



KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2012-10-19

DEL A

1. En kulle beskrivs approximativt av funktionen

$$h(x, y) = \frac{5}{1 + 3x^2 + y^2}$$

i lämpliga enheter där $h(x, y)$ är höjden. Om du befinner dig i punkten $(1, 1, 1)$ på kullen, i vilken riktning, i xy -planet, skall du gå för att gå brantast nedåt? **(4 p)**

Lösningsförslag. Vi söker $-$ grad $h(1, 1)$,

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{30x}{(1 + 3x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{10y}{(1 + 3x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(1, 1) = -\frac{30}{25} = -\frac{6}{5},$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(1, 1) = -\frac{10}{25} = -\frac{2}{5}.$$

Det lutar brantast i den riktning som ges av $(\frac{6}{5}, \frac{2}{5})$.

Svar. I den riktning som ges av $(\frac{6}{5}, \frac{2}{5})$.

2. Bestäm integralen av $f(x, y) = x^2y$ över triangeln med hörn i $(0, 2)$, $(4, 0)$ och $(-4, 0)$.

(4 p)

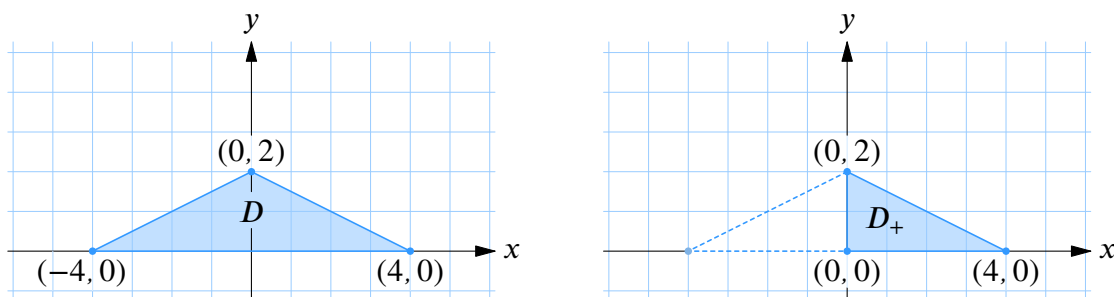
Lösningförslag. Eftersom funktionen f är en jämn funktion i x -led, dvs.

$$f(-x, y) = f(x, y),$$

och triangeln är symmetrisk kring y -axeln kan dubbelintegralen av f över triangeln skrivas som

$$\iint_D f(x, y) dx dy = 2 \iint_{D_+} f(x, y) dx dy$$

där D är triangeln och D_+ den triangelhalva till höger om y -axeln.



Därmed är

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= 2 \int_0^4 \left(\int_0^{2-x/2} x^2 y dy \right) dx \\ &= 2 \int_0^4 x^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{2-x/2} dx \\ &= 2 \int_0^4 x^2 \cdot \frac{1}{2} \left(2 - \frac{x}{2} \right)^2 dx \\ &= 2 \int_0^4 \left(2x^2 - x^3 + \frac{1}{8}x^4 \right) dx \\ &= 2 \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{40} \right]_0^4 \\ &= \frac{128}{15}. \end{aligned}$$

Svar. $\frac{128}{15}$

3. Ett vektorfält $F = (P, Q)$ i området $x, y > 0$ i planet ges av formlerna

$$P(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \quad \text{och} \quad Q(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2} + \frac{ax}{y^2}.$$

För vilka värden på parametern a är vektorfältet konservativt? Bestäm en potential till vektorfältet för sådana a . **(4 p)**

Lösningförslag. Eftersom fältet F är definierat på ett enkelt sammanhängande område så har det en potential om och endast om

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Vi beräknar

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} &= -\frac{2y}{(x^2 + y^2)^2} \cdot 2x + \frac{a}{y^2}, \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= -\frac{2x}{(x^2 + y^2)^2} \cdot 2y + \frac{1}{y^2}, \end{aligned}$$

och ser att fältet är konservativt bara om $a = 1$. En potential U i detta fall uppfyller

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{2x}{x^2 + y^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}, \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{2y}{x^2 + y^2} + \frac{x}{y^2}. \end{aligned}$$

Den första av dessa ekvationer ger

$$U(x, y) = \ln(x^2 + y^2) - \ln x - \frac{x}{y} + V(y)$$

för någon funktion $V(y)$. Den andra ekvationen ger sedan

$$\frac{2y}{x^2 + y^2} + \frac{x}{y^2} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2} + \frac{x}{y^2} + V'(y)$$

eller $V'(y) = 0$. En lösning på denna ekvation är $V(y) \equiv 0$, och alltså är

$$U(x, y) = \ln(x^2 + y^2) - \ln x - \frac{x}{y}$$

en potential. (Alla andra potentialer fås genom att lägga till en konstant.)

