SF1661 Tentamen 18/11 2012
Svar & lösningsförslag

1. Vi förenklar de två deluttrycken var och en för sig.

$$\frac{12^{3/2}\cdot 4^{-1/2}}{\sqrt{16\cdot 27}} = \frac{(3\cdot 4)^{3/2}\cdot 4^{-1/2}}{\sqrt{16}\cdot\sqrt{27}} =$$

$$= \frac{3^{3/2}\cdot 4^{3/2}\cdot 4^{-1/2}}{4\cdot (3^3)^{1/2}} = \frac{3^{3/2}\cdot 4}{4\cdot 3^{3/2}} = 1$$

$$\frac{\frac{7}{30}-\frac{5}{42}}{\frac{2}{35}} = \left\{\begin{array}{l} 30 = 2\cdot 3\cdot 5 \\ 35 = 5\cdot 7 \\ 42 = 2\cdot 3\cdot 7 \end{array} \quad , \; \begin{array}{l} MGN(30,35,42) = \\ = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7 = 210 \end{array}\right\}$$

$$= \frac{\frac{7\cdot 7}{210}-\frac{5\cdot 5}{210}}{\frac{6\cdot 2}{210}} = \frac{\frac{49-25}{210}\cdot 210}{\frac{12}{210}\cdot 210} = \frac{24}{12} = 2$$

Alltså är

$$\frac{12^{3/2}\cdot 4^{-1/2}}{\sqrt{16\cdot 27}} - \frac{\frac{7}{30}-\frac{5}{42}}{\frac{2}{32}} = 1-2 = -1$$

Svar: -1

(2) a)

Sätt $S=\sum_{k=1}^{N}\frac{4}{5^k}$. S är en geometrisk summa med kvot 1/5. Bilda

$$\frac{1}{5}S=\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{N}\frac{4}{5^k}=\sum_{k=1}^{N}\frac{4}{5^{k+1}}.$$

Då är

$$S-\frac{1}{5}S=\left(\frac{4}{5}+\frac{4}{5^2}+\cdots\frac{4}{5^N}\right)-\left(\frac{4}{5^2}+\frac{4}{5^3}+\cdots+\frac{4}{5^{N+1}}\right)$$

$$=\frac{4}{5}-\frac{4}{5^{N+1}}$$

$\Leftrightarrow$

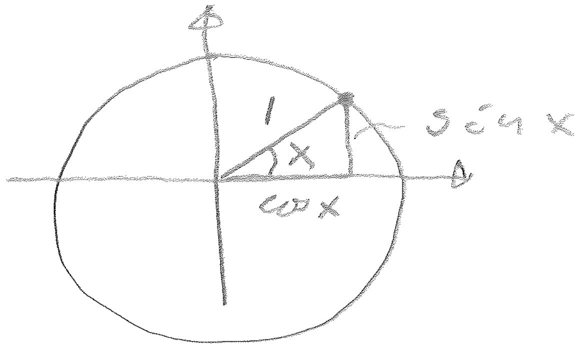
$$\frac{4}{5}S=\frac{4}{5}-\frac{4}{5^{N+1}} \Leftrightarrow S=1-\frac{1}{5^N} \quad \text{V.S.B.}$$

b) Formeln $\sum_{k=0}^{\infty}aq^k=\frac{a}{1-q}$ för geometriska serier gäller om och endast om $|q|<1$. Om $|q|\geq 1$ är serien divergent, dvs $\sum_{k=0}^{N}aq^k$ närmar sig EJ något ändligt gränsvärde då antalet termer $N\to\infty$.

Alltså gäller ej formeln för $q=2$

③ Om $x=0$ gäller
$\cos x+\sin x=\cos 0+\sin 0=1+0=1$
Om $x=\pi/2$ gäller
$\cos x+\sin x=\cos \pi/2+\sin \pi/2=0+1=1$

Om $0<x<\pi/2$ har vi följande situation



Av figur framgår att $\cos x+\sin x>1$, (ty summan av två sidors längder i en triangel är alltid längre än den tredje sidan.)

