SF1663 Tillämpad linjär algebra med numeriska metoder
Kortfattat Lösningsförslag till Tentamen 2012-10-19

————- DEL A ————-

1. Betrakta matrisekvationen

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

där matrisen X är obekant.

A. Vilken storlek (dimension) har X?
B. Lös matrisekvationen.
C. Skriv ett matlabprogram som löser ekvationen och skriver ut resultatet.

Lösning:
A. För att multiplikationen i vänsterledet ska vara definierad och ha som resultat en matris av storlek 3×2 som i högerledet så måste X ha 3 rader och 2 kolonner. Storleken är alltså 3×2

B. Vi inverterar först 3×3-matrisen i västerledet med hjälp av Gausselimination. Om vi kallar den matrisen för A och enhetsmatrisen av storlek 3×3 för E, så har vi proceduren $(A|E) \sim (E|A^{-1})$ Vi får

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & -2 \end{pmatrix},$$

där vi på punkternas plats har utfört elementära radoperationer. Den sökta inversen är alltså

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Om vi multiplicerar matrisekvationen i uppgiften från vänster med denna matris får vi

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ -6 & -7 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}.$$

C. Matlabprogram:

```
A=[-2 0 -1; 2 1 2; 1 2 2];
B=[2 1; 0 3; -1 2];
X=A\B
```

2. Parallellogrammet i figuren har hörnpunkter i $P = (2,1,2)$, $Q = (0,3,2)$ och $R = (1,-1,1)$.

   A. Bestäm koordinaterna för hörnpunkten S.
   B. Bestäm parallellogrammets area.

Lösning.
A. Koordinaterna för S ges av $(1,-1,1) + (0,3,2) - (2,1,2) = (-1,1,1)$

B. Parallellogrammet spänns upp av vektorerna $\overline{PQ}$ och $\overline{PR}$. Arean ges av $|\overline{PQ} \times \overline{PR}|$. Vi får alltså

$$\text{Arean} = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{44}.$$

3. Givet planet $2x - y + 3z = 1$.

   A. Avgör om planet innehåller punkten $(1,-1,-1)$.
   B. Bestäm en normalvektor för planet.
   C. Bestäm en vektor som är parallell med planet.

A. Eftersom $2 \cdot 1 - (-1) + 3 \cdot (-1) \neq 1$ så innehåller planet inte punkten $(1,-1,-1)$.

B. Vi läser av en normalvektor direkt från planets ekvation och får att

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

är en normalvektor till planet.

C. Vilken vektor som helst som är ortgonal mot normalvektorn är parallell med planet. T ex är vektorn

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

parallell med planet eftersom

$$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}=0.$$

4. Två linjära avbildningar S och T har matriserna

$$A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & -3\\-3 & -4\end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad B=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 1\\2 & 1\end{pmatrix}.$$

A. Vilken matris har den sammansatta avbildningen där S utförs först och därefter T?
B. Bestäm en vektor $\mathbf{u}$ sådan att $T(\mathbf{u})=(1,2)$

Lösning. A. Den sammansatta avbildningens matris är produkten av de ingående avbildningarnas matriser. Eftersom S ska utföras först blir den sammansatta avbildningens matris:

$$BA=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}3 & 1\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -3\\-3 & -4\end{pmatrix}=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}9 & -13\\5 & -10\end{pmatrix}.$$

B. Vi har att

$$T(\mathbf{u})=T(u_1,u_2)=(1,2)\Longleftrightarrow\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 1\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

Vi löser ekvationssystemet med Gauss-elimination och får

$$\begin{pmatrix}3/5 & 1/5 & 1\\2/5 & 1/5 & 2\end{pmatrix}\sim\cdots\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -5\\0 & 1 & 20\end{pmatrix}.$$

Den sökta vektorn är alltså

$$\mathbf{u}=\begin{pmatrix}-5\\20\end{pmatrix}.$$

5. För vilka värden på konstanten a har ekvationssystemet

$$\begin{cases}x+3y-az=1\\ax+4y-z=0\\x+4y-4z=2\end{cases}$$

exakt en lösning?

Lösning. Ekvationssystemet har exakt en lösning om och endast om determinanten av koefficientmatrisen är nollskild. Vi får

$$\det\begin{pmatrix}1 & 3 & -a\\ a & 4 & -1\\ 1 & 4 & -4\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & 3 & -a\\ 0 & 4-3a & a^2-1\\ 0 & 1 & a-4\end{pmatrix} = -4a^2+16a-15,$$

som är $\neq 0$ om och endast om $a \neq 3/2$ och $a \neq 5/2$.

Ekvationssystemet har alltså exakt en lösning för alla a utom $3/2$ och $5/2$.

