REGLERTEKNIK

KTH

REGLERTEKNIK AK EL1000/EL1110/EL1120

Kortfattade lösningsförslag till tentamen 2011–12–17, kl. 9.00–14.00

1. (a) i. Laplacetransform av (1) och (2) ger,

$$sY(s) = -4Y(s) + sU(s) + 3U(s)$$
$$U(s) = \frac{1}{2}E(s) + \frac{1}{2s}E(s)$$

varifrån vi kan lösa ut överföringsfunktionerna

$$Y(s) = \frac{s+3}{s+4}U(s) = G(s)U(s)$$
$$U(s) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2s}\right)E(s) = \frac{s+1}{2s}E(s) = F(s)E(s).$$

ii. Slutna systemet ges av

$$G_c(s) = \frac{G(s)F(s)}{1+G(s)F(s)} = \frac{(s+3)(s+1)}{3s^2+12s+3}.$$

Nollställena är -3 och -1, och polerna är $-2 \pm \sqrt{3}$.

iii. Alla poler och nollställen ligger i vänstra komplexa halvplanet. Systemet är minfas.

(b) i. Statiska förstärkningen ger $G(0) = K = 3$. Systemets brytpunkt ligger vid $\omega = 0.2$ rad/s. Alltså $T = 1/0.2 = 5$ s.

ii. Vi kan nu räkna ut $|G(i0.2)| = 3/\sqrt{2}$ (alternativt läs av i bodediagram), och $\arg G(i0.2) = -45°$. I stationäritet fås då

$$y(t) = \frac{2\cdot 3}{\sqrt{2}}\sin\left(0.2t - \frac{45°}{180°}\pi\right) = 3\sqrt{2}\sin(0.2t - \pi/4).$$

2. (a) Polerna till slutna systemet ges av egenvärdena till $A - BL$,

$$A - BL = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l_1 & -l_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Den karakteristiska ekvationen ges av

$$\det(sI - A + BL) = s^2 + l_1 s + l_2 = 0.$$

Med polerna i {-1,-2} ges den önskade karakteristiska ekvationen av

$$(s+1)(s+2) = s^2 + 3s + 2 = 0.$$

Alltså blir regulatorn

$$l_1 = 3, \quad l_2 = 2 \Rightarrow L = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Polerna till observeraren ges av $A - KC$,

$$A - KC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -k_1 \\ 1 & -k_2 \end{pmatrix}.$$

Den karakteristiska ekvationen ges av

$$\det(sI - A + KC) = s^2 + k_2 s + k_1 = 0.$$

Med polerna i {-4,-4} ges den önskade karakteristiska ekvationen av

$$(s+4)(s+4) = s^2 + 8s + 16 = 0.$$

Alltså blir parametrarna

$$k_1 = 16, \quad k_2 = 8 \Rightarrow K^T = \begin{pmatrix} 16 & 8 \end{pmatrix}.$$

(c) Slutna systemets överföringsfunktion ges av (se boken) $G_c(s) = C(sI - A + BL)^{-1} B l_0$, där i vårt fall $l_0 = 1$. Vi har

$$(sI - A + BL)^{-1} = \begin{pmatrix} s+3 & 2 \\ -1 & s \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{pmatrix} s & -2 \\ 1 & s+3 \end{pmatrix},$$

vilket ger $G_c(s) = \dfrac{1}{s^2 + 3s + 2}$.

(d) Tillståndsformen blir

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t)^2 - x_2(t)^3 + u(t) = f_1(x, u) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) = f_2(x, u). \end{aligned}$$

Stationära punkten är där $\dot{x}_1 = 0$ och $\dot{x}_2 = 0$. Då $u^0 = 0$ får vi den stationära punkten $x_1^0 = 0$ och $x_2^0 = 0$. Systemmatrisen A för det linjäriserad systemet ges av Jacobianen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^0, u^0) = \begin{pmatrix} -2x_1^0 & -3(x_2^0)^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

På motsvarande vis fås

$$B = \frac{\partial f}{\partial u}(x^0, u^0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y = x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x = Cx.$$

Alltså blir det linjäriserade systemet

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x(t).$$

3. (a) Fasen på systemet går från $0°$ till $-270°$. Det enda system som har sådan faskurva är G_2.

