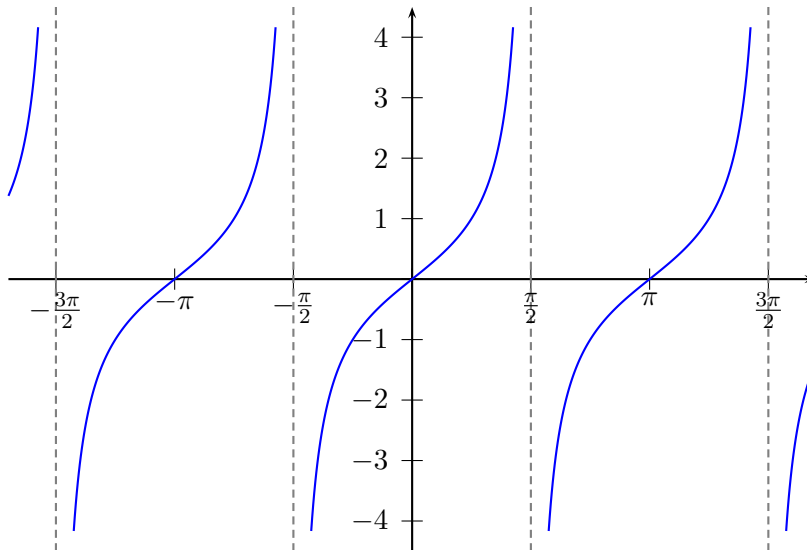
Bevisen för 3.11 – 3.14 följer på liknande vis och med hjälp av (3.1) – (3.6) och lämnas som en övning åt läsaren. ■

**Definition 3.24.** Funktionen  $\tan: \{x \in \mathbb{R}: x \neq n\pi/2, n \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ , sådan att

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad (3.15)$$

kallas **tangens**.

Grafen för tangens är



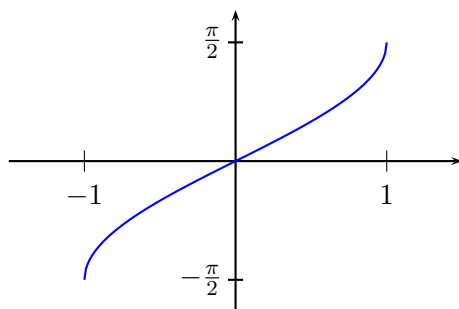
Figur 3.3: Grafen till funktionen  $x \mapsto \tan x$ .

### 3.4 Cyklometrisk funktioner

Vi börjar med att observera att funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  sådan att  $f(x) = \sin x$  är inte injektiv och därmed inte inveterbar, vi har t.ex. att  $f(0) = f(\pi)$ . Om vi däremot begränsar definitionsmängden  $D_f$  till det slutna intervallet  $[-\pi/2, \pi/2]$  blir  $f$  bijektiv och har invers. Vi gör följande definition:

**Definition 3.25.** Låt  $f: [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$  sådan att  $f(x) = \sin x$ . Inversen till  $f$  kallas **arcussinus** och betecknas  $f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$  och  $f^{-1}(y) = \arcsin y$ .

Observera att den generella formeln  $\sin(\arcsin y) = y$  gäller för alla  $y \in [-1, 1]$  och  $\arcsin(\sin x) = x$  gäller för alla  $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ . Grafen för arcussinus är



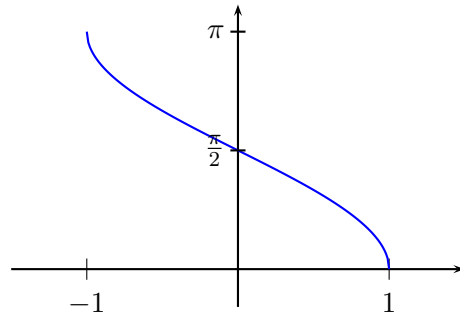
Figur 3.4: Grafen till funktionen  $x \mapsto \arcsin x$ .

**Kommentar 3.26.** Vi skulle ha kunnat välja något annat intervall än  $[-\pi/2, \pi/2]$  för att få  $x \mapsto \sin x$  bijektiv. Detta intervall är dock standardiserat runt om i världen, så om inget annat anges kan man med säkerhet anta att det är detta intervall man menar när man pratar om inversen till  $x \mapsto \sin x$ .

På liknande sätt konstaterar vi att funktionerna  $x \mapsto \cos x$  och  $x \mapsto \tan x$  kan göras inverterbara genom att inskränka definitionsmängden.

**Definition 3.27.** Låt  $f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  sådan att  $f(x) = \cos x$ . Inversen till  $f$  kallas **arcuscosinus** och betecknas  $f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$  och  $f^{-1}(y) = \arccos y$ .

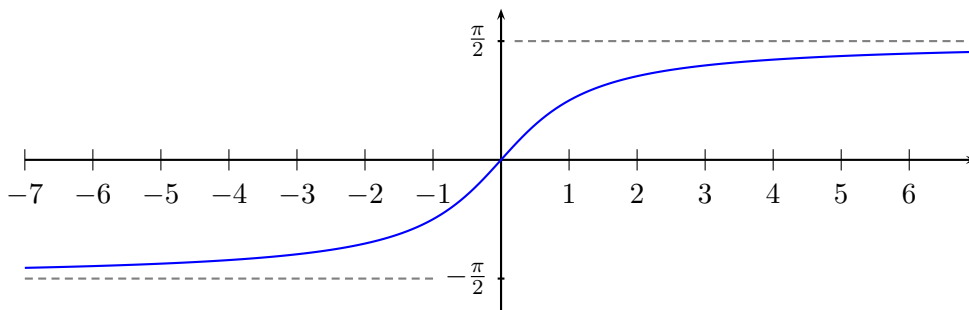
Grafen för arcuscosinus är



Figur 3.5: Grafen till funktionen  $x \mapsto \arccos x$ .

**Definition 3.28.** Låt  $f: [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$  sådan att  $f(x) = \tan x$ . Inversen till  $f$  kallas **arcustangens** och betecknas  $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$  och  $f^{-1}(y) = \arctan y$ .

Grafen för arctangens är



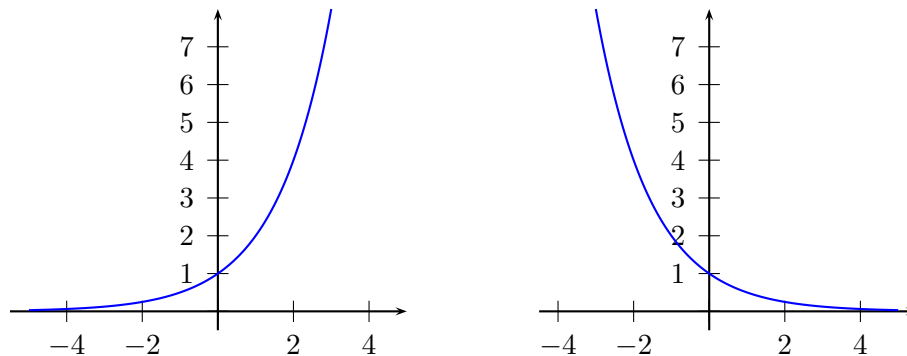
Figur 3.6: Grafen till funktionen  $x \mapsto \arctan x$ .

### 3.5 Exponentialfunktionen

Vi kommer inte i detta häfte definiera exponentialfunktionen  $x \mapsto a^x$ , där  $a > 1$ . Utan fritt anta att läsaren är bekvämd med funktionen som en strängt växande funktion med värdemängd  $(0, \infty)$  som uppfyller räknelagarna

- a)  $a^0 = 1$
- b)  $a^1 = a$
- c)  $a^{x+y} = a^x a^y$
- d)  $a^{-x} = 1/a^x$
- e)  $(a^x)^y = a^{xy}$

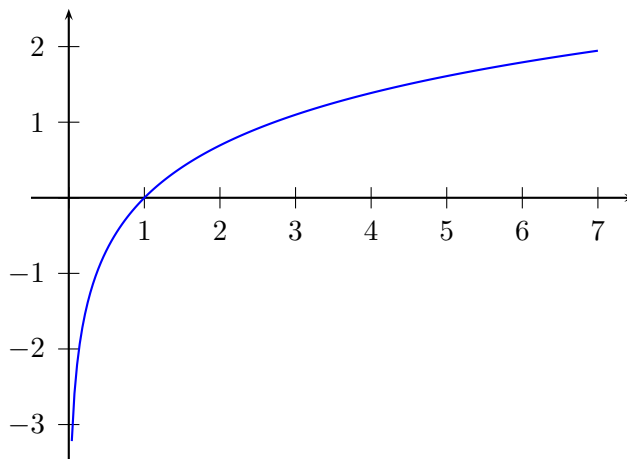
Att introducera exponentialfunktionen på ett korrekt vis är långt ifrån en enkel sak och ligger utanför ramarna för detta häfte. Grafen för exponentialfunktionen är



Figur 3.7: Grafen till funktionen  $x \mapsto 2^x$  till vänster och  $x \mapsto (1/2)^x$  till höger.

### 3.6 Logaritmfunktionen

Låt  $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  sådan att  $f(x) = a^x$ , för något  $a > 1$ . Då gäller att  $f$  är inverterbar. Vi definierar **logaritmfunktionen** som inversen till  $f$  och betecknar  $f^{-1}(y) = \log_a y$ . Alltså har vi att  $D_{f^{-1}} = (0, \infty)$  och  $V_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ . Grafen för logaritmfunktionen är



Figur 3.8: Grafen till funktionen  $x \mapsto \log_2 x$ .

Inversen uppfyller räknelagarna

**Sats 3.29.** Låt  $a > 1$ , då gäller att logaritmfunktionen uppfyller

a)  $\log_a 1 = 0$

$$b) \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad x > 0, y > 0$$

$$c) \log_a x^y = y \log_a x, \quad x > 0$$

BEVIS: Generellt gäller att vi vill överföra exponentialfunktionens räknelagar till sin inversfunktion. Vi kommer hela tiden att använda oss av att  $x = y$  om och endast om  $a^x = a^y$ . Detta är en direkt följd av att  $x \mapsto a^x$  är injektiv.

- a) Vi vill visa att  $\log_a 1 = 0$  eller ekvivalent att  $a^{\log_a 1} = a^0$ . Vänsterledet uppfyller att  $a^{\log_a 1} = 1$  och högerledet att  $a^0 = 1$ . Alltså stämmer alla påståenden.
- b) Vi vill visa att  $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$  eller ekvivalent att  $a^{\log_a(xy)} = a^{\log_a x + \log_a y}$ . För vänsterledet gäller att  $a^{\log_a(xy)} = xy$  och för högerledet via exponentialfunktionens räknelagar att  $a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = xy$ .
- c) Vi vill visa att  $\log_a x^y = y \log_a x$  eller ekvivalent att  $a^{\log_a x^y} = a^{y \log_a x}$ . Vänsterledet är  $x^y$  och högerledet är  $a^{y \log_a x} = (a^{\log_a x})^y = x^y$  och vi är klara.

