KTH Teknikvetenskap

SF1661 Perspektiv på matematik
Tentamen 18 oktober 2012 kl 08.00 – 13.00

Skrivtid: 5 timmar
Inga tillåtna hjälpmedel
Examinator: Hans Thunberg

Tentamen består av nio uppgifter som var och en ger maximalt fyra poäng.

På de tre första uppgifterna, som utgör del I, är det endast möjligt att få 0, 3 eller 4 poäng. Dessa tre uppgifter kan ersättas med resultat från den löpande examinationen. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning eller godkänd seminarieserie ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väll godkänd kontrollskrivning eller seminarieserie ger 4 poäng. För att höja från den löpande examinationen från 3 poäng till 4 krävs att hela uppgiften löses.

Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

Uppgifterna 4 – 6 utgör del II, och och de tre sista uppgifterna utgör del III, som främst till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del III	6	3	-	-	-	-

För full poäng på en uppgift krävs att lösningarna är väl presenterade och lätta att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Del I

(1) Förenkla uttrycket

$$\frac{12^{3/2} \cdot 4^{-1/2}}{\sqrt{16 \cdot 27}} - \frac{\dfrac{7}{30} - \dfrac{5}{42}}{\dfrac{2}{35}}$$

så långt som möjligt.

(2) a) Visa att

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{4}{5^k} = 1 - \frac{1}{5^N}.$$

b) Var ligger felet i följande "bevis" för att $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k = -1$?

Summan av en geometrisk serie med första term a och kvot q ges av $\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \frac{a}{1-q}$. *Uttrycket* $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k$ *är en geometrisk serie med första term* $a = 1$ *och kvot* $q = 2$.
Alltså är $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k = \frac{1}{1-2} = -1$.

(3) Avgör för vilka x i intervallet $0 \leq x < 2\pi$ det gäller att

$$\cos x + \sin x \geq 1.$$

Del II

(4) Låt $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ och låt $w = \sqrt{8}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$.

Beräkna $\dfrac{z^5}{w^6}$ och skriv resultatet på så enkel form som möjligt.

(5) a) Låt $p(x)$ vara ett polynom av gradtal $n \geq 1$, och låt ω vara ett komplext tal. Bevisa att

$$(x - \omega) \text{ är en faktor i } p(x)$$

$$\Longrightarrow$$

$$x = \omega \text{ är en lösning till ekvationen } p(x) = 0.$$

(De två påståendena är i själva verket ekvivalenta, men du behöver alltså bara visa implikationen i den ena riktningen.)

(2 p)

b) Låt $q(x) = x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 8x - 60$.

Visa att $q(2i) = q(-2i) = 0$, och bestäm sedan alla övriga rötter till ekvationen $q(x) = 0$. (2 p)

(6) Lös ekvationen $\sqrt{8+\log_2(x^2)} = \log_2 x$.

Del III

(7) För vilka reella tal x gäller det att $|x+6| \leq x^2$?

(8) a) Bestäm en linjär funktion $L(h) = ah + b$ som ger goda approximationer till uttrycket $\sqrt{36+h}$ för små värden på $|h|$, och använd sedan $L(h)$ för att bestämma en approximation till $\sqrt{35}$. (2 p)

b) Motivera varför ditt val av approximerande funktion $L(h)$ ger bra approximationer för små värden på $|h|$. (2 p)

(9) Går det att finna en inverterbar funktion från de naturliga talen till de rationella talen sådan att dess invers är definierad för alla rationella tal? Förklara hur en sådan funktion kan konstureras, eller bevisa att det inte är möjligt att finna en sådan funktion.