   (b) G_1 har en integration vilket ger statisk förstärkning 1 i det slutna systemet. Alltså hör den ihop med G_B.

   G_3 har en skärfrekvens kring 0.4 rad/s vilket gör att slutna systemets bandbredd är kring 0.4 rad/s. Alltså hör den ihop med G_A.

   G_2 hör ihop med antingen G_C eller G_D. Eftersom G_2 har samma statiska förstärkning som G_3, måste den höra ihop med G_D.

   (c) G_1 har skärfrekvens $\omega_c = 2$ rad/s och fasmarginal $\varphi_m = 18°$. Vi vill att det kompenserade systemet ska ha skärfrekvens $\omega_{c,ny} = 4$ rad/s och fasmarginal $\varphi_m = 2 \cdot 18° = 36°$. Då $\arg G(i4) = -198°$ måste vi höja fasen med $\varphi_{max} = 54°$, vilket ger $\beta \approx 0.15$. Vi får $\tau_D = 1/\sqrt{\beta}\omega_{c,ny} \approx 0.65$. Sist bestämmer vi K så att skärfrekvensen verkligen blir $\omega_{c,ny}$,

$$|F_{lead}(i4)||G(i4)| = \frac{K}{\sqrt{\beta}} 0.25 = 1 \Rightarrow K \approx 1.55.$$

4. (a) Systemet (4) kan skrivas som

$$\dot{x} = A(\alpha)x + Bu$$
$$y = Cx$$

   där

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$
$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & \alpha \end{bmatrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Egenvärdena av systemmatrisen A ges av lösningarna till den karakteristiska ekvationen

$$\det(A(\alpha) - sI) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & \alpha \end{bmatrix} - s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-s & 0 \\ -2 & \alpha - s \end{bmatrix}\right)$$
$$= (1-s)(\alpha - s) = 0$$

alltså $s_1 = 1$ och $s_2 = \alpha$. Då egenvärdet $s_1 > 0$ är systemet instabilt för alla α.

OBS! Notera att

$$\det(A(\alpha)) - sI) = 0 \Leftrightarrow \det(sI - A(\alpha)) = 0,$$

och att den senare formen är den som vi använt oftast i kursen för att räkna ut den karakteristiska ekvationen. Av ekvivalensen följer att båda formerna är rätt.

(b) Systemet (4) är observerbart då observerbarhetsmatrisen

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & \alpha \end{bmatrix}$$

ej är singulär. Då

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & \alpha \end{bmatrix}\right) = 2 \neq 0$$

är systemet observerbart för alla α.

(c) Systemet (4) är styrbart då styrbarhetsmatrisen

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & A(\alpha)B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2-\alpha \end{bmatrix}$$

ej är singulär. Då

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2-\alpha \end{bmatrix}\right) = 1 \cdot (-2-\alpha) - (-1) = -1 - \alpha$$

är systemet styrbart precis då $\alpha \neq -1$.

(d) För $\alpha \neq -1$ är systemet styrbart, vilket innebär att vi kan placera egenvärdena till $(A(\alpha) - BL)$ godtyckligt. Alltså måste vi undersöka om vi kan placera egenvärdena till $(A(\alpha) - BL)$ i vänster halvplan då $\alpha = -1$. Egenvärdena till $(A(-1) - BL)$ med $L = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}$ ges av den karakteristiska ekvationen

$$\begin{aligned}
\det\left(A(-1) - BL - sI\right) &= \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \\ -l_1 & -l_2 \end{bmatrix} - s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\
&= \det\left(\begin{bmatrix} 1 - l_1 - s & -l_2 \\ -2 + l_1 & -1 + l_2 - s \end{bmatrix}\right) \\
&= (1 - l_1 - s)(-1 + l_2 - s) - (-2 + l_1)(-l_2) \\
&= s^2 + (l_1 - l_2)s + (l_1 - l_2 - 1) = 0
\end{aligned}$$