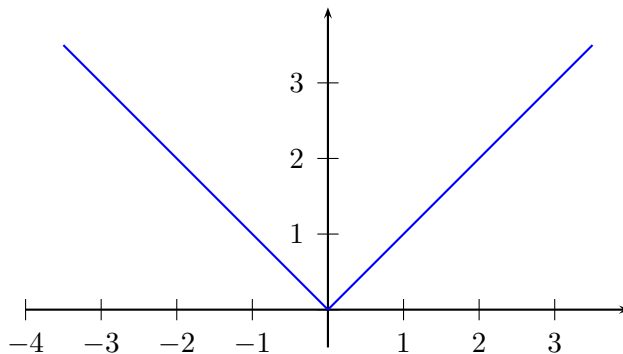
■

### 3.7 Absolutbelopp

Givet ett tal  $x \in \mathbb{R}$  (eller  $\in \mathbb{C}$ ) så definieras  $|x|$  som avståndet från  $x$  till origo. Funktionen  $x \mapsto |x|$  kallas **absolutbeloppet**/**beloppet** av  $x$ . För reella tal implicerar detta att

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

och grafen har följande utseende



Figur 3.9: Grafen till funktionen  $x \mapsto |x|$ .

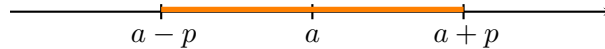


**Exempel 3.30.** Vi har enligt definitionen att  $|-5| = -(-5) = 5$ ,  $|5| = 5$ ,  $|-\pi| = -(-\pi) = \pi$  och  $|0| = 0$ . Vi har här varit övertydliga med användningen av minustecken. ▲

I detta häfte kommer vi i ett flertal tillfällen att använda absolutbeloppet på formen  $|x - a| = b$  som betyder att avståndet från  $x - a$  till origo, eller avståndet från  $x$  till  $a$ , är  $b$ .

**Exempel 3.31.** Skissa mängden  $A = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| \leq p\}$ , där  $p > 0$ .

LÖSNING:



Observera att definitionen direkt ger att

$$x \leq |x|, \quad (3.17)$$

för varje  $x \in \mathbb{R}$ . Följande sats visas exempelvis med hjälp av fallindelning.

**Sats 3.32.** Låt  $x, y \in \mathbb{R}$ , då gäller

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \quad (3.18)$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|. \quad (3.19)$$

BEVIS: Vi lämnar beviset av (3.18) till läsaren som en övning.

Beviset av (3.19) gör vi med hjälp av fallindelning.

Antag att  $x \geq 0$  och  $y \geq 0$ . Olikheten är i detta fall en likhet, ty

$$|x + y| = x + y = |x| + |y|.$$

Antag nu att en av  $x$  och  $y$  är negativ. Symmetriskäl gör att det räcker med att vi betraktar olikheten för  $x \geq 0$  och  $y < 0$ . Även här vill vi dela upp i två fall. Det ena är då  $x + y \geq 0$  och det andra då  $x + y < 0$ . Vi börjar med fallet då  $x + y \geq 0$ . Vi får (kom ihåg att  $y < 0$ )

$$|x + y| = x + y \leq x \leq x - y = |x| + |y|.$$

Nu till delfallet att  $x + y < 0$ . Vi får

$$|x + y| = -(x + y) = -x - y \leq -y \leq x + (-y) = |x| + |y|.$$

Slutligen det sista fallet då  $x < 0$  och  $y < 0$ . Vi får

$$|x + y| = -(x + y) = -x + (-y) = |x| + |y|$$

och olikheten är visad. ■

### 3.8 Övningar

**Övning 3.1.** Visa den andra delen i beviset av cosinussatsen.

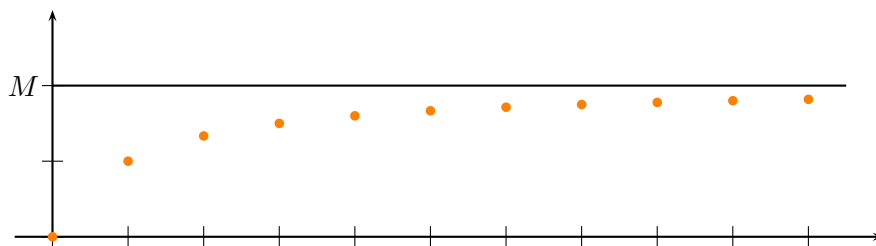
**Övning 3.2.** Visa (3.11) – (3.14).

**Övning 3.3.** Visa likhet (3.18).

## 4 Talföljder

### 4.1 Definitionen och konvergens

**Definition 4.1.** En följd av tal  $a_1, a_2, a_3, \dots$  av reella tal kallas för en **talföljd** och betecknas  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ . Vi säger att talföljden  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  är **växande** om  $a_{n+1} \geq a_n$  för varje  $n \geq 1$  och att den är **uppåt begränsad** om det finns ett tal  $M$  sådant att  $a_n \leq M$  för varje  $n \geq 1$ .



Vi definierar på ett analogt sätt vad som menas med att en talföljd är **avtagande** och **nedåt begränsad**. En talföljd sägs vara **begränsad** om den är både uppåt och nedåt begränsad.

**Exempel 4.2.** Om  $a_n = \frac{2n}{n+1}$  så blir  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  talföljden  $2/2, 4/3, 6/4, 8/5, \dots$ . Talföljden är uppåt begränsad av talet 2 men även av talet 14. Den är dessutom växande eftersom

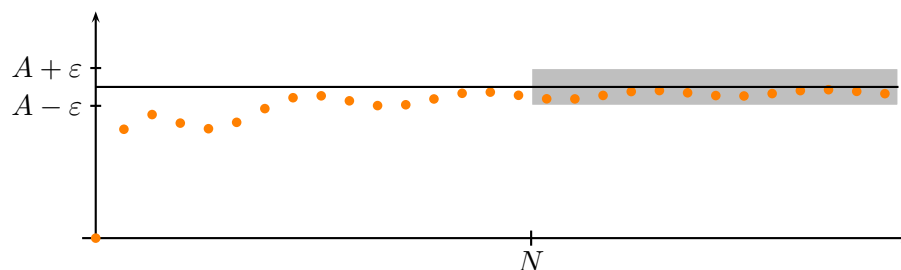
$$a_{n+1} - a_n = \frac{2}{(n+1)(n+2)} > 0.$$

▲

**Definition 4.3.** En talföljd  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  sägs **konvergera mot gränsvärdet**  $A$  om det för alla  $\varepsilon > 0$  finns ett  $N$  sådant att  $|a_n - A| < \varepsilon$  för varje  $n \geq N$ . Vi inför beteckningen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A.$$

En talföljd med denna egenskap kallas **konvergent**. Om inget sådant  $A$  existerar kallas talföljden **divergent**.



**Exempel 4.4.** Visa att talföljden  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  där talen ges av  $a_n = 2 + 3^{-n}$  konvergerar mot 2 då  $n \rightarrow \infty$ .

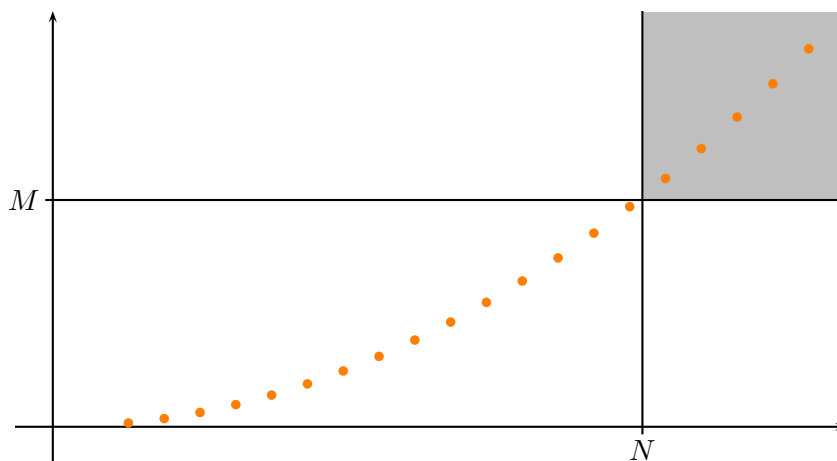
Enligt definitionen ska vi först låta ett tal  $\varepsilon > 0$  vara givet. Vi vill nu finna ett  $N$  (som kommer att bero av  $\varepsilon$ ) sådant att  $|a_n - 2| < \varepsilon$  för varje  $n \geq N$ . Vi ser att

$$|a_n - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow 3^{-n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < 3^n \Leftrightarrow -\log_3 \varepsilon < n$$

där den sista ekvivalensen följer av att logaritmfunktionen är strängt växande. Räkningen visar att  $|a_n - 2| < \varepsilon$  är sann då  $n > -\log_3 \varepsilon$ . Alltså kan vi välja  $N$  till något tal större än  $-\log_3 \varepsilon$ , låt oss ta  $N = -42 \log_3 \varepsilon$  i fallet då  $\varepsilon \leq 1$  och  $N = -1/2 \log_3 \varepsilon$  i fallet då  $\varepsilon > 1$ . ▲

Vi säger att talföljden  $(a_n)_{n=1}^\infty$  har det **oegentliga gränsvärdet**  $\infty$  om det för varje  $M$  existerar ett  $N$  sådant att  $a_n \geq M$  för varje  $n \geq N$ . Vi betecknar detta med

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty.$$



Observera att talföljder som har oegentliga gränsvärden är divergenta. Det finns även talföljder som helt saknar gränsvärde, exempelvis  $a_n := (-1)^n$ , som pendlar mellan  $-1$  och  $1$ .

**Sats 4.5.** Låt  $(a_n)_{n=1}^\infty$  och  $(b_n)_{n=1}^\infty$  vara konvergenta talföljder med gränsvärdena  $A$  respektive  $B$ . Då följer att

- a)  $(a_n + b_n)_{n=1}^\infty$  är konvergent med gränsvärdet  $A + B$ ,
- b)  $(a_n b_n)_{n=1}^\infty$  är konvergent med gränsvärdet  $AB$ .
- c) om  $B \neq 0$  har vi att  $(a_n/b_n)_{n=1}^\infty$  är konvergent med gränsvärdet  $A/B$ .
- d) om  $a_n \leq b_n$ , för varje  $n$  så gäller att  $A \leq B$ .

BEVIS: Vi använder oss av definitionen.

