Envariabelanalys

Tomas Ekholm

Institutionen för matematik

Innehåll

1 Att läsa innan vi börjar

1.1 Varför läsa matematik?

Matematisk teori är ett ypperligt tillfälle att lära sig att analysera, resonera, argumentera, strukturera och ordna. Matematik bygger på abstraktion och den som lär sig att lätt ta till sig abstraktion besitter en enorm styrka i analytiska sammanhang.

Här följer en lista med intressanta länkar för den som läser denna text elektroniskt:

- Matematik vägen till finansbranschen

1.2 Definitioner, satser och bevis

Matematik struktureras i huvudsak med hjälp av definitioner, satser och bevis. En **definition** är ett införande av ett begrepp. Följande är ett exempel på en definition

Definition 1.1. Ett heltal a är **jämnt** om det finns ett heltal b sådant att $a = 2b$.

En sats är ett påstående och ett bevis av en sats är ett logisk stärkt resonemang som visar att satsen är sann. Exempelvis

Sats 1.2. *Produkten av två jämna tal är ett jämnt tal.*

Bevis: Låt a_1 och a_2 vara två jämna tal, d.v.s. enligt definitionen finns det tal b_1 och b_2 sådana att $a_1 = 2b_1$ och $a_2 = 2b_2$. Produkten kan skrivas som

$$a_1a_2 = (2b_1)(2b_2) = 4b_1b_2 = 2c,$$

där $c = 2b_1b_2$. Eftersom c är ett heltal är produkten enligt definitionen ett jämnt tal. ■

1.3 Mängder

Låt oss börja med att titta på ett av de mest grundläggande begreppen i matematiken, nämligen mängder. En **mängd** är en samling objekt, som till exempel tal, och dessa objekt kallar vi för **element** i mängden. Det enklaste sättet att beskriva en mängd är att räkna upp dess element. Vi använder oss då av en kommaseparerad uppräkning av elementen innanför symbolerna $\{\}$. Ett sådant exempel är mängden

$$A = \{1, 3, a, 7, Pelle\}.$$

Detta betyder att A är en mängd som innehåller elementen $1, 3, a, 7$ och $Pelle$. Vi säger att A är mängden av $1, 3, a, 7$ och $Pelle$.

Om A är en mängd och x är ett element i mängden A så skriver vi $x \in A$ och säger att x **tillhör** A. Exempelvis gäller att $3 \in \{1, 3, 7\}$ och $b \in \{a, b, 10, 3\}$. Att ett element x inte tillhör mängden A skrivs $x \notin A$. Den **tomma mängden** innehåller ingenting och betecknas $\varnothing$.

Ett annat sätt att beskriva en mängd är att skriva

$$\{x \in D : \text{villkor på } x\}. \tag{1.1}$$

Med detta menar man mängden av alla element i D som uppfyller de givna villkoren. Vi tar oss även friheten att utelämna mängden D om den är given utifrån villkoren på x. Som exempel tar vi

$$B = \{n \in \{1, 2, 3, \ldots\} : n \text{ är udda}\} = \{n : n \text{ är ett positivt udda heltal}\}$$

och

$$C = \{y \in \{1, 2, 3, 4\} : y > 2\}.$$

Mängden B innehåller alla udda positiva heltal, medan C innehåller alla element från mängden $\{1, 2, 3, 4\}$ som är större än 2. Alltså har vi

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots\} \quad \text{och} \quad C = \{3, 4\}.$$

Exempel 1.3. Låt $A = \{4, 5, 8, 4711, 12, 18\}$ och $B = \{x \in A : x > 10\}$. Då är $B = \{12, 18, 4711\}$ medan $\{x \in A : x < 3\} = \varnothing$. Vidare har vi att $4 \in A$ och $4 \notin B$. ▲

Vi bryr oss inte om i vilken ordning eller hur många gånger elementen räknas upp och därmed gäller till exempel

$$\{1, 2, 3, 4\} = \{3, 1, 4, 2\} = \{1, 3, 3, 1, 2, 4, 4, 1, 3, 2, 4\}.$$

Vi använder även notationen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ för att säga att $a_1 \in A$, $a_2 \in A$ och $a_n \in A$.

Definition 1.4. Låt A och B vara mängder. Om alla element i mängden A också är element i mängden B så sägs A vara en **delmängd** till B. Detta betecknas $A \subseteq B$.

Exempel 1.5. Mängden $\{1, a\}$ är en delmängd till $\{1, 3, a\}$, eftersom alla element i $\{1, a\}$ finns i mängden $\{1, 3, a\}$. Vi skriver $\{1, a\} \subseteq \{1, 3, a\}$. ▲

Definition 1.6. Antag att A och B är mängder. **Unionen** av A och B består av de element som ligger i någon av mängderna och betecknas $A \cup B$. **Snittet** av A och B består av de element som ligger i båda mängderna och betecknas $A \cap B$.

