Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning 1, 2012-XX-XX, kl. XX.00 – XX.00.

SF1663 Tillämpad linjär algebra med numeriska metoder, för CFATE.

Examinator: Lars Filipsson

Inga hjälpmedel!

Varje uppgift i del A bedöms antingen som godkänd eller underkänd. Varje uppgift i del B ger maximalt 4 poäng. För godkänt krävs att alla uppgifter på del A är godkända och minst 6 poäng på del B.

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa.

Ett resultat på 7 poäng eller mer på kontrollskrivning 1 ger 4 poäng på uppgift 1 på del B, som därmed inte behöver lösas.

Del A

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x + 2y + z - u = 1 \\ x - y - z + 3u = -2 \\ 2x + y + u = 0 \end{cases}$$

och kontrollera svaret. Vilken rang har systemet?

2. En matlab-körning inleds med kommandot

```
A = [3 -2 3; -1 1 -1; 0 3 1];
```

a) Ange korta matlab-kommandon för att bestämma A^T, A^2, A^{-1} samt den delmatris som består av de två första kolumnerna i A.

b) Vad blir resultatet om kommandot `A.*A` utförs?

c) Bestäm (utan hjälp av matlab) inverserna till matriserna A och A^T.

3. Punkterna $P = (3, 1, 0)$, $Q = (2, 1, 2)$ och $R = (-1, 1, 4)$ ligger i ett plan.

a) Bestäm två vektorer parallella med planet.

b) Bestäm en normalvektor till planet.

c) Bestäm arean av triangeln med hörnpunkter i P, Q och R.

V.g. vänd!

4. De två planen $-x+2y+z=1$ och $2x-2y+3z=0$ skär varandra utmed en linje.

   a) Innehåller skärningslinjen punkten $(9,6,-2)$?

   b) Bestäm en riktningsvektor för skärningslinjen.

   c) Skriv skärningslinjen i parameterform.

Del B

1. Visa att det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax + y + z = 2a \\ x + ay + z = 3-a \\ x + y + az = 1+a \end{cases}$$

har minst en lösning oavsett värdet på konstanten a. (4)

2. En andragradsfunktion $y = p(x)$ ska anpassas till följande värden:

x	11	12	13
y	4	4	2

   a) Ställ upp en centrerad ansats för $p(x)$. (1)

   b) Bestäm polynomet $p(x)$. (3)

3. En linjär avbildning i planet betyder geometriskt först en spegling i linjen $y = x$ och därefter rotation moturs med vinkeln $\pi/4$ kring origo. Bestäm den linjära avbildningens matris. (4)

4. Bestäm två linjer (i parameterform) som går genom punkten $P = (2,0,1)$ och skär linjen

$$\ell: \quad (x,y,z) = (1,1,1) + t\,(0,1,0)$$

under vinkeln $\pi/4$. (4)

Del A

1. Vi ställer upp det linjära ekvationssystemet i ett räkneschema och gausseliminerar,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & -7 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right),$$

där vi ringat in de ledande ettorna.

Från slutschemat kan vi avläsa lösningarna,

$$\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + t \\ u = t \end{cases} \qquad (t \text{ parameter}).$$

Eftersom slutschemat har tre ledande ettor har systemet rang 3.

2. a) `A'`, `A^2`, `inv(A)` resp. `A(:,1:2)`.

   b) Kommandot `A.*A` betyder att vi elementvis multiplicerar A med sig själv, dvs.

$$\texttt{A.*A} = \begin{pmatrix} 3\cdot 3 & (-2)\cdot(-2) & 3\cdot 3 \\ (-1)\cdot(-1) & 1\cdot 1 & (-1)\cdot(-1) \\ 0\cdot 0 & 3\cdot 3 & 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

   c) Inversen till A får vi genom att ställa upp räkneschemat $(A|E)$ och radreducera till schemat $(E|A^{-1})$,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -9 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 11 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -9 & 1 \end{array}\right).$$

Från detta schema avläser vi att

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 11 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -3 & -9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inversen av A^T får vi sedan till

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 11 & 3 & -9 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. a) Eftersom P, Q och R ligger i planet så är vektorerna

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (2,1,2) - (3,1,0) = (-1,0,2)$$
$$\overrightarrow{PR} = R - P = (-1,1,4) - (3,1,0) = (-4,0,4)$$

parallella med planet.

b) Från deluppgift a har vi två vektorer parallella med planet och vi får en vektor vinkelrät mot dessa två vektorer (och därmed vinkelrät mot planet) genom att bilda deras kryssprodukt,

$$\boldsymbol{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (-1,0,2) \times (-4,0,4) = (0,-4,0).$$

c) Arean av triangeln är lika med halva arean av parallellogrammet som $\overrightarrow{PQ}$ och $\overrightarrow{PR}$ spänner upp

$$\text{Area} = \tfrac{1}{2}\,|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \tfrac{1}{2} \cdot 4 = 2.$$

4. a) Skärningslinjen består av alla punkter som tillhör båda planen, dvs. uppfyller båda planens ekvationer.