- a) Tag  $\varepsilon > 0$ . Vi vill visa att det finns ett  $N$  sådant att  $|a_n + b_n - A - B| < \varepsilon$  för alla  $n \geq N$ .

$$|a_n + b_n - A - B| \leq |a_n - A| + |b_n - B|$$

Då  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  konvergerar mot  $A$  och  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$  konvergerar mot  $B$  får vi att det finns tal  $N_1$  och  $N_2$  så att

$$|b_n - B| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{då } n \geq N_1$$

och

$$|a_n - A| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{då } n \geq N_2.$$

Detta ger att

$$|a_n + b_n - A - B| \leq \varepsilon, \quad \text{då } n \geq \max(N_1, N_2).$$

- b) Tag  $\varepsilon > 0$ . Vi vill visa att det finns ett  $N$  sådant att  $|a_n b_n - AB| < \varepsilon$  för alla  $n \geq N$ .

$$\begin{aligned} |a_n b_n - AB| &= |a_n b_n - a_n B + a_n B - AB| \\ &\leq |a_n b_n - a_n B| + |a_n B - AB| \\ &= |a_n| |b_n - B| + |B| |a_n - A|. \end{aligned}$$

Eftersom  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  är konvergent så är den begränsad, d.v.s. det finns ett tal  $K > 0$  sådant att  $|a_n| < K$  för varje  $n \geq 1$ . Då  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  konvergerar mot  $A$  och  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$  konvergerar mot  $B$  får vi att det finns tal  $N_1$  och  $N_2$  sådana att

$$|b_n - B| \leq \frac{\varepsilon}{2K}, \quad \text{då } n \geq N_1$$

och

$$|a_n - A| \leq \frac{\varepsilon}{2|B|}, \quad \text{då } n \geq N_2.$$

Detta ger att

$$|a_n b_n - AB| \leq \varepsilon, \quad \text{då } n \geq \max(N_1, N_2).$$

- c) Detta bevis lämnas som en övning åt läsaren.
- d) Låt oss göra ett motsägelsebevis. Antag att  $B < A$ . Bilda talföljden  $c_n = a_n - b_n$ . Vi har att  $c_n \geq 0$ , för varje  $n \geq 1$ . Talföljden  $(c_n)_{n=1}^{\infty}$  har gränsvärdet  $C := B - A < 0$ . Tag  $\varepsilon = -C/2 > 0$ . Från definitionen existerar det ett  $N$  sådant att  $C + C/2 \leq c_n \leq C/2$ , för varje  $n \geq N$ . Men då  $C < 0$  så får vi att  $c_n \leq C/2 < 0$  för  $n \geq N$ . Detta strider mot att  $c_n \geq 0$ , för varje  $n \geq 1$ . Alltså är  $A \geq B$ .

■

**Sats 4.6.** Om  $(a_n)_{n=1}^\infty$  är en växande och uppåt begränsad talföljd är så är den konvergent och

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq 1\}.$$

BEVIS: Antag att talföljden är uppåt begränsad av talet  $M$ . Vi vet då att alla tal i talföljden är mindre än eller lika stora som  $M$ . Låt oss kalla den minsta övre begränsning till  $(a_n)_{n=1}^\infty$  för  $K$ , d.v.s.  $K = \sup a_n : n \geq 1$ . Då  $K$  är den minsta övre begränsningen till talföljden så finns det element i talföljden godtyckligt nära  $K$  (i vissa fall även lika stora som  $K$ ). Alltså, för varje givet  $\varepsilon > 0$  finns ett  $N$  sådant att  $|a_N - K| < \varepsilon$ . Men då talföljden är växande kommer  $|a_n - K| < \varepsilon$  för alla  $n \geq N$ . Vi är klara och har visat att gränsvärdet av talföljden är precis  $K$ , d.v.s.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = K.$$

■

På samma sätt visas att om  $(a_n)_{n=1}^\infty$  är en avtagande och nedåt begränsad talföljd är så är den konvergent och

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_n : n \geq 1\}.$$

## 4.2 Binomialsatsen

Vi börjar med några exempel för att illustrera vad vi vill åstadkomma i detta delavsnitt.

**Exempel 4.7.** Antag att det finns fem personer och vi frågar oss följande: På hur många sätt kan dessa bilda en kö, d.v.s. en ordnad följd?

Svaret är att vi har fem möjligheter att välja den första personen, fyra möjligheter att välja den andra personen, o.s.v.. Vi får alltså  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$  möjligheter. ▲

**Definition 4.8.** Låt  $n \in \mathbb{N}$ , då definieras

$$n! = \begin{cases} n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1, & n \geq 1, \\ 1, & n = 0. \end{cases}$$

Beteckningen kallas  $n$ -fakultet.

**Exempel 4.9.** Antag att det finns tio personer och vi vill bilda en kö bestående av fyra personer. På hur många sätt kan vi åstadkomma detta?

Svaret är att vi kan välja första personen på tio olika sätt, andra personer på nio olika sätt, tredje personen på åtta olika sätt och slutligen den fjärde personen på sju olika sätt. Alltså finns det

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \frac{10!}{6!} = \frac{10!}{(10-4)!}$$

olika sätt. Den sista identiteten är där för att illustrera hur svaret beror av parametrarna från frågeställningen. ▲

Läsaren kan själv verifiera att detta resonemang leder till att vi kan välja ut en kö på  $k$  personer från  $n$  stycken på

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

olika sätt. Här förutsätts att  $k \leq n$ .

**Exempel 4.10.** Antag att det finns tio personer och vi vill bilda en grupp bestående av fyra personer. Där ordningen på de utvalda inte spelar någon roll. På hur många sätt kan vi åstadkomma detta?

Vi vet från det tidigare exemplet att varje kö av fyra personer från tio kan väljas ut på  $10!/(10-4)!$  olika sätt. Det betyder att om vi nu tar bort den inbördes ordningen så finns varje grupp med  $4!$  gånger för mycket. Det vi vill är att dessa  $4!$  olika köer är en och samma grupp. Vi måste alltså dividera med  $4!$ . Svaret är att vi kan välja ut fyra personer av tio till en grupp på

$$\frac{10!}{(10-4)!4!}$$

olika sätt. Det är värt att bekräfta att detta svar är symmetriskt i 4 och  $10-4$ . Jag menar att vi kunde lika gärna ha valt ut fyra personer genom att välja ut vilka sex personer som inte ska vara med. Att välja ut sex personer från tio till en grupp kan enligt ovan göras på

$$\frac{10!}{(10-6)!6!}$$

olika sätt. I båda fallen är svaret

$$\frac{10!}{4!6!}$$

▲

Mer allmänt

**Definition 4.11.** Låt  $n, k \in \mathbb{N}$  sådana att  $k \leq n$ . Vi definierar  $n$ -över- $k$  som

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Vi har alltså definierat en notation och talesätt för svaret på den viktiga frågan: På hur många sätt kan vi välja ut  $k$  stycken saker från  $n$  stycken?

Vi är nu redo att beskriva satsen som delavsnittet handlar om

**Sats 4.12** (Binomialsatsen). Låt  $n \in \mathbb{N}$ , då gäller att

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

BEVIS: Vänsterledet består av en multiplikation av  $n$  stycken faktorer av typen  $(a + b)$ . Om vi utför parentesmultiplikation så får termer av typen  $a^k b^{n-k}$ , så att den totala antalet faktorer är  $n$ . Frågan är hur många termer av denna typ vi får. Att välja ut  $k$  stycken  $a$  ur  $n$  parenteser kan göras på  $\binom{n}{k}$  olika sätt. Alltså är vi klara. ■

### 4.3 Talet $e$

**Exempel 4.13.** Antag att vi har  $x$  kr på banken och att banken ger oss  $xr$  kr i ränta varje år. Efter ett år har vi alltså  $(1 + r)x$  kr. Antag vidare att banken ger oss halva räntan om vi endast har pengarna insatta halva året och analogt för andra tidsperioder av året. I vårt fall betyder det att vi har  $(1 + r/2)x$  kr efter ett halvår. Vi kan då utnyttja detta genom att ha  $x$  kr insatta ett halvår för att ta ut  $(1 + r/2)x$ . Nu sätter vi in  $(1 + r/2)x$  samma dag och plockar vid årets slut ut  $(1 + r/2)$  gånger pengarna, dvs.  $(1 + r/2)(1 + r/2)x$ . Det senare kan skrivas om som

$$\left(1 + \frac{r}{2}\right) \left(1 + \frac{r}{2}\right) x = \left(1 + \frac{r}{2}\right)^2 x = \left(1 + r + \frac{r^2}{4}\right) x.$$

Vi har vunnit  $r^2x/4$  på kuppen.

Om vi nu gör så här varje dag blir det

$$\left(1 + \frac{r}{365}\right)^{365} x = \left(1 + r + \frac{r^2}{4} + \dots\right) x.$$

Om vi gör det  $n$  gånger så blir det

$$\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n x,$$

vad händer nu då  $n \rightarrow \infty$ ?

Det visar sig att detta gränsvärde går mot  $e^r x$ . Alltså har vi  $e^r x$  pengar efter ett år. Vi ser nu att om vi tar ut och sätter in efter ett halvår får vi,  $e^{r/2} e^{r/2} x = e^r x$ . Alltså är ränta på ränta redan inkluderad. Årsräntan är  $1 + r_{year} = e^r$  eller  $r_{year} = e^r - 1$ . ▲

**Definition 4.14.** Vi definierar talet

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$



För att definitionen ovan skall vara av någon mening så måste vi visa att talföljden är konvergent.

**Sats 4.15.** Talföljden  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  med

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

är konvergent.

BEVIS: Vi vill verifiera att  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  är växande och uppåt begränsad. Låt oss använda binomialsatsen (se sats 4.12)

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}.$$

Vi studerar varje term i detalj.

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!n^k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}{n^k} \\ &= \frac{1}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \\ &= \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right). \end{aligned}$$

För att nu inse att talföljden är växande studerar vi  $a_n$  och  $a_{n+1}$ .

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

och analogt följer att

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right).$$

Låt oss jämföra de termer vi får för ett givet  $k$ . Vi har att

$$1 - \frac{i}{n} < 1 - \frac{i}{n+1}, \quad i = 1, 2, \dots, k-1$$

vilket ger att

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right).$$

För varje  $k$  i summorna är termen från  $a_{n+1}$  större än den från  $a_n$ . Dessutom innehåller  $a_{n+1}$  en term mer än  $a_n$  som också ger ett positivt bidrag. Alltså är  $a_{n+1} > a_n$  för alla  $n \geq 1$ .

Låt oss nu även verifiera att  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  är uppåt begränsad. Återigen använder vi oss av framställningen

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!},$$

då varje parantes är mindre än 1.

Vi behöver olikheten  $k! > 2^k$  för alla  $k \geq 4$ . Olikheten kan ekvivalent beskrivas som  $k!/2^k > 1$ , för alla  $k \geq 4$ . Vi har följande

$$\frac{k!}{2^k} = \frac{k(k-1)(k-2)\cdots 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2} = \frac{k}{2} \frac{k-1}{2} \cdots \frac{5}{2} \frac{4}{2} \frac{3}{2} \frac{2}{2} \frac{1}{2} > \frac{k}{2} \frac{k-1}{2} \cdots \frac{5}{2} > 1,$$

eftersom varje faktor är större än 1.

Detta passar nu perfekt för vår uppskattning.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \sum_{k=4}^n \frac{1}{k!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \sum_{k=4}^n \frac{1}{2^k} \\ &= 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} < 1 + \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}. \end{aligned}$$

Vi påminner oss nu om formeln för en geometrisk summa (vilken är enkel att verifiera, hur?),

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

I vårt fall får vi

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < 1 + \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) < 3.$$

Vi har nu visat att  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  både är växande och uppåt begränsad vilket ger att  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  är konvergent. ■

**Exempel 4.16.** Följande gäller

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Lösningen är

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= [m = -n] = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-m} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{m-1}\right)^m = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^m \\ &= [k = m-1] = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1} = e. \end{aligned}$$

▲

**Definition 4.17.** Inversen till exponentialfunktionen med  $e$  som bas kallas för den **naturliga logaritmfunktionen** och betecknas  $x \mapsto \ln x$ .