Om $\pi/2<x<2\pi$ är minst en av termerna cos x eller sin x negativ, och den andra ≤ 1. Det följer att deras summa $\cos x+\sin x<1$

Svar: $0\leq x\leq \frac{\pi}{2}$

(4.)

$$z^5 = 4^5\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^5$$
$$= 4^5\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$w^6 = (\sqrt{8})^6\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)^6$$
$$= 2^{\frac{3}{2}\cdot 6}\left(\cos\frac{6\pi}{8} + i\sin\frac{6\pi}{8}\right)$$
$$= 2^9\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\frac{z^5}{w^6} = \frac{2^{10}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)}{2^9\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}$$
$$= 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}\right)\right)$$
$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i$$

<u>SVAR</u>: $2i$

5. a)

$(x-\omega)$ är en faktor i $p(x)$ betyder att $p(x) = (x-\omega)\,h(x)$, där $h(x)$ är ett polynom.

$$p(x) = (x-\omega)\,h(x) \Rightarrow p(\omega) = \underbrace{(\omega-\omega)}_{=0}\,h(\omega) = 0,$$

dvs $x=\omega$ är en lösning till $p(x)=0$.

b) Låt $q(x) = x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 8x - 60$. Då är

$$q(2i) = (2i)^4 + 2(2i)^3 - 11(2i)^2 + 8\cdot 2i - 60$$
$$= 16i^4 + 2\cdot 8i^3 - 11\cdot 4i^2 + 16i - 60$$
$$= 16 - 16i + 44 + 16i - 60 = 0$$

och

$$q(-2i) = (-2i)^4 + 2(-2i)^3 - 11(-2i)^2 + 8(-2i) - 60$$
$$= 16 + 16i + 44 - 16i - 60 = 0$$

Alltså är $(x-2i)$ och $(x+2i)$ faktorer i q enligt faktorsatsen, dvs

$$q(x) = (x-2i)(x+2i)\,h(x) = (x^2+4)\,h(x)$$

för något polynom h, som bestäms genom division

$$h(x) = \frac{q(x)}{x^2+4} = x^2+2x-15$$

$$\begin{array}{r|l} & x^2 + 2x - 15 \\ \hline x^2+4 & x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 8x - 60 \\ & -(x^4 + 4x^2) \\ \hline & 2x^3 - 15x^2 + 8x - 60 \\ & -(2x^3 + 8x) \\ \hline & -15x^2 - 60 \\ & -(-15x^2 - 60) \\ \hline & 0 \end{array}$$

Övrig rötter ges av

$h(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 16 \Leftrightarrow x = -1 \pm 4$

$\boxed{\text{SVAR: } x=-5,\ x=3}$

(6.) $\sqrt{8+\log_2(x^2)} = \log_2 x$

$\Rightarrow \quad 8 + \log_2 x^2 = (\log_2 x)^2$

$\Leftrightarrow \quad 8 + 2\log_2 x = (\log_2 x)^2.$

Sätt nu $t = \log_2 x$ ($\Leftrightarrow x = 2^t$).
Vi får då ekvationen

$8 + 2t = t^2 \Leftrightarrow$

$t^2 - 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow$

$(t-1)^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow$

$(t-1)^2 = 9 \Leftrightarrow$

$t = 1 \pm 3 \Leftrightarrow t = -2$, eller $t = 4$

$t = 4$ ger $x = 2^4 = 16$

$t = -2$ ger $x = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

Prövning: $x = 2^4$

$V.L.(2^4) = \sqrt{8 + \log_2 (2^4)^2} = \sqrt{8 + \log_2 2^8} = \sqrt{8+8} = 4$

$H.L.(2^4) = \log_2 2^4 = 4 = V.L.(2^4)$

$x = \frac{1}{4}$

$V.L.(\frac{1}{4}) = \sqrt{8 + \log_2 (2^{-2})^2} = \sqrt{8 + \log_2 2^{-4}} = \sqrt{8-4} = 2$

$H.L.(\frac{1}{4}) = \log_2 2^{-2} = -2 \neq V.L.(\frac{1}{4})$

$\boxed{\text{Svar: } x = 16}$

(7.) För vilka $x \in \mathbb{R}$ gäller att $|x+6| \le x^2$?