6. Bestäm den funktion på formen $p(x) = c_1 + c_2x^2$ som bäst anpassar till följande värden

x	-1	1	2	2
y	1	2	3	4

i minstakvadratmening.

Lösning. Vi får följande överbestämda ekvationssystem

$$\begin{cases} c_1 + c_2 \cdot (-1)^2 = 1\\ c_1 + c_2 \cdot 1^2 = 2\\ c_1 + c_2 2^2 = 3\\ c_1 + c_2 2^2 = 4 \end{cases},$$

vilket kan skrivas

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\\ 1 & 4\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\\ 4\end{pmatrix}.$$

Om vi kallar koefficientmatrisen för A, $(c_1, c_2)^T$ för $\mathbf{x}$ och högerledet för $\mathbf{b}$ så blir normalekvationen $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$:

$$\begin{pmatrix}4 & 10\\ 10 & 34\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\ 31\end{pmatrix}.$$

Vi löser ekvationssystemet med Gausselimination och får $c_1 = 5/6$ och $c_2 = 2/3$. Den sökta funktionen är därför

$$p(x) = \frac{5}{6} + \frac{2}{3}x^2.$$

7. Bestäm två olika vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ som båda avbildas på vektorn $\mathbf{w} = (2, -2, 1)$ under en ortogonal projektion på linjen $(x, y, z) = t(2, -2, 1)$.

Lösning. Vi observerar först att $\mathbf{w}$ är riktningsvektor för den linje på vilken den ortogonala projektionen sker. Projektionsformeln ger att den ortogonala projektionen av en vektor $\mathbf{z}$ på vektorn $\mathbf{w}$ ges av

$$\frac{\mathbf{z}\cdot\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|^2}\mathbf{w}.$$

Med $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)$ och $\mathbf{w} = (2, -2, 1)$ får vi att $\mathbf{z}$ avbildas på $\mathbf{w}$ under den aktuella ortogonala projektionen om och endast om

$$\frac{2z_1 - 2z_2 + z_3}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Det finns många vektorer $\mathbf{z}$ som uppfyller detta samband. Vi kan t ex ta

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Så $\mathbf{u} = (1, 1, 9)$ och $\mathbf{v} = (4, 0, 1)$ är två olika vektorer som båda projiceras på $\mathbf{w}$ under en ortogonal projektion på linjen $(x, y, z) = t(2, -2, 1)$.

8. Bestäm en linje (i parameterform) som skär båda linjerna

$$\begin{aligned} \ell_1 &: \ (x, y, z) = (-1, 0, 1) + t(1, 2, 1) \\ \ell_2 &: \ (x, y, z) = (2, 1, 1) + t(0, 1, 2) \end{aligned}$$

under rät vinkel.

Lösning. En vektor som är ortogonal mot både ℓ_1 och ℓ_2 är

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Denna vektor kan vi ta som riktningsvektor för den sökta linjen – då blir den vinkelrät mot de båda andra. Vår linje måste alltså få en ekvation på formen $(x, y, z) = (a, b, c) + t(3, -2, 1)$ för några tal a, b, c. Nu måste bestämma a, b, c så att vår linje också skär de andra båda linjerna.

Vi kan utgå från en punkt på ℓ_1. Denna punkt har koordinater $(-1+r, 2r, 1+r)$ för något värde på parametern r. Om vi startar i denna punkt och går i den riktning som anges av $\mathbf{v}$ hoppas vi komma fram till någon punkt på ℓ_2. Denna punkt har koordinater $(2, 1+s, 1+2s)$ för något värde på parametern s (observera att vi måste använda olika parametrar för de olika linjerna). Villkoret för att vår linje ska skära de båda andra linjerna blir alltså att:

$$(-1+r, 2r, 1+r) + t(3,-2,1) = (2, 1+s, 1+2s)$$

ska vara uppfyllt för något värde på parametrarna r, s och t. Vi får ekvationssystemet

$$\begin{cases} -1+r+3t = 2 \\ 2r-2t = 1+s \\ 1+r+t = 1+2s \end{cases},$$

som också kan skrivas

$$\begin{cases} r+3t = 3 \\ 2r-s-2t = 1 \\ r-2s+t = 0 \end{cases}.$$

Vi löser detta med Gausselimination och får att det har en unik lösning $r = 3/2$, $s = 1$, $t = 1/2$.

Den sökta linjens ekvation blir därför $(x, y, z) = (1/2, 3, 5/2)+t(3, -2, 1)$. Denna linje är ortogonal mot de båda givna linjerna och skär den första i punkten $(1/2, 3, 5/2)$ och den andra i punkten $(2, 2, 3)$.