## 4.4 Standardgränsvärden

Nästa sats säger oss att exponentiell tillväxt är snabbare än polynomiell tillväxt och fakultet växer snabbare än exponentiell tillväxt.

**Sats 4.18.** *Låt  $a > 1$ . Då gäller att*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^b} = \infty, \quad (4.1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{a^n} = \infty. \quad (4.2)$$

BEVIS: Vi börjar med att visa (4.1). Eftersom  $a > 1$  så gäller att  $a^{1/b} > 1$ . Vi låter  $a^{1/b} = 1 + p$ , där  $p > 0$ . Vi har att

$$\frac{a^n}{n^b} = \left( \frac{a^{n/b}}{n} \right)^b = \left( \frac{(1+p)^n}{n} \right)^b.$$

Det räcker nu att visa att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+p)^n}{n} = \infty.$$

Med hjälp av binomialsatsen (se sats 4.12), där vi endast kommer att utnyttja en term, får vi

$$\frac{(1+p)^n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k \geq \frac{1}{n} \binom{n}{2} p^2 = \frac{n(n-1)p^2}{2n} = \frac{(n-1)p^2}{2} \rightarrow \infty,$$

då  $n \rightarrow \infty$ .

Låt oss nu visa (4.2). Bilda

$$c_n = \frac{n!}{a^n}.$$

Låt  $N$  vara sådant att  $N > 2a$  och notera att

$$c_{n+1} = \frac{(n+1)!}{a^{n+1}} = \frac{(n+1) \cdot n!}{a \cdot a^n} = \frac{n+1}{a} c_n.$$

Vi har att

$$c_{N+j} = \frac{N+j}{a} \cdot \frac{N+j-1}{a} \cdots \frac{N+1}{a} c_N \geq 2^j c_N \rightarrow \infty,$$

då  $j \rightarrow \infty$ . ■

## 4.5 Bolzano-Weierstrass sats

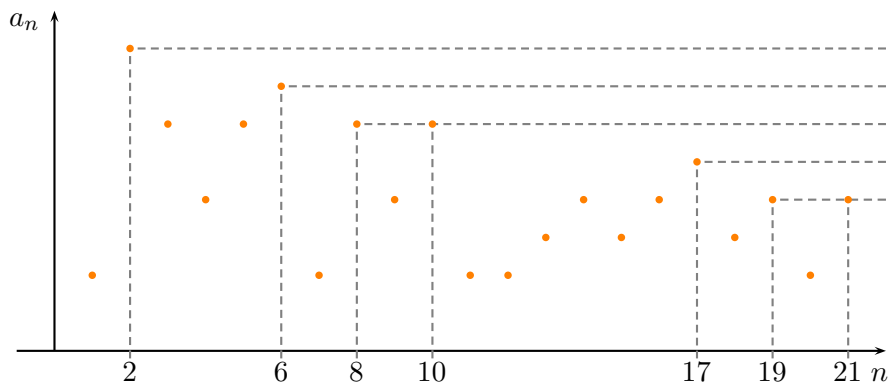
Låt  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  vara en talföljd. Om vi endast studerar en del av talen  $a_n$ , men fortfarande oändligt många, i talföljden och bildar en egen talföljd av dessa så sägs denna nya talföljd vara en **delföljd** av den ursprungliga talföljden. Den nya talföljden betecknas ofta  $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ , där  $n_k \in \mathbb{N}$  är en strängt växande talföljd. Vi ger ett exempel för att klargöra notationen.

**Exempel 4.19.** Låt  $a_n = 2n$ . Talföljden  $(a_n)_{n=1}^\infty$  ges då av 2, 4, 6, 8, ... En delföljd till denna är när vi endast betraktar var femte tal, alltså 2, 12, 22, 32, ... Den nya talföljden betecknas  $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$ , där  $n_k = 5(k-1) + 1$ . D.v.s., för  $n_1$  (då  $k = 1$ ) får vi  $a_{n_1} = a_1 = 2$ , för  $n_2$  (då  $k = 2$ ) får vi  $a_{n_2} = a_6 = 12$ , o.s.v. ▲

**Sats 4.20** (Bolzano-Weierstrass sats). Låt  $(a_n)_{n=1}^\infty$  vara en begränsad talföljd. Då finns det en konvergent delföljd.

BEVIS: Om vi lyckas visa att det finns en växande eller avtagande delföljd så vet vi från sats 4.6 att den kommer att vara konvergent.

Låt  $A = \{n : a_n \geq a_m, \text{ för varje } m \geq n\}$ . Mängden  $A$  beskriver alla index av tal i  $(a_n)_{n=1}^\infty$  sådana att alla resterande tal i följderna är mindre eller lika med talet.



I figuren ovan innehåller  $A$  indexen 2, 6, 8, 10, 17, 19, 21, ...

Om antalet index i  $A$  är oändligt många så har vi funnit en avtagande delföljd. Nämligen  $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$ , där  $n_k, k = 1, 2, 3, \dots$ , är indexen i  $A$  ordnade i en växande följd.

Om antalet index i  $A$  är ändligt många så finns det ett största index i  $A$  om nu inte  $A$  är tomma mängden, låt oss kalla detta index för  $M$ . Nu kan vi välja vårt första tal i talföljden  $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$  till  $a_{M+1}$  eller  $a_1$  i fallet att  $A$  var tomma mängden. Eftersom detta index är större än  $M$  så finns det större tal än  $a_{M+1}$  i talföljden  $(a_n)_{n=M+1}^\infty$ . Låt  $n_2$  vara ett index sådant att  $a_{n_2} > a_{M+1}$ . Eftersom  $n_2 \notin A$  så finns det ett index  $n_3 > n_2$  sådant att  $a_{n_3} > a_{n_2}$ . Denna process leder till en växande talföljd  $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$  som är konvergent enligt sats 4.6. ■

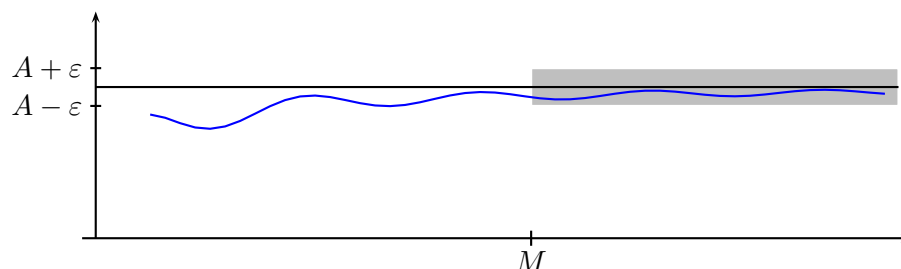
**Övning 4.1.** Bevisa sats 4.5 c).

## 5 Gränsvärden av funktioner vid oändligheten

**Definition 5.1.** Låt  $f$  vara en funktion definierad i  $(a, \infty)$  för något  $a$ . Vi säger att  $f$  **konvergerar** mot gränsvärdet  $A$  då  $x$  går mot  $\infty$  om det för varje  $\varepsilon > 0$  finns ett  $M$  sådant att  $|f(x) - A| \leq \varepsilon$  för varje  $x \geq M$ . Vi skriver detta

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A.$$

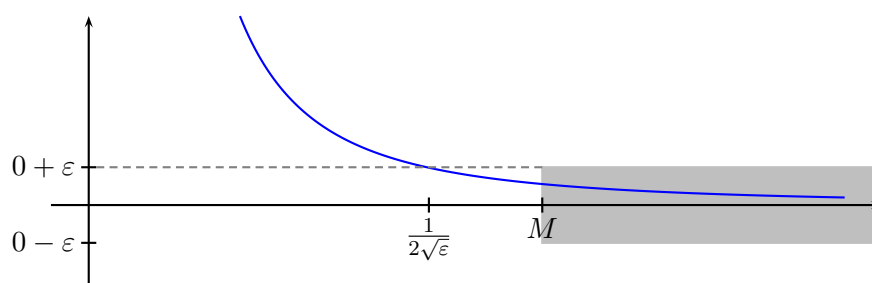
Alternativt skriver vi att  $f(x) \rightarrow A$  då  $x \rightarrow \infty$ . Om inget sådant  $A$  existerar kallas  $f$  **divergent** då  $x$  går mot  $\infty$ .



**Exempel 5.2.** Visa att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{4x^2} = 0.$$

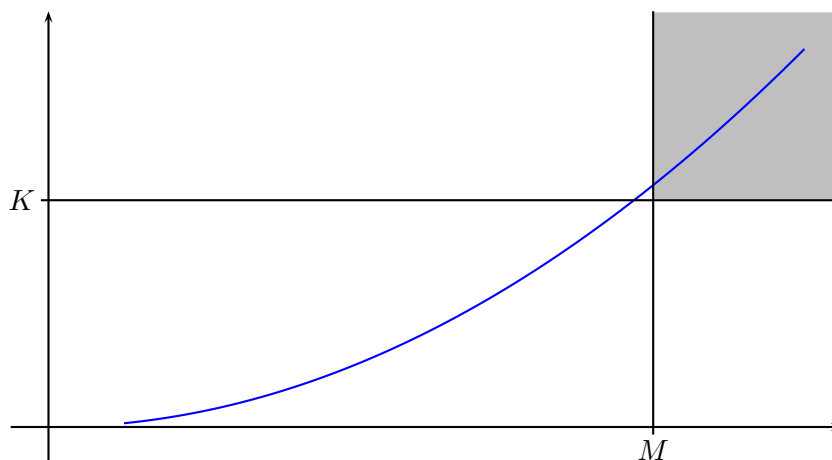
Låt  $\varepsilon > 0$  vara givet. Vi vill visa att det finns ett  $M$  sådant att  $|f(x) - 0| \leq \varepsilon$  för varje  $x \geq M$ . Vi har att  $|f(x) - 0| \leq \varepsilon$  om och endast om  $\frac{1}{4x^2} \leq \varepsilon$ . Det senare gäller om och endast om  $x \geq \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}$ . Vi kan alltså välja  $M$  till något tal större än  $\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}$ .



Observera att  $M$  är beroende av  $\varepsilon$ . Förändras  $\varepsilon$  så kan vi behöva byta värdet på  $M$ . Vi kan förtydliga detta genom att skriva  $M = M(\varepsilon)$ . ▲

**Definition 5.3.** Låt  $f$  vara en funktion definierad i  $(a, \infty)$  för något  $a$ . Vi säger att  $f$  har det **oegentliga gränsvärdet**  $\infty$  då  $x$  går mot  $\infty$  om det för varje  $K$  finns ett  $M$  sådant att  $f(x) > K$  för varje  $x \geq M$ . Vi skriver detta

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$



På samma vis som ovan definierar vi gränsvärden och oegentliga gränsvärden mot  $-\infty$ .

Precis som för talföljder så gäller följande sats (jämför med sats 4.5).