Ett andragradspolynom

$$s^2 + ps + q = 0$$

har sina rötter strikt i vänster halvplan om, och endast om, $p > 0$ och $q > 0$, vilket ger villkoren

$$\begin{cases} l_1 - l_2 > 0 \\ l_1 - l_2 > 1 \end{cases} \Rightarrow l_1 - l_2 > 1$$

Vi kan t.ex. välja $l_1 = 2$ och $l_2 = 0$, vilket ger tillståndsåterkopplingen

$$u = -Lx = -\begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} x$$

Alltså är det möjligt att stabilisera systemet för alla α.

5. (a) En möjlig tolkning av $v(t)$ är att det är mätbrus. En möjlig tolkning av $d(t)$ är att det är en störning i vattenpumpen, så mängden vatten som pumpas in inte motsvarar exakt vad regulatorn $F(s)$ efterfrågar.

   (b) Först noterar vi att

$$Y(s) = \frac{G(s)F(s)}{1 + G(s)F(s)} F_r(s)R(s) + \frac{G(s)}{1 + G(s)F(s)} D(s) + \frac{1}{1 + G(s)F(s)} V(s).$$

Vi börjar i definitionen av fasmarginal och inkluderar kravet på $\varphi_m = 60°$,

$$\varphi_m = 180° + \arg(F(i\omega_{c,d})G(i\omega_{c,d})) = 180° + \arg(F(i\omega_{c,d})) + \arg(G(i\omega_{c,d})) = 60°,$$

där $\omega_{c,d}$ är den ännu okända skärfrekvensen.
Vi noterar även att

$$\begin{aligned} \arg(G(i\omega_{c,d})) &= \arg \frac{1}{(i\omega_{c,d} + 1)^2} = -\arg(i\omega_{c,d} + 1)^2 \\ &= -2\arg(i\omega_{c,d} + 1) = -2\arctan(\omega_{c,d}). \end{aligned}$$

Sammantaget kan vi skriva

$$180° - 60° + \arg(F(i\omega_{c,d})) = 120° + \arg(F(i\omega_{c,d})) = 2\arctan(\omega_{c,d}).$$

vilket ger oss att

$$\omega_{c,d} = \tan\left(\frac{120° + \arg(F(i\omega_{c,d}))}{2}\right). \tag{1}$$

Vi kommer även behöva att

$$|G(i\omega_{c,d})| = \left(\frac{1}{\sqrt{\omega_{c,d}^2 + 1}}\right)^2 = \frac{1}{\omega_{c,d}^2 + 1}. \tag{2}$$

Vi vet att $F(s) = K$ vilket innebär att $\arg(F(i\omega_{c,d})) = \arg(K) = 0$ då K är reell och positiv. Instoppat i ekvation (1) får vi att

$$\omega_{c,d} = \tan(60°) = \sqrt{3}.$$

För att få denna skärfrekvens krävs att vi väljer K så att

$$|F(i\omega_{c,d})G(i\omega_{c,d})| = |KG(i\omega_{c,d})| = 1 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{1}{|G(i\omega_{c,d})|} = 4.$$

Detta K ger stabilt slutet system då $\varphi_m > 0$. Alltså får vi använda slutvärdessatsen för att bestämma K_r så att $y(t) \to 1$ vid steg i $r(t)$,

$$\lim_{s\to 0} s \cdot \frac{G(s)F(s)}{1+G(s)F(s)} F_r(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{G(0)\cdot 4}{1+G(0)\cdot 4} K_r = \frac{4}{1+4} K_r = 1 \quad \Rightarrow \quad K_r = \frac{5}{4}.$$

(c) Systemet är stabilt då $\varphi_m > 0$. Vi får använda slutvärdessatsen och vid ett steg i $d(t)$ får vi

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{G(s)}{1+G(s)F(s)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{G(0)}{1+G(0)\cdot 4} = \frac{1}{1+4} = \frac{1}{5}.$$