Antag först att $x \geq -6$. Då är $x+6 \geq 0$ och $|x+6| = x+6$. Given olikhet är då ekvivalent med

$$x+6 \le x^2 \iff x^2-x-6 \geq 0.$$

Vi bestämmer nollställen till V.L.:

$$x^2-x-6=0 \iff x = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}+\tfrac{24}{4}} = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{5}{2}$$

$\iff x = 3$ eller $x = -2$.

Faktorsatsen ger $x^2-x-6 = (x-3)(x+2)$ så

$$x^2-x-6 \geq 0 \iff (x-3)(x+2) \geq 0$$

$\iff$ $(x-3)$ och $(x+2)$ har samma tecken eller är $=0$

$\iff$ $x \geq 3$ eller $x \le -2$

Eftersom detta fåtts under antagandet $x \geq -6$ fås lösningintervallen $[-6, -2]$ och $[3, \infty)$.

Antag nu att $x < -6$. Då är $x+6 < 0$ och $|x+6| = -(x+6)$. Given olikhet är då ekvivalent med $-x-6 \le x^2 \iff x^2+x+6 \geq 0$

$\iff (x+\tfrac{1}{2})^2 + 6 - \tfrac{1}{4} \geq 0$ som är sant för alla x, och speciellt för alla $x < -6$, dvs vi får lösningsintervallet $(-\infty, -6)$.

Sammantaget ger de två fallen att

$|x+6| \le x^2$ om $\underline{x \le -2 \text{ eller } x \geq 3}$:SVAR

(8.) a) Låt $f(x) = \sqrt{x}$. Då är

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f(36) = 6 \text{ och } f'(36) = \frac{1}{12}.$$

Formeln för linjär approximation ger

$$\sqrt{36+h} = f(36+h) \approx f(36) + f'(36) \cdot h$$

$$= 6 + \frac{1}{12} h$$

Speciellt är

$$\sqrt{35} = \sqrt{36-1} \approx 6 + \frac{1}{12}(-1) = \frac{71}{12}.$$

b) Formeln för linjär approximation

$$f(x+h) \approx f(x) + h \cdot f(x) \quad \text{för } |h| \text{ litet}$$

är en konsekvens av derivatans definition.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ innebär att

för $|h|$ litet är $f'(x) \approx \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$\iff f(x+h) - f(x) \approx h f'(x)$$

$$\iff f(x+h) \approx f(x) + h f'(x)$$

SVAR: a) $\sqrt{36+h} \approx 6 + \frac{1}{12} h$, $\sqrt{35} \approx \frac{71}{12}$.

(9.) Ja, det finns inverterbara funktioner $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ s.a. $f^{-1}: \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$.

(Det är precis detsamma som att säga att de rationella talen $\mathbb{Q}$ är uppräkneliga.)

f kan konstrueras enligt följande. Lista alla tal i $\mathbb{Q}$ i en oändlig tabell som nedan, och numrera dem sedan med talen i $\mathbb{N}$ enligt den väg som pilarna pekar ut. Hoppa över de rationella tal som numrerats tidigare i proceduren.
Alla tal i $\mathbb{Q}$ nås precis en gång, och får då ett "eget" nummer.

0	1	2	3	4	5	......
-1	-2	-3	-4	-5	-6	......
$1/2$	$2/2$	$3/2$	$4/2$	$5/2$	$6/2$	....
$-1/2$	$-2/2$	$-3/2$	$-4/2$	$-5/2$	$-6/2$	
$1/3$	$2/3$	$3/3$	$4/3$	$5/3$	$6/3$	....
$-1/3$	$-2/3$	$-3/3$	$-4/3$	$-5/3$	$-6/3$	......
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Exempelvis blir då

$f(0) = 0$ $\qquad$ $f(5) = 2$

$f(1) = 1$ $\qquad$ $f(6) = 3$

$f(2) = -1$ $\qquad$ $f(7) = -3$

$f(3) = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $f(8) = -\frac{1}{2}$ $\qquad$ (vi hoppar över $2/2$, ty $2/2 = 1$ som redan numrerats $f(1) = 1$)

$f(4) = -2$ $\qquad$ $f(9) = \frac{1}{3}$