**Sats 5.4.** *Låt  $f$  och  $g$  vara funktioner sådana att  $f(x) \rightarrow A$  och  $g(x) \rightarrow B$ , då  $x \rightarrow \infty$ . Då följer att*

- a)  $f(x) + g(x) \rightarrow A + B$ , då  $x \rightarrow \infty$ ,
- b)  $f(x)g(x) \rightarrow AB$ , då  $x \rightarrow \infty$ ,
- c) om  $B \neq 0$  så följer att  $f(x)/g(x) \rightarrow A/B$ , då  $x \rightarrow \infty$ .
- d) om  $f(x) \leq g(x)$ , för alla  $x \in (a, \infty)$  så gäller att  $A \leq B$ .

Beviset för denna sats sammanfaller snarare som på notation beviset för sats 4.5. Det är lämnat till läsaren, som en övning i notation, att utföra dessa bevis.

Det är värt att notera att vi kan tillåta att  $A = \infty$  och/eller  $B = \infty$  med de formella räknereglerna:

$$\begin{aligned} \infty \cdot \infty &= \infty \\ \infty + \infty &= \infty \\ x \cdot \infty &= \infty, \quad \text{där } x \in \mathbb{R} \text{ och } x > 0 \\ x + \infty &= \infty, \quad \text{där } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Observera dock att följande uttryck är odefinierade

$$\frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty$$

**Sats 5.5.** *Låt  $a > 1$  och  $b > 0$  då gäller följande gränsvärden*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^b} = \infty, \tag{5.1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^b}{\log_a x} = \infty. \tag{5.2}$$

BEVIS: Vi börjar med att visa (5.1) genom att överföra problemet på (4.1). Vi låter  $[x]$  vara heltalsdelen av  $x$ , d.v.s. det största heltal som är mindre än  $x$ . Precis som i beviset av (4.1) så räcker det med att visa att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x} = \infty.$$

Vi har för  $x \geq 1$  att

$$\frac{a^x}{x} \geq \frac{a^{[x]}}{2[x]} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^{[x]}}{[x]} \rightarrow \infty, \quad (5.3)$$

då  $[x] \rightarrow \infty$ , enligt (4.1).

För att visa (5.2) så låter vi  $x = a^t$ . Detta medför att  $x \rightarrow \infty$  blir ekvivalent med att  $t \rightarrow \infty$ . Vi får alltså att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^b}{\log_a x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a^{bt}}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(a^b)^t}{t} = \infty, \quad (5.4)$$

enligt (5.1). ■

## 5.1 Övningar

**Övning 5.1.** Bevisa sats 5.4

**Övning 5.2.** Bestäm gränsvärdet av  $x \mapsto x^{1/x}$ , då  $x \rightarrow \infty$ .

## 6 Lokala gränsvärden

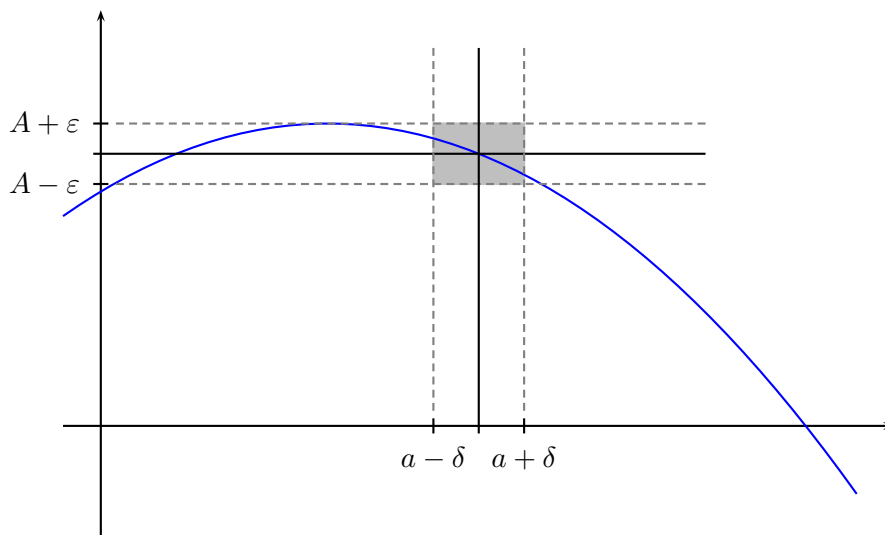
**Definition 6.1.** Låt  $f$  vara en funktion sådan att varje punkterad omgivning till  $x = a$  innehåller punkter i  $D_f$ . Vi säger att  $f$  **konvergerar mot**  $A$  då  $x$  går mot  $a$  om det för varje  $\varepsilon > 0$  finns ett  $\delta$  sådant att  $|f(x) - A| < \varepsilon$  för varje  $x \in D_f$  som uppfyller att  $0 < |x - a| < \delta$ . Vi skriver detta

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

eller  $f(x) \rightarrow A$ , då  $x \rightarrow a$ .

**Vänster- och högergränsvärden** definieras genom att endast studera funktionsvärdena för  $x < a$ , respektive  $x > a$ . Vi använder då notationen  $x \rightarrow a-$  för vänstergränsvärde och  $x \rightarrow a+$  för högergränsvärde. För att ett gränsvärde ska existera måste vänster- och högergränsvärdena finnas och vara lika.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \iff \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A$$



**Exempel 6.2.** Visa att

$$\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9.$$

Låt  $\varepsilon > 0$ , vi vill finna ett  $\delta$  sådant att  $|x^2 - 9| < \varepsilon$ , då  $0 < |x - 3| < \delta$ . Vi har att

$$|x^2 - 9| = |x + 3| \cdot |x - 3| \leq 20|x - 3| < 20\delta.$$

Vi vill att detta ska vara mindre än  $\varepsilon$ , dvs.

$$20\delta < \varepsilon,$$

vilket är ekvivalent med att

$$\delta < \frac{\varepsilon}{20}.$$

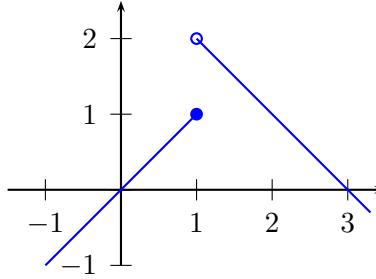
Vi väljer alltså  $\delta$  till något tal mindre än  $\varepsilon/20$ . ▲



**Exempel 6.3.** Låt

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{om } x \leq 1 \\ 3 - x, & \text{om } x > 1 \end{cases}$$

Då är  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$  och  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$ . Alltså existerar inte  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ . Grafen nedan illustrerar vad som händer.

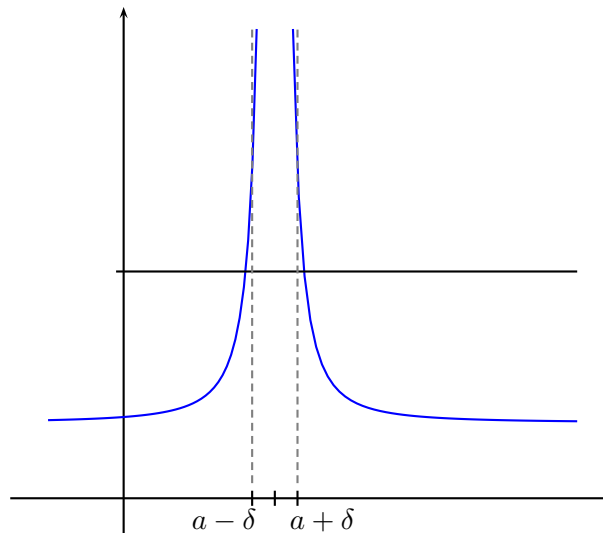


▲

**Definition 6.4.** Låt  $f$  vara en funktion sådan att varje punkterad omgivning till  $x = a$  innehåller punkter i  $D_f$ . Vi säger att  $f$  har det **oegentliga gränsvärdet**  $\infty$  då  $x$  går mot  $a$  om det för varje  $K$  finns ett  $\delta$  sådant att  $f(x) > K$  för varje  $0 < |x - a| < \delta$ . Vi skriver detta

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty.$$

Vi definierar oegentliga vänster- och högergränsvärden och mot  $-\infty$  på ett analogt vis.



**Sats 6.5.** Låt  $f$  och  $g$  vara funktioner sådana att  $f(x) \rightarrow A$  och  $g(x) \rightarrow B$ , då  $x \rightarrow a$ . Då följer att

a)  $f(x) + g(x) \rightarrow A + B$ , då  $x \rightarrow a$ ,

b)  $f(x)g(x) \rightarrow AB$ , då  $x \rightarrow a$ ,

c) om  $B \neq 0$  så följer att  $f(x)/g(x) \rightarrow A/B$ , då  $x \rightarrow a$ ,

d) om  $f(x) \leq g(x)$  för varje  $x$  i en omgivning av  $a$  så följer att  $A \leq B$ .

Beviset för denna sats sammanfaller sånär som på notation beviset för sats 4.5. Det är lämnat till läsaren, som en övning i notation, att utföra dessa bevis.

**Exempel 6.6.** Visa att

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{|x|}$$

inte existerar.

Lösningen är att studera höger- respektive vänstergränsvärde separat. Vi börjar med högergränsvärdet. Vi får

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) = 1.$$

Vänstergränsvärdet blir

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x - 1) = -1.$$

Eftersom höger- och vänstergränsvärdet inte sammanfaller existerar inte gränsvärdet.

▲

## 6.1 Övningar

**Övning 6.1.** Bevisa sats 6.5.

## 7 Kontinuitet

### 7.1 Definitionen och exempel

**Definition 7.1.** Låt  $f$  vara en funktion sådan att varje punkterad omgivning till  $x = a$  innehåller punkter i  $D_f$  och att  $a \in D_f$ . Vi säger att  $f$  är **kontinuerlig** i  $a$  om

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Om  $f$  är kontinuerlig i alla punkter i sin definitionsmängd sägs  $f$  vara **kontinuerlig**.

Det är värt att notera att om  $x$  sätts till  $a + h$  i definitionen ovan så får vi en alternativt sätt att uttrycka kontinuitetsvillkoret. Vi har då att  $f$  är kontinuerlig i  $a$  om

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = f(a) \tag{7.1}$$

eller  $f$  är kontinuerlig om det för varje  $x \in D_f$  gäller att

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x + h) = f(x). \tag{7.2}$$

Att en funktion  $f$  är kontinuerlig i  $a \in D_f$  betyder att vänstergränsvärdet, högergränsvärdet och funktionsvärdet i  $a$  sammanfaller. Detta visar även att det finns en omgivning till  $a$  där funktionen är begränsad, vilket vi kommer att utnyttja i sats 7.6.