Eftersom punkten $P = (9,6,-2)$ uppfyller

$$-x + 2y + z = -9 + 2 \cdot 6 + (-2) = 1,$$
$$2x - 2y + 3z = 2 \cdot 9 - 2 \cdot 6 + 3 \cdot (-2) = 0,$$

så tillhör punkten skärningslinjen.

b) Från planens ekvationer kan vi avläsa deras normalvektorer som koefficienterna framför x, y och z,

$$\boldsymbol{n}_1 = (-1,2,1) \qquad \text{resp.} \quad \boldsymbol{n}_2 = (2,-2,3).$$

Skärningslinjen tillhör båda planen och därför måste dess riktning vara vinkelrät mot $\boldsymbol{n}_1$ och $\boldsymbol{n}_2$, dvs. parallell med deras kryssprodukt $\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2$.

En riktningsvektor för linjen är därmed

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = (-1,2,1) \times (2,-2,3) = (8,5,-2).$$

c) Vi vet att punkten $P = (9,6,-2)$ ligger på skärningslinjen och att $\boldsymbol{v} = (8,5,-2)$ är linjens riktningsvektor. En parametrisering av linjen är därför

$$(x,y,z) = (9,6,-2) + t\,(8,5,-2).$$

Ett alternativ är att först lösa deluppgift c genom att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 1 \\ 2x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

eftersom skärningslinjen består av alla punkter som uppfyller båda planens ekvationer.

Lösningen blir

$$(x, y, z) = (1, 1, 0) + t\,(-8, -5, 2)$$

som därmed är en parametrisering av skärningslinjen. (En annan parametrisering än den vi fick fram tidigare.)

Från parametriseringen avläser vi direkt att $\boldsymbol{u} = (-8, -5, 2)$ är linjens riktningsvektor och att punkten $(9, 6, -2)$ ligger på linjen ser vi genom att stoppa in $t = -1$ i parameterformen.

Del B

1. Systemet har exakt en lösning när determinanten av koefficientmatrisen är skild från noll, dvs. när

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \;\; = \begin{vmatrix} 0 & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$= \{\,\text{kofaktorutveckling längs första kolumnen}\,\}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-a & 1-a^2 \\ a-1 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$= (1-a)^2 + (1-a)(1-a^2) = (1-a)^2(2+a) \neq 0.$$

Detta inträffar när $a \neq 1$ och $a \neq -2$.

Fallen $a = 1$ och $a = -2$ måste vi undersöka separat.

- I fallet $a = 1$ blir ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

som är ekvivalent med systemet som bara består av ekvationen

$$x + y + z = 2.$$

Detta system har parameterlösningen

$$\begin{cases} x = 2 - s - t \\ y = s \\ z = t \end{cases} \qquad (s\,,\ t \text{ parametrar}).$$

- När $a = -2$ får vi systemet

$$\begin{cases} -2x + y + z = -4 \\ x - 2y + z = 5 \\ x + y - 2z = -1 \end{cases}$$

som vi löser med gausseliminering

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{c} - \;\; 2 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{c} + \;\; -\tfrac{1}{3} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} - \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Systemet har lösningen

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t \\ z = t \end{cases} \qquad (\,t \text{ parameter}).$$

Sammantaget har alltså systemet åtminstone en lösning oavsett värdet på a .

2. a) En centrerad ansats är $p(x) = a_0 + a_1(x-12) + a_2(x-12)^2$.

   b) Stoppar vi in värdena på x och y i ansatsen får vi tre samband

$$\begin{aligned} p(11) &= a_0 + a_1 \cdot (-1) + a_2 \cdot (-1)^2 = 4, \\ p(12) &= a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 = 4, \\ p(13) &= a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 = 2, \end{aligned}$$