Svar. Fältet är konservativt om och endast om $a = 1$. En potential är

$$U(x, y) = \ln(x^2 + y^2) - \ln x - \frac{x}{y}.$$

DEL B

4. Beräkna arbetet som en partikel utför då den genomlöper kurvan Γ given av $4x^2 + y^2 = 4$ ett varv moturs i kraftfältet $\mathbf{F} = (y + 3x, 2y - x)$. **(4 p)**

Lösningförslag.

Metod 1 (Greens formel)

Arbetet ges av

$$\begin{aligned} W &= \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \{ \text{Greens formel} \} \\ &= \iint_{\{4x^2+y^2 \leq 4\}} \left(\frac{\partial}{\partial x}(2y - x) - \frac{\partial}{\partial y}(y + 3x) \right) dx dy \\ &= -2 \iint_{\{4x^2+y^2 \leq 4\}} dx dy \\ &= -2 \text{ area} \left(\text{ellipsen } \{x^2 + y^2/4 \leq 1\} \right) \\ &= -2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot 2 = -4\pi. \end{aligned}$$

Metod 2 (Parametrisera Γ)

Kurvintegralen kan beräknas med

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot d\mathbf{r}(t)$$

där $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ är en parametrisering av Γ och $t: a \rightarrow b$ är parameterområdet.

Kurvan Γ är en ellips centrerad kring origo med halvaxlar 1 och 2 i x - resp. y -riktningen och kan parametriseras som

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, 2 \sin t), \quad \text{för } t: 0 \rightarrow 2\pi,$$

och då är

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) &= (2 \sin t + 3 \cos t, 4 \sin t - \cos t), \\ d\mathbf{r}(t) &= \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} dt = (-\sin t, 2 \cos t) dt. \end{aligned}$$

Arbetet blir

$$\begin{aligned} W &= \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} (2 \sin t + 3 \cos t, 4 \sin t - \cos t) \cdot (-\sin t, 2 \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-2 \sin^2 t - 3 \sin t \cos t + \cos t \sin t - 2 \cos^2 t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-2) dt + 5 \int_0^{2\pi} \cos t \sin t dt \\ &= -4\pi + 0 = -4\pi. \end{aligned}$$

Svar. -4π

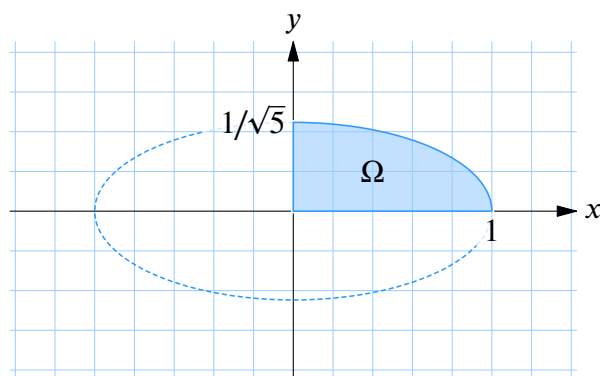
5. Bestäm det största och minsta värdet av funktionen

$$f(x, y) = yx^2 + 5y^3$$

på området $\Omega = \{(x, y) : x^2 + 5y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.

(4 p)

Lösningförslag. Funktionen f är ett polynom och är därmed en kontinuerlig funktion. Olikheten $x^2 + 5y^2 \leq 1$ definierar en ellipsskiva centrerad kring origo med halvaxlar 1 och $1/\sqrt{5}$ i x - resp. y -riktningen. Området Ω , som är den del av ellipsskivan som finns i första kvadranten, är därför både en begränsad och sluten mängd, dvs. en kompakt mängd.



Eftersom f är kontinuerlig och Ω är en kompakt mängd så vet vi att f antar ett största och ett minsta värde på området Ω .