Kontinuitet förknippas ofta med följande räkneregel:

**Sats 7.2.** Låt  $f$  vara kontinuerlig i punkten  $b$  och låt  $g(x) \rightarrow b$ , då  $x \rightarrow a$ . Då gäller att

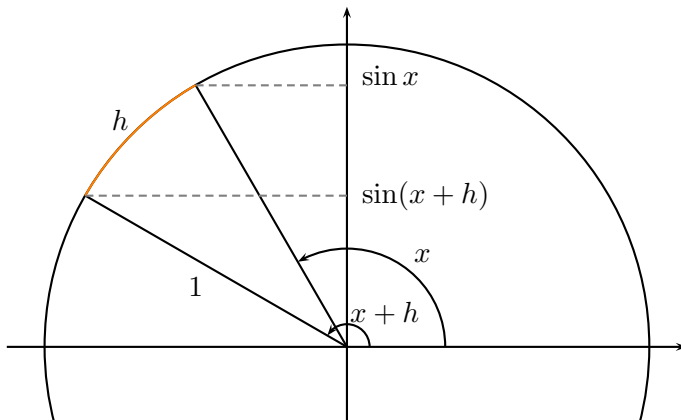
$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right).$$

BEVIS: Högerledet kan skrivas som  $f(b)$  eftersom  $g(x) \rightarrow b$ , då  $x \rightarrow a$ . Vi vill visa att vänsterledet är  $f(b)$ . Tag  $\varepsilon > 0$ . Vi vill visa att det finns ett  $\delta$  sådant att  $|f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon$  då  $0 < |x - a| < \delta$ . Då  $f$  är kontinuerlig i  $b$  så följer att det finns ett  $\delta_1$  sådant att  $|f(y) - f(b)| < \varepsilon$ , då  $|y - b| < \delta_1$ . Då  $g(x) \rightarrow b$ , då  $x \rightarrow a$  så följer att vi kan välja ett  $\delta$  så att  $|g(x) - b| < \delta_1$ , då  $0 < |x - a| < \delta$ . Vilket visar satsen. ■

**Kommentar 7.3.** Vi kan även tillåta att  $a = \infty$  i sats 7.2. Beviset blir då lite annorlunda och lämnas som en övning åt läsaren.

**Sats 7.4.** Funktionerna  $x \mapsto \sin x$  och  $x \mapsto \cos x$  är kontinuerliga.

BEVIS: Vi använder (7.2) för att visa kontinuiteten. Vi vill visa att  $\sin(x + h) - \sin x \rightarrow 0$  och  $\cos(x + h) - \cos x \rightarrow 0$ , då  $h \rightarrow 0$ . Studera bilden nedan (där vi har antagit att  $x$  och  $h$  är positiva)



Vi ser att det kortaste avståndet mellan punkterna  $(\cos x, \sin x)$  och  $(\cos(x+h), \sin(x+h))$  är från Pythagoras sats

$$\sqrt{(\cos(x+h) - \cos x)^2 + (\sin(x+h) - \sin x)^2} \leq h.$$

Att det kortaste avståndet är mindre än  $h$  följer av att  $h$  är längden av den bågnade delen av enhetscirkeln mellan de aktuella punkterna. I fallet att  $h < 0$  blir olikheten

$$\sqrt{(\cos(x+h) - \cos x)^2 + (\sin(x+h) - \sin x)^2} \leq |h|.$$

Vi har att

$$\begin{aligned} |\sin(x+h) - \sin x| &= \sqrt{(\sin(x+h) - \sin x)^2} \\ &\leq \sqrt{(\cos(x+h) - \cos x)^2 + (\sin(x+h) - \sin x)^2} \\ &\leq |h| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

då  $h \rightarrow 0$ . Vi har visat att  $x \mapsto \sin x$  är kontinuerlig. Räkningen för att visa  $x \mapsto \cos x$  är kontinuerlig är analog. ■

## 7.2 Sats om kontinuerliga funktioner

**Sats 7.5.** Låt  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  vara en kontinuerlig funktion. Då är  $f$  begränsad.

BEVIS: Låt oss visa att  $f$  är uppåt begränsad med hjälp av ett motsägelsebevis. Antag därför att  $f$  är uppåt obegränsad. Då gäller att för varje heltal  $k$  så finns ett  $x_k$  sådant att

$$f(x_k) > k. \tag{7.3}$$

Vi har nu en talföljd  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  med  $x_n \in [a, b]$ , för varje  $n$ . Alltså är talföljden begränsad och enligt Bolzano-Weierstrass sats (se 4.20) så finns det en konvergent delföljd  $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ . Låt oss beteckna gränsvärdet med  $x$ , alltså  $x_{n_k} \rightarrow x$ ,

då  $k \rightarrow \infty$ . Eftersom  $x \in [a, b]$  och  $f$  är kontinuerlig i  $x$  så har vi att  $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x)$ , då  $k \rightarrow \infty$ . Men från (7.3) gäller att

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \infty.$$

Vi har en motsägelse.

På liknande sätt kan vi visa att  $f$  är nedåt begränsad. ■

**Sats 7.6.** *Summan och produkten av kontinuerliga funktioner är kontinuerlig.*

BEVIS: Låt  $f$  och  $g$  vara två kontinuerliga funktioner och antag att  $a \in D_f \cap D_g$ , d.v.s.  $a$  är en punkt som finns i definitionsmängden för  $f$  såväl som  $g$ . Vi har att

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(a+h) - f(a)) = 0 \quad (7.4)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (g(a+h) - g(a)) = 0. \quad (7.5)$$

Vi vill visa att

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(a+h) + g(a+h) - (f(a) + g(a))) = 0 \quad (7.6)$$

och

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)) = 0 \quad (7.7)$$

Att summan (7.6) är kontinuerlig följer direkt från (7.4) och (7.5) enligt

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(a+h) + g(a+h) - (f(a) + g(a))) \quad (7.8)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (f(a+h) - f(a)) + \lim_{h \rightarrow 0} (g(a+h) - g(a)) = 0. \quad (7.9)$$

För produkten (7.7) behöver vi lägga till och dra ifrån termen  $f(a+h)g(a)$  och sedan utnyttja att då  $f$  är kontinuerlig så är  $f$  begränsad (se sats 7.5). Vi får att det finns ett  $M$  sådant att

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} |f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)| \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} |f(a+h)g(a+h) - f(a+h)g(a) + f(a+h)g(a) - f(a)g(a)| \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0} |f(a+h)(g(a+h) - g(a))| + \lim_{h \rightarrow 0} |f(a+h) - f(a)|g(a)| \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0} M|g(a+h) - g(a)| + \lim_{h \rightarrow 0} |f(a+h) - f(a)|g(a) = 0. \end{aligned}$$

■

**Följdsats 7.7.** *Polynom är kontinuerliga funktioner.*

BEVIS: Eftersom polynom är summor och produkter av räta linjer av typen  $y = kx + m$  så räcker det enligt sats 7.6 att konstatera att dessa linjer är kontinuerliga. ■

**Exempel 7.8.** Polynomet  $f(x) = 2x^4 - x + 3 = (2x) \cdot x \cdot x \cdot x + (-x + 3)$  och kan med andra ord beskrivas som summor och produkter av de räta linjerna  $2x$ ,  $x$  och  $-x + 3$ . ▲

**Exempel 7.9.** Bestäm

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

LÖSNING: Uttrycket kan skrivas om enligt följande

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n/x}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{1}{n/x}\right)^{n/x}\right)^x.$$

Eftersom funktionen  $t \mapsto t^x$  är kontinuerlig (se sats 7.7) har vi identiteten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n/x}\right)^{n/x}\right)^x = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n/x}\right)^{n/x}\right)^x.$$

Med hjälp av variabelbytet  $m = n/x$  och definition 4.14 får vi att

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n/x}\right)^{n/x}\right)^x = \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right)^x = e^x.$$

▲

**Lemma 7.10.** Låt  $f$  vara kontinuerlig i punkten  $x = a$  och  $f(a) > \mu$ . Då existerar ett öppet intervall  $I$  kring  $x = a$  sådant att  $f(x) > \mu$  för alla  $x \in I$ .

BEVIS: Tag  $\varepsilon > 0$  sådant att  $f(a) - \mu > \varepsilon$ , vilket är ekvivalent med att  $f(a) - \varepsilon > \mu$ . Då  $f$  är kontinuerlig i  $x = a$  gäller att

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

som i sin tur betyder att vi kan finna ett  $\delta > 0$  sådant att  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$  då  $|x - a| < \delta$ . Att  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$  betyder att  $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$ , vilket ger att  $\mu < f(a) - \varepsilon < f(x)$  för alla  $x \in I = \{x : |x - a| < \delta\}$ . ■

**Sats 7.11** (Satsen om mellanliggande värde). Låt  $f$  vara kontinuerlig och låt  $[a, b] \subset D_f$ . Då antar  $f$  alla värden mellan  $f(a)$  och  $f(b)$ .

**Kommentar 7.12.** Satsen säger att om  $f(a) \leq m \leq f(b)$  (eller  $f(b) \leq m \leq f(a)$ ) så finns det ett  $c \in [a, b]$  sådant att  $f(c) = m$ .

BEVIS: Om  $f(a) = f(b)$  finns det inget att visa. Antag att  $f(a) < f(b)$ , det motsatta fallet kan behandlas analogt. Låt  $\mu$  vara ett godtyckligt tal sådant att  $f(a) < \mu < f(b)$ . Vi vill visa att det finns ett tal  $x = \lambda$  sådant att  $f(\lambda) = \mu$ .

Låt oss bilda mängden  $M = \{x \in [a, b] : f(x) < \mu\}$  som ej är tom eftersom  $a \in M$  (eller hur?). Vi ska nu visa att  $\lambda = \sup M$  uppfyller att  $f(\lambda) = \mu$ . Ett sätt att visa detta är att visa att  $f(\lambda) < \mu$  och att  $f(\lambda) > \mu$ .

Antag att  $f(\lambda) < \mu$ . Eftersom  $f(\lambda) < \mu < f(b)$  måste  $\lambda < b$ . Enligt föregående lemma finns det nu ett öppet intervall  $I$  kring  $\lambda$  sådant att  $f(x) < \mu$  för alla  $x \in I$ , d.v.s. det finns ett tal  $\delta > 0$  sådant att  $f(x) < \mu$  då  $\lambda \leq x < \lambda + \delta$ . Alla dessa  $x$  ligger alltså i  $M$ , men detta strider ju mot att  $\lambda = \sup M$ . Vi har fått en motsägelse till vårt antagande att  $f(\lambda) < \mu$ .

Antag nu att  $f(\lambda) > \mu$ . Eftersom  $f(\lambda) > \mu > f(a)$  måste  $\lambda > a$ . Återigen får vi från lemma 7.10 att det finns ett tal  $\delta > 0$  sådant att  $f(x) > \mu$  då  $\lambda - \delta < x \leq \lambda$ . Detta betyder att det inte kan finnas något tal i  $M$  i intervallet  $(\lambda - \delta, \lambda)$ . Detta strider mot att  $\lambda = \sup M$ .

Vi har fått önskad likhet  $f(\lambda) = \mu$ . Då  $\mu$  var godtyckligt vald i  $[a, b]$  gäller att  $f$  antar alla värden mellan  $f(a)$  och  $f(b)$ . ■

**Exempel 7.13.** Har ekvationen  $x^3 - 5x + 3 = 0$  någon lösning i intervallet  $[-1, 1]$ ?

LÖSNING: Bilda funktionen  $f(x) = x^3 - 5x + 3$ . Eftersom  $f$  är kontinuerlig och  $f(-1) = 7$  och  $f(1) = -1$  så finns det enligt satsen om mellanliggande värde (se sats 7.11) ett  $x_0 \in (-1, 1)$  sådant att  $f(x_0) = 0$ . Alltså har ekvationen någon lösning i intervallet  $[-1, 1]$ . ▲

**Sats 7.14.** Låt  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  vara en kontinuerlig funktion. Då antar  $f$  sitt max- och minvärde.