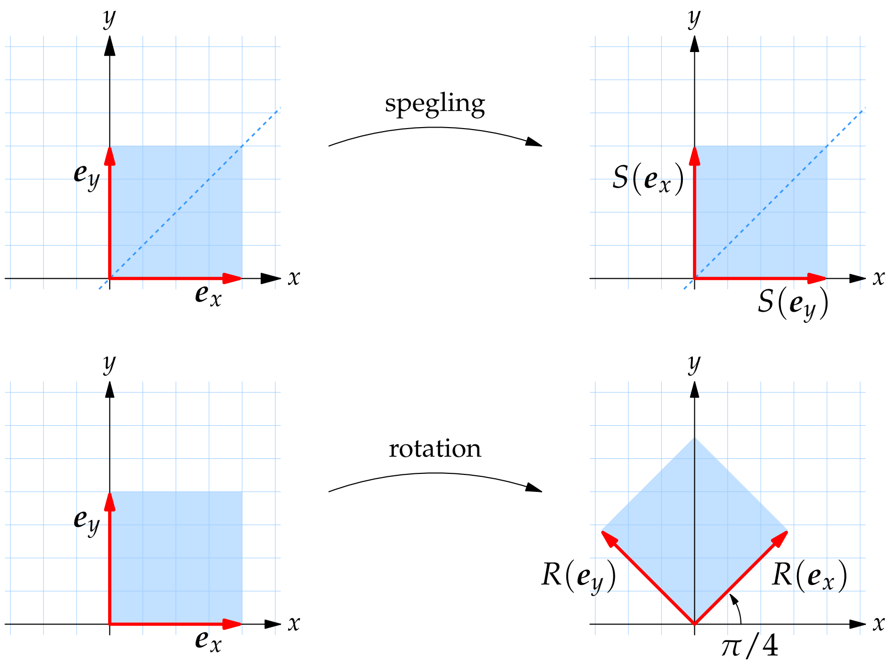
dvs. ett linjärt ekvationssystem där a_0 , a_1 och a_2 är obekanta. Vi löser systemet med gausseliminering

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Alltså är $p(x) = 4 - (x-12) - (x-12)^2$.

3. Vi bestämmer först matriserna för speglingen och rotationen genom att studera hur vektorerna $\boldsymbol{e}_x$ och $\boldsymbol{e}_y$ transformeras.



Med hjälp av lite trigonometri får vi att

$$S(1,0) = (0,1), \qquad S(0,1) = (1,0),$$
$$R(1,0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad R(0,1) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

och därmed har speglingen och rotationen matrisen

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{resp.} \qquad R = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Den sammansatta avbildningen där speglingen utförs först och därefter rotationen har matrisen

$$RS = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Antag att en av de sökta linjerna ℓ' skär linjen ℓ i punkten som svarar mot parametervärdet $t = t_0$, dvs. i punkten

$$Q = (1,1,1) + t_0(0,1,0) = (1, 1+t_0, 1).$$

Då har vi alltså att de två punkterna P och Q ligger på linjen ℓ' som därför har riktningen

$$\boldsymbol{v} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (1, 1+t_0, 1) - (2,0,1) = (-1, 1+t_0, 0).$$

Vinkeln θ mellan ℓ och ℓ' är vinkeln mellan deras riktningar. Alltså mellan $\boldsymbol{u} = (0,1,0)$ och $\boldsymbol{v} = (-1, 1+t_0, 0)$. Med hjälp av skalärprodukten har vi att

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}|\,|\boldsymbol{v}|\cos\theta \quad \Leftrightarrow \quad \cos\theta = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}|\,|\boldsymbol{v}|},$$

vilket ger att

$$\cos\theta = \frac{(0,1,0)\cdot(-1,1+t_0,0)}{|(0,1,0)|\,|(-1,1+t_0,0)|} = \frac{1+t_0}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}\,\sqrt{(-1)^2+(1+t_0)^2+0^2}} = \frac{1+t_0}{\sqrt{t_0^2+2t_0+2}}.$$

Om vi nu ska hitta det värde på t_0 som ger vinkeln $\theta = \pi/4$ eller $\theta = 3\pi/4$ får vi villkoret

$$\frac{1+t_0}{\sqrt{t_0^2+2t_0+2}} = \cos\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

som kan skrivas om till

$$\pm\sqrt{2}\,(1+t_0) = \sqrt{t_0^2+2t_0+2}.$$

Kvadrera båda led

$$2(1+t_0)^2 = t_0^2 + 2t_0 + 2$$

och efter förenkling får vi att

$$t_0^2 + 2t_0 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad t_0 = 0 \quad \text{eller} \quad t_0 = -2.$$

Det finns alltså två parametervärden som resulterar i en linje ℓ' som bildar vinkeln $\pi/4$ mot linjen ℓ.

- Då $t_0 = 0$ har den sökta linjen riktningen $\boldsymbol{v} = (-1,1,0)$ och därför parametriseringen

$$(x,y,z) = (2,0,1) + s\,(-1,1,0).$$

- Då $t_0 = -2$ har den sökta linjen riktningen $\boldsymbol{v} = (-1,-1,0)$ och därför parametriseringen

$$(x,y,z) = (2,0,1) + s\,(-1,-1,0).$$