KTH Teknikvetenskap

SF1664 Tillämpad envariabelanalys med numeriska metoder
Tentamen 1
Tisdagen den 16 oktober 2012

Skrivtid: 14-19
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Lars Filipsson

Denna tentamen består av två delar, del A och del B, med vardera 4 uppgifter. Lösningarna på de uppgifter som hör till del A bedöms på skalan Godkänt/Underkänt. Lösningarna på de uppgifter som hör till del B poängsätts med maximalt 4 poäng vardera. För godkänt betyg krävs Godkänt på samtliga uppgifter som ingår i del A samt minst 6 poäng totalt på del B.

Ett godkänt resultat på KS 1 ger automatiskt G på uppgift 1 och ett godkänt resultat på KS 2 ger automatiskt 4 poäng på uppgift 5, som då inte ska lösas.

Lösningarna ska vara väl presenterade och lätta att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade.

DEL A

(1) Funktionen $f(t) = 3e^{-t/200}$ beskriver, för $t \geq 0$, mängden i mg av ett visst radioaktivt ämne vid tidpunkten t timmar.

A. Avgör om f är inverterbar och bestäm inversen f^{-1}, om den finns.

B. Bestäm halveringstiden för ämnet.

(2) Låt $f(x) = \tan x$. Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y = f(x)$ i den punkt på kurvan som har x-koordinat $\pi/3$.

Var god vänd!

(3) Låt $f(x) = \ln(1+x^2) - \arctan x$. Avgör om f antar något största respektive minsta värde och bestäm i förekommande fall dessa.

(4) A. Beräkna med hjälp av partiell integration integralen

$$\int_0^1 xe^{-x}\,dx.$$

B. Beräkna med hjälp av substitutionen $t = \cos x$ integralen

$$\int_0^{\pi/3} \cos^3 x \sin x\,dx.$$

DEL B

(5) Låt $f(x) = x^3 + x - 3$.
A. Visa att ekvationen $f(x) = 0$ har exakt en lösning x i intervallet $1 < x < 2$.
B. Approximera lösningen med hjälp av Newton-Raphsons metod. Använd startvärdet $x_0 = 1$, gör två iterationer av metoden och svara med x_2.

(6) Låt $f(t) = Mte^{-t^2/\mu^2}$, där M och μ är positiva konstanter. Teckenstudera derivatan, beräkna gränsvärdena i $\pm\infty$ och avvgör om f har något största respektive minsta värde. Skissa sedan grafen $y = f(t)$.

(7) A. Låt $f(x)$ vara definierad genom

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{då } x \neq 0 \\ a & \text{då } x = 0 \end{cases}$$

Går det att bestämma konstanten a så att f blir kontinuerlig i origo? Om det går, gör det!

B. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{11} - 1}{x - 1}.$$

(8) En sfärisk vattenbehållare med radien 1 m fylls med vatten i en takt av 0.4 kubikmeter per timme. Hur snabbt stiger vattenytan i det ögonblick då djupet i tanken är 0.3 m?
Tips: Sambandet mellan volymen V och vattendjupet h är $V = \pi(h^2 - \dfrac{h^3}{3})$.