**Kommentar 7.15.** Satsen säger att det finns en punkt  $x_0 \in [a, b]$  sådan att  $f(x) \leq f(x_0)$ , för alla  $x \in [a, b]$  och analogt för minvärdet.

BEVIS: Låt oss visa att  $f$  antar sitt maxvärde. Fallet med minvärde är analogt. Eftersom  $f$  är kontinuerlig är  $f$  från sats 7.5 begränsad. Alltså är värdemängden till  $f$  en delmängd av  $[A_1, B_1]$  för något  $A_1$  och  $B_1$ . Vi ska nu använda intervallhalveringar i vårt resonemang. Låt oss dela intervallet mitt itu, så vi får  $[A_1, M]$  och  $[M, B_1]$ , där  $M$  är mittpunkten i intervallet  $[A_1, B_1]$ . Om  $f(x) \geq M$  så väljer vi som  $[A_2, B_2]$  intervallet  $[M, B_1]$ , annars  $[A_1, M]$ . Vi fortsätter och dela intervallet  $[A_2, B_2]$  på mitten o.s.v.

Talen  $B_n$  har egenskapen att  $f(x) \leq B_n$ , för varje  $x \in [a, b]$ . För varje intervall  $[A_n, B_n]$  så finns det ett  $x_n$  sådant att  $A_n \leq f(x_n) \leq B_n$ . Eftersom följderna  $(A_n)_{n=1}^\infty$  är växande och uppåt begränsad så konvergerar talföljden till något värde  $V$ . Eftersom avståndet  $B_n - A_n \rightarrow 0$ , då  $n \rightarrow \infty$  så konvergerar även  $(B_n)_{n=1}^\infty$  mot  $V$  och därmed har vi att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = V.$$

Eftersom  $f(x) \leq B_n$ , för varje  $x \in [a, b]$ , så har vi från sats 4.5 d) att  $f(x) \leq V$ , för varje  $x \in [a, b]$ .

Det återstår att visa att det finns ett  $x \in [a, b]$  sådant att  $f(x) = V$ , d.v.s. att den övre begränsningen antas. Eftersom  $(x_n)_{n=1}^\infty$  är en begränsad talföljd så finns det från Bolzano-Weierstrass sats (se 4.20) en konvergent delföljd  $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$  med gränsvärde  $x$ . Vi har då  $f$  är kontinuerlig

$$f(x) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = V.$$

■

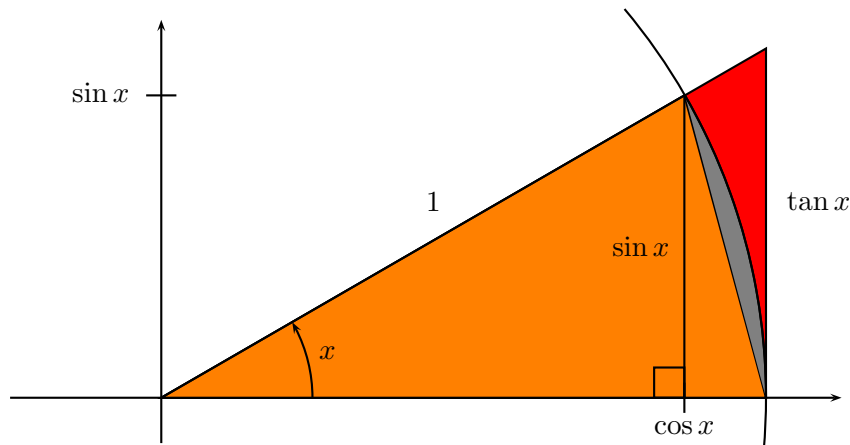
### 7.3 Lokala standardgränsvärden

**Hjälpssats 7.16.** *Olikheten*

$$|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x|, \quad (7.10)$$

gäller för alla  $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ .

BEVIS: Antag först att  $x \in [0, \pi/2)$ . Vi vill då visa att  $\sin x \leq x \leq \tan x$ . Låt oss studera tre areor enligt figuren



Den minsta arean är den vi får från triangeln som har höjden  $\sin x$  och bredden ett. Den mittersta arean får vi från cirkelsektorn med vinkeln  $x$  och den största arean får vi från den triangel som har höjden  $\tan x$  och bredden ett. Areornas relationer är

$$\frac{\sin x}{2} \leq \frac{x}{2\pi} \pi \leq \frac{\tan x}{2}$$

eller enklare

$$\sin x \leq x \leq \tan x.$$

Antag nu att  $x \in (-\pi/2, 0)$ . Då är  $-x \in (0, \pi/2)$  och från den bevisade delen av satsen har vi att

$$\sin(-x) \leq -x \leq \tan(-x),$$



eller

$$-\sin x \leq -x \leq -\tan x.$$

Då  $x \in (-\pi/2, 0)$  är  $-\sin x = |\sin x|$ ,  $-x = |x|$  och  $-\tan x = |\tan x|$ . Därmed följer att

$$|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x|$$

även gäller då  $x \in (-\pi/2, 0)$ . ■

**Sats 7.17** (Lokala standardgränsvärden). *Följande gränsvärden gäller*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad (7.11)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad (7.12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (7.13)$$

BEVIS:

Bevis av 7.11: Vi börjar med att skriva om uttrycket enligt

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{x} \ln(1+x) = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Låt oss utföra variabelbytet  $s = 1/x$ . Gränsvärdet  $x \rightarrow 0$  kommer att sammanfalla med  $s \rightarrow \pm\infty$  (obs två gränsvärden!). Då vi vet att logaritmfunktionen är kontinuerlig, får vi att

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \left( \ln \left( 1 + \frac{1}{s} \right)^s \right) = \ln \left( \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \left( 1 + \frac{1}{s} \right)^s \right) = \ln e = 1.$$

Bevis av 7.12: Låt oss direkt utföra variabelbytet  $e^x - 1 = s$ , vilket ger  $x = \ln(1+s)$

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{s}{\ln(1+s)} \rightarrow 1, \text{ då } s \rightarrow 0 \text{ (vilket är detsamma som } x \rightarrow 0).$$

Bevis av 7.13: Enligt sats 7.16 har vi relationen

$$|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x|, \quad (7.14)$$

för alla  $x$  i en liten omgivning av 0. Låt oss dividera med  $|x|$ . Vi får att

$$\frac{|\sin x|}{|x|} \leq 1 \leq \frac{|\sin x|}{|x|} \frac{1}{\cos x}. \quad (7.15)$$

Sats 6.5 d) ger att relationen kvarstår efter att vi låtit  $x \rightarrow \infty$ . Alltså

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|}{|x|} \leq 1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|}{|x|} \frac{1}{\cos x}. \quad (7.16)$$

I den sista identiteten kan vi använda sats 6.5 b) som ger

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|}{|x|} \leq 1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|}{|x|}. \quad (7.17)$$

Alltså har vi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|}{|x|} = 1. \quad (7.18)$$

Observera till sist att

$$\frac{\sin x}{x} > 0,$$

för alla  $x \neq 0$  sådana att  $|x| < \pi/2$ . Detta ger önskad likhet. ■

**Exempel 7.18.** Bestäm

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\tan 5x}.$$

Lösningen är att utnyttja standardgränsvärden. Vi får

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{5} \cdot \frac{\ln(1+2x)}{2x} \cdot \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \cos 5x.$$

Den första och den andra faktorn är standardgränsvärden och går båda mot ett enligt sats 7.17. Vi utnyttjar nu sats 6.5 b) för kunna utföra dessa gränsvärden var för sig. Vi får att

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{5} \cdot \frac{\ln(1+2x)}{2x} \cdot \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \cos 5x = \frac{2}{5} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{2}{5}.$$

▲

## 7.4 Övningar

**Övning 7.1.** Visa att sats 7.2 gäller även för  $a = \infty$ , d.v.s. låt  $f(x)$  vara kontinuerlig i punkten  $b$  och låt  $g(x) \rightarrow b$ , då  $x \rightarrow \infty$ . Då gäller att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)\right).$$

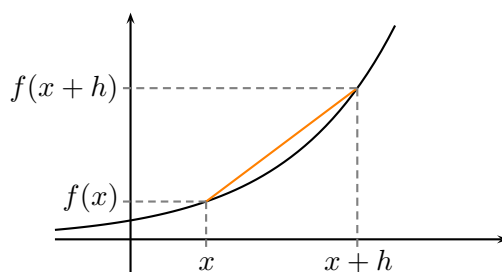
## 8 Derivata

### 8.1 Definitionen

**Definition 8.1.** Låt  $f$  vara en funktion definierad i en omgivning av  $x_0$ . Vi säger att  $f$  är **deriverbar** i punkten  $x_0$  om

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (8.1)$$

existerar. Värdet  $f'(x_0)$  kallas **derivatan** av  $f$  i punkten  $x_0$ . Om  $f$  är deriverbar i varje punkt i sin definitionsmängd så kallas  $f$  **deriverbar** och  $f'$  kallas för **derivatan**.



Det är värt att notera att vi endast kan derivera en funktion i en punkt om funktionen är definierad i en omgivning av punkten. Alltså kan vi inte derivera funktioner i ändpunkter/randpunkter.

### 8.2 Derivatan av elementära funktioner

**Exempel 8.2.** Låt  $f(x) = e^x$ . Enligt definitionen och (7.12) är

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} = e^x \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} \right) = e^x.$$

Alltså är  $f$  deriverbar med derivatan  $f'(x) = e^x$ . ▲

**Exempel 8.3.** Låt  $f(x) = \ln x$ . Enligt definitionen och (7.11) är

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h/x)}{h} = \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h/x)}{h/x} = \frac{1}{x}$$

Alltså är  $f$  deriverbar med derivatan  $f'(x) = 1/x$ . ▲

**Exempel 8.4.** Låt  $f(x) = \sin x$ . Enligt definitionen och (7.13) är

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \sin x \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \right) \\ &= \sin x \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x. \end{aligned}$$

Låt oss närmare studera uttrycket

$$\frac{\cos h - 1}{h} = \frac{1 - \sin^2(h/2) - 1}{h} = -\frac{\sin^2(h/2)}{h} = -\frac{1}{2} \frac{\sin(h/2)}{h/2} \sin(h/2) \rightarrow 0,$$

då  $h \rightarrow 0$ , ty

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} = 1$$

och

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sin(h/2) = 0.$$

Alltså är  $f$  deriverbar med derivatan  $f'(x) = \cos x$ . ▲

### 8.3 Derivationsregler

**Sats 8.5.** Låt  $f$  och  $g$  vara deriverbara funktioner i punkten  $x$ . Då följer att  $f + g$  och  $fg$  är deriverbara i punkten  $x$ . Derivatorna har följande samband

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) \quad (8.2)$$

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad (8.3)$$

Om dessutom  $g(x) \neq 0$  så följer att  $f/g$  är deriverbar i punkten  $x$  och

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \quad (8.4)$$

BEVIS: Om vi visar sambanden (8.2), (8.3) och (8.4) så följer att  $f + g$ ,  $fg$  och  $f/g$  är deriverbara i punkten  $x$ , (eftersom högerleden existerar från förutsättningarna i satsen).