Dessa värden antar f i följande typer av punkter:

- (a) inre stationära punkter,
- (b) lokala max- och minpunkter på randen

Vi undersöker dessa fall.

- (a) I en inre stationär punkt är

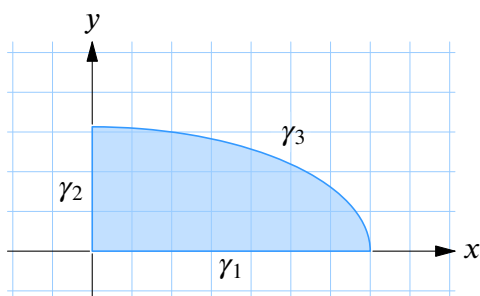
$$\text{grad } f(x, y) = (2xy, x^2 + 15y^2) = (0, 0),$$

vilket ger oss ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 2xy &= 0, \\ x^2 + 15y^2 &= 0. \end{aligned}$$

Den andra ekvationen är bara uppfylld när $x = y = 0$, och eftersom den första ekvationen då också är uppfylld så är $(0, 0)$ den enda inre stationära punkten och där är $f(0, 0) = 0$.

- (b) Randen till området består av tre kurvstycken: γ_1 (intervallet $[0, 1]$ på x -axeln), γ_2 (intervallet $[0, 1/\sqrt{5}]$ på y -axeln) och γ_3 (kvartsellipsen från $(0, 1/\sqrt{5})$ till $(1, 0)$).



Vi undersöker respektive kurvdel:

- På γ_1 är $f \equiv 0$.
- Linjestycket γ_2 kan vi parametrisera som $(x, y) = (0, t)$ där $0 \leq t \leq 1/\sqrt{5}$. Problemet kan då formuleras som

$$\text{maximera } f(t) = 5t^3 \quad \text{för } 0 \leq t \leq 1/\sqrt{5}.$$

Detta polynom har max/min antingen där $f'(t) = 15t^2$ är noll (dvs. $t = 0$) eller i ändpunkterna $t = 0$ och $t = 1/\sqrt{5}$.

I dessa punkter är $f(0) = 0$ och $f(1/\sqrt{5}) = 1/\sqrt{5}$.

- Vi parametriserar ellipsstycket γ_3 som

$$(x, y) = \left(\cos t, \frac{1}{\sqrt{5}} \sin t \right), \quad \text{där } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

och optimeringsproblemet på denna kurvdel blir

$$\text{maximera } f(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sin t \quad \text{för } 0 \leq t \leq \pi/2.$$

Max och min antas antingen där $f'(t) = (\cos t)/\sqrt{5}$ är noll (dvs. $t = \pi/2$) eller i ändpunkterna $t = 0$ och $t = \pi/2$.

I dessa punkter är $f(0) = 0$ och $f(\pi/2) = 1/\sqrt{5}$

Det största och minsta värdet av f i området Ω är alltså $1/\sqrt{5}$ resp. 0.

Svar. Största värde är $1/\sqrt{5}$ och minsta värde är 0.

6. Bestäm flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (xz, yz, z(1 - z))$ genom ytan S där S är cylinderytan $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 2\}$. (4 p)

Lösningförslag. Låt \mathbf{N} vara den utåtpekande normalen. Då ges flödet av

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(s, t)) \cdot (\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t) dx dt$$

om $(s, t) \mapsto \mathbf{r}(s, t)$ är en parametrisering av S och D är parameterområdet för (s, t) .

Vi parametriserar S med

$$\mathbf{r}(s, t) = (\cos \theta, \sin \theta, z), \quad \text{där } D: 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 2,$$

och då är

$$\mathbf{r}'_\theta(\theta, z) = (-\sin \theta, \cos \theta, 0),$$

$$\mathbf{r}'_z(\theta, z) = (0, 0, 1),$$

$$\mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_z = (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \times (0, 0, 1) = (\cos \theta, \sin \theta, 0).$$

Flödet blir

$$\begin{aligned} & \iint_D (z \cos \theta, z \sin \theta, z(1 - z)) \cdot (\cos \theta, \sin \theta, 0) d\theta dz \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 (z \cos^2 \theta + z \sin^2 \theta) dz \right) d\theta \\ &= 2\pi \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^2 = 4\pi. \end{aligned}$$

Anm. Ett alternativt lösningssätt är att sluta ytan med plana cirkelskivor och använda Gauss sats. Flödet genom botten är 0 och toppen är -2π .