Låt oss visa att  $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ . Vi har

$$\begin{aligned} \frac{(f + g)(x + h) - (f + g)(x)}{h} &= \frac{f(x + h) + g(x + h) - f(x) - g(x)}{h} \\ &= \frac{f(x + h) - f(x)}{h} + \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \\ &\rightarrow f'(x) + g'(x), \end{aligned}$$

då  $h \rightarrow 0$ .

Vi lämnar beviset av (8.3) som en övning.

Antag nu även att  $g(x) \neq 0$ . Eftersom  $g$  är deriverbar i punkten  $x$  är  $g$  kontinuerlig i punkten  $x$  och därmed är  $g$  enligt lemma 7.10 skild från noll i någon

omgivning av punkten  $x$ . Antag att  $|h|$  är så litet i räkningen nedan så att  $x + h$  tillhör denna omgivning och därmed är  $g(x + h) \neq 0$ . Vi har

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x+h) - \left(\frac{f}{g}\right)(x)}{h} &= \frac{1}{h} \left( \frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} \right) \\ &= \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} \\ &= \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} \\ &= \frac{1}{g(x+h)g(x)} \left( g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x) \frac{g(x) - g(x+h)}{h} \right) \\ &\rightarrow \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}, \end{aligned}$$

då  $h \rightarrow 0$ . ■

**Exempel 8.6.** Låt  $f(x) = \tan x$ . Enligt (8.4)

$$f'(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Alltså är  $f$  deriverbar med derivatan  $f'(x) = 1/\cos^2 x$ . ▲

**Sats 8.7** (Kedjeregeln). *Antag att  $f$  är deriverbar i punkten  $y$ ,  $g$  deriverbar i punkten  $x$  och  $y = g(x)$ . Då är  $f \circ g$  deriverbar i punkten  $x$  med derivatan*

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x). \quad (8.5)$$

BEVIS: Eftersom  $f$  är deriverbar så vet vi att funktionen  $\rho$  definierad som

$$\rho(k) = \frac{f(x+k) - f(x)}{k} - f'(x) \rightarrow 0, \quad (8.6)$$

då  $k \rightarrow 0$ . Vi kommer att använda formeln

$$f(x+k) - f(x) = k(f'(x) + \rho(k)). \quad (8.7)$$

Låt  $k(h) = g(x+h) - g(x)$  och studera förändringskvoten

$$\begin{aligned} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} &= \frac{f(g(x) + g(x+h) - g(x)) - f(g(x))}{h} \\ &= \frac{f(g(x) + k(h)) - f(g(x))}{h} \\ &= \frac{(f'(g(x)) + \rho(k))k(h)}{h} \\ &= (f'(g(x)) + \rho(k)) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &\rightarrow f'(g(x))g'(x), \end{aligned}$$

då  $h \rightarrow 0$  och därmed även  $k = g(x+h) - g(x) \rightarrow 0$ . ■

**Exempel 8.8.** Låt  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  sådan att  $f(x) = x^a$ , där  $a \in \mathbb{R}$  och  $a \neq 0$ . Vi använder oss av följande omskrivning

$$f(x) = x^a = e^{\ln x^a} = e^{a \ln x}$$

och använder oss av kedjeregeln och får att

$$f'(x) = e^{a \ln x} a \frac{1}{x} = ax^a \frac{1}{x} = ax^{a-1}.$$

Om  $a \in \mathbb{Z}$  så kan  $f$  även definieras för negativa tal. För  $x \in (-\infty, 0)$  så gäller att

$$f(x) = x^a = (-1)^a (-x)^a = (-1)^a e^{a \ln(-x)}$$

och därmed är

$$f'(x) = (-1)^a e^{a \ln(-x)} a \frac{1}{-x} (-1) = x^a a \frac{1}{x} = ax^{a-1}.$$

Slutligen har vi att om  $a \geq 1$  är ett heltal är  $f$  även deriverbar i punkten 0. Vi har från definitionen att

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^{a-1} = \begin{cases} 0, & a \geq 2 \\ 1, & a = 1 \end{cases}$$

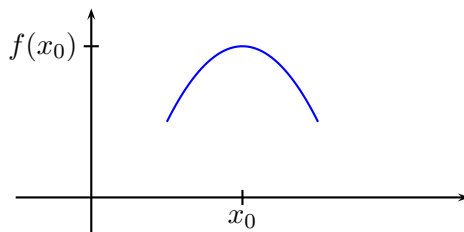
Vi observerar att även i detta fall kan vi beskriva derivatan med formeln

$$f'(x) = ax^{a-1}.$$

▲

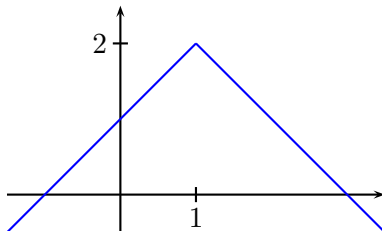
## 8.4 Definitioner av lokala max- och minpunkter

**Definition 8.9.** En funktion  $f$  sägs ha ett **lokalt maximum** i punkten  $x_0 \in D_f$  om det finns en omgivning  $I \subset D_f$  till  $x_0$  sådan att  $f(x) \leq f(x_0)$ , för varje  $x \in I$ .



Läsaren kan själv förverkliga en definition av hur ett **lokalt minimum** för en funktion definieras. En funktion som har ett lokalt maximum eller lokalt minimum i en punkt  $x_0$  sägs ha en **lokal extrempunkt** i  $x_0$ .

**Exempel 8.10.** Låt  $f(x) = 2 - |x - 1|$ . Då gäller att  $f$  har ett lokalt maximum i punkten 1. Ty,  $f(1) = 2$  och  $f(x) = 2 - |x - 1| \leq 2$ , för varje  $x \in \mathbb{R}$ .



▲

**Sats 8.11.** Låt  $f$  vara deriverbar i punkten  $x_0$  och ha en lokal extrempunkt i  $x_0$ . Då gäller att  $f'(x_0) = 0$ .

BEVIS: Vi börjar med fallet att  $f$  har ett lokalt maximum i punkten  $x_0$ .

Eftersom  $f$  är deriverbar i punkten  $x_0$  så är  $f$  definierad i en omgivning av  $x_0$ . Enligt definitionen av derivata vill vi studera gränsvärdet av

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

då  $h \rightarrow 0$ . Täljaren i detta uttryck är alltid negativ eftersom  $f$  har ett lokalt maximum i punkten  $x_0$ . Nämnaren kommer uppenbarligen vara positiv för positiva  $h$  och negativ för negativa  $h$ . Alltså har vi att

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0,$$

då  $h < 0$  och

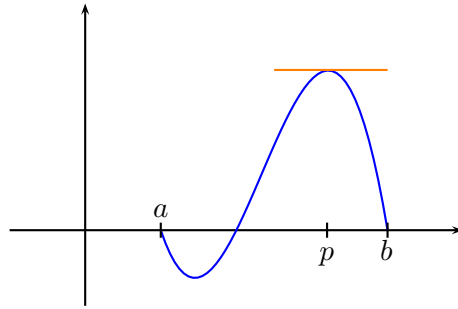
$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0,$$

då  $h > 0$ . Eftersom  $f$  är deriverbar i punkten  $x_0$  så vet vi att detta gränsvärde existerar. Alltså måste  $f'(x_0) = 0$ .

Beviset i fallet att  $f$  har ett lokalt minimum i punkten  $x_0$  är analogt och lämnas till läsaren att kontrollera. ■

## 8.5 Medelvärdessatsen

**Sats 8.12** (Rolles sats). Låt  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  vara en kontinuerlig funktion som är deriverbar på  $(a, b)$  och låt  $f(a) = f(b)$ . Då gäller att det existerar ett punkt  $p \in (a, b)$  sådan att  $f'(p) = 0$ .



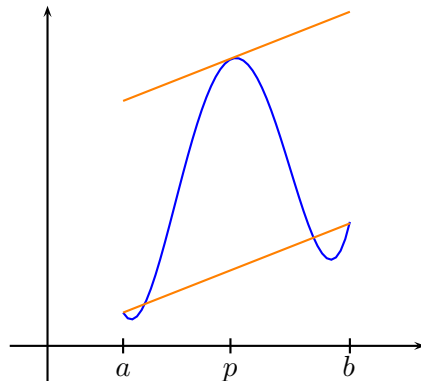
BEVIS: Vi börjar med att inse att om  $f(x) = 0$ , för varje  $x \in [a, b]$  så gäller att  $f'(x) = 0$ , för varje  $x \in (a, b)$ . Detta gör att punkten  $p$  kan väljas godtyckligt inom  $(a, b)$ .

Antag nu att  $f(x) > 0$ , för något  $x \in (a, b)$ . Eftersom  $f$  är kontinuerlig på det slutna intervallet  $[a, b]$  så antar  $f$  sitt maxvärde (se sats 7.14). Då  $f(a) = f(b) = 0$  så gäller att maxvärdet antas i en inre punkt  $q \in (a, b)$ . Eftersom  $f$  är deriverbar i den punkt som ger maxvärdet så gäller enligt sats 8.11 att  $f'(q) = 0$ . Alltså kan  $p$  väljas till detta  $q$ .

Fallet då  $f(x) < 0$  behandlas på ett analogt sätt. ■

**Sats 8.13** (Medelvärdessatsen). *Låt  $f$  vara en deriverbar funktion. För varje intervall  $[a, b] \subset D_f$  gäller att det existerar ett punkt  $p \in (a, b)$  sådan att*

$$f'(p)(b - a) = f(b) - f(a). \quad (8.8)$$



BEVIS: Låt oss skriva om problemet så att vi kan använda Rolles sats. Funktionen  $f$  går genom punkterna  $(a, f(a))$  och  $(b, f(b))$ . Låt  $g$  vara den räta linjen som går genom dessa punkter. En enkel beräkning ger att  $g$  ges av

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}.$$

Om vi nu låter  $h$  vara differensen mellan  $f$  och  $g$  så är förutsättningarna för Rolles sats uppfyllda. Alltså, om  $h(x) = f(x) - g(x)$  så gäller att  $h(a) = h(b) = 0$  och  $h$  är deriverbar i intervallet  $(a, b)$  samt kontinuerlig i  $[a, b]$ . Alltså finns



det en punkt  $p \in (a, b)$  sådan att  $h'(p) = 0$ . För denna punkten gäller att  $f'(p) - g'(p) = 0$ . Alltså är

$$f'(p) = g'(p) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Vilket bevisar satsen. ■

**Övning 8.1.** Visa att derivatan av  $x \mapsto \cos x$  är  $x \mapsto -\sin x$ .

**Övning 8.2.** Bevisa (8.3).