Svar. 4π

DEL C

7. Masstätheten för en gas ges av

$$\rho(x, y, z) = \frac{c}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}},$$

där c är en fysikalisk konstant. Gasen befinner sig i rummet utanför ett klot som ges av $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, dvs. i mängden $K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\}$. Beräkna gasens totala massa uttryckt i c . **(4 p)**

Lösningförslag. Massan ges av den generaliserade integralen

$$\begin{aligned} M &= \iiint_K \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \\ &= c \iiint_K \frac{dx \, dy \, dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \\ &= \{ \text{Rymdpolära koordinater} \} \\ &= c \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^\infty r^2 \cdot \frac{1}{(r^2)^{5/2}} \, dr \\ &= 4\pi c \int_1^\infty \frac{dr}{r^3} \\ &= 4\pi c \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2r^2} \right]_1^R \\ &= 2\pi c. \end{aligned}$$

Svar. $2\pi c$

8. Betrakta ekvationen

$$x + y + z = \sin xyz \quad (*)$$

- a) Visa att genom ekvationen (*) definieras en funktion f i en omgivning av $(x, y) = (0, 0)$, så att (*) är ekvivalent med $z = f(x, y)$ i en omgivning $(0, 0, 0)$. **(2 p)**
- b) Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $z = f(x, y)$ i origo. **(2 p)**

Lösningsförslag.

- a) Definiera funktionen
- $F(x, y, z)$
- genom

$$F(x, y, z) = x + y + z - \sin xyz.$$

Då beskriver ekvationen (*) nivåytan $F(x, y, z) = 0$. Funktionen F är av klass C^1 och punkten $(0, 0, 0)$ ligger på nivåytan (*). Vidare är

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial z}(0, 0, 0) &= 1 - xy \cos xyz \Big|_{(x,y,z)=(0,0,0)} \\ &= 1 \neq 0, \end{aligned}$$

så implicita funktionssatsen garanterar att det finns en funktion $f(x, y)$ så att nivåytan är lika med grafen $z = f(x, y)$ nära $(0, 0, 0)$.

- b) Eftersom ytan
- $z = f(x, y)$
- är lika med nivåytan
- $F(x, y, z) = 0$
- nära origo så ges dess normalvektor i origo av

$$\begin{aligned} \text{grad } F(0, 0, 0) &= \left(1 - yz \cos xyz, 1 - xz \cos xyz, \right. \\ &\quad \left. 1 - xy \cos xyz \right) \Big|_{(x,y,z)=(0,0,0)} \\ &= (1, 1, 1). \end{aligned}$$

Tangentplanet i origo har alltså normalvektorn $(1, 1, 1)$ och ges av ekvationen

$$(1, 1, 1) \cdot (x, y, z) = x + y + z = 0.$$

Svar. b) $x + y + z = 0$

9. Ett elektriskt laddat skal S utgörs av den del av halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $y \geq 0$ som begränsas av planen $z = 1/\sqrt{2}$ och $z = -1/\sqrt{2}$. Laddningstätheten ges av

$$q(x, y, z) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Beräkna skalets totala laddning

$$Q = \iint_S q(x, y, z) dS. \quad (4 \text{ p})$$

Lösningförslag. Halvsfärens ekvation kan skrivas som $y = \sqrt{1 - (x^2 + z^2)}$, dvs. som en parameterytan med x och z som parametrar,

$$(x, z) \mapsto (x, \sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z).$$

Då blir ytans arealelement

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2} dx dz \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}}\right)^2 + \left(\frac{-z}{\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}}\right)^2} dx dz \\ &= \frac{dx dz}{\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}}. \end{aligned}$$

Ytans projektion D i xz -planet är området som i x -led begränsas av cirkelbågarna $x = \pm\sqrt{1 - z^2}$ och i z -led av linjerna $z = \pm 1/\sqrt{2}$. Vi observerar att $x^2 + y^2 = 1 - z^2$ på S och därför är

$$\begin{aligned} Q &= \iint_S \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dS \\ &= \iint_D \frac{dx dz}{\sqrt{1 - z^2}} \\ &= \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \left(\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} dx \right) \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} \\ &= 2 \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} dz \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Anm. Ett alternativ är att använda sfäriska koordinater.

Svar. $2\sqrt{2}$