Exempel 1.7. Låt $A = \{1, 3, 5, 6\}$ och $B = \{5, 3, 4711\}$. Då har vi $A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 4711\}$ och $A \cap B = \{3, 5\}$. ▲

Det är dags att titta på några viktiga talmängder. Den mängd vi använder för att räkna föremål är de **naturliga talen**

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Tar vi med negativa tal får vi **heltalen**

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Beteckningen kommer från tyskans *zahl* som betyder tal. Bråken eller de **rationella talen**

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \colon a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

Här kommer beteckningen från engelskans *quotient*. Slutligen betecknar vi med $\mathbb{R}$ de **reella talen**. De reella talen kan ses som mängden av alla tal på tallinjen, exempelvis $0, -1, 3/2, -527/3, \sqrt{2}$ och π. Det ligger utanför ramarna för detta häfte att göra en stringent definition av dessa tal. Vi betecknar med

$$\mathbb{C} = \{a + \mathrm{i}b \colon a, b \in \mathbb{R}, \mathrm{i} \text{ är den imaginära enheten}\}$$

de **komplexa talen**. Notera att $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. Det sista, att $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, följer eftersom de komplexa talen med endast realdel kan identifieras med det reella talen.

Exempel 1.8. Vi har att $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} : n \geqslant 0\}$. ▲

Exempel 1.9. Mängden $\{n \in \mathbb{Z} : n = 2k$ för något $k \in \mathbb{Z}\}$ är mängden av alla jämna heltal. Denna mängd kan också skrivas som $\{2k \colon k \in \mathbb{Z}\}$, eller som $\{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$. ▲

Exempel 1.10. Låt oss påpeka att en mängd även kan ha andra mängder bland dess element. Exempelvis kan vi låta

$$A = \{2, 3, \{-1, 1\}, 4\},$$

och vi har att $\{-1, 1\} \in A$, det vill säga mängden $\{-1, 1\}$ är ett element i mängden A. Observera att $-1 \notin A$. ▲

Låt A vara en mängd. För att ta bort element ur A används symbolen $\setminus$. Vi definierar $A \setminus B = \{x \in A \colon x \notin B\}$. Exempelvis är $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ mängden av alla reella tal utom 0 och 1.

1.4 Lite historik om mängderlära

Under den senare delen av 1800-talet chockerade Georg Cantor den matematiska världen genom att visa att det finns flera oändligheter. Speciellt visade han att antalet delmängder till en given mängd är större än antalet element i mängden. Intresset för mängdteori växte och en av pionjärerna för den formella aspekten av ämnet var Gottlob Frege. Han försökte se mängdteorin som en grund för matematiken. Mitt under skrivandet av sin bok i ämnet fick han ett brev från en viss ung herre vid namn Bertrand Russell. Russell hade noterat att allt inte stod rätt till i Freges system. Enligt Frege kunde en mängd specificeras med en formel som utgör en restriktion på de element som ingår i mängden. Det var möjligt att bilda mängden av alla x som uppfyller villkoret $P(x)$, där $P(x)$ är ett påstående som beror av x. I symboler blir det

$$\{x\colon P(x)\},$$

jämför med (1.1).

Russells paradox bestod av att han valde $P(x)$ till $x \notin x$ och bildade mängden

$$A = \{x\colon x \notin x\},$$

som är som en oändlig rekursion. Vi får då att $A \in A$ medför att $A \notin A$ och omvänt att $A \notin A$ medför att $A \in A$. Detta är uppenbarligen en logisk motsägelse.

Många försökte rädda mängdteorin på olika sätt. Russell själv införde sin så kallade typteori med olika nivåer av mängder, där han kunde undvika paradoxer. Det mest framgångsrika förslaget kom 1908 från Ernst Zermelo och sedemera Adolf Fraenkel. Deras huvudidé var att man bara kunde bilda mängder på formen $\{x \in A\colon P(x)\}$, där A var en given mängd. I praktiken underförstår man ofta mängden A och skriver lite slarvigt $\{x\colon P(x)\}$. Dock bör man således vara en smula försiktig vid handhavandet av mängder.

Ett tack till Lars Svensson för detta delavsnitt.

2 Delmängder av reella tal

2.1 Intervall

Låt a och b vara reella tal. Följande mängder kallas **intervall**

a) $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \colon a \leqslant x \leqslant b\}$,

b) $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \colon a \leqslant x < b\}$,

c) $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \colon a < x \leqslant b\}$,

d) $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \colon a < x < b\}$,

e) $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \colon a \leqslant x\}$,

f) $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \colon a < x\}$,

g) $(\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} \colon x \leqslant b\}$,

h) $(\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} \colon x < b\}$,

i) $(\infty, \infty) := \mathbb{R}$.

Här står tecknet $:=$ för att vänsterledet är definierat som högerledet. Talen a och b kallas **ändpunkter** eller **randpunkter** till intervallet. Vi använder symbolen [om a tillhör intervallet och (om a inte tillhör intervallet. Om båda randpunkterna tillhör intervallet kallas intervallet **slutet**. Om inga av randpunkterna tillhör intervallet kallas intervallet **öppet**.

Exempel 2.1. Intervallen $(1, 5)$, $(-\infty, 4)$, $(-3, \infty)$ och $(-\infty, \infty)$ är öppna intervall eftersom alla randpunkter till intervallen ej tillhör intervallen. Intervallen $[1, 4]$, $[-2, \infty)$ och $(-\infty, \infty)$ är slutna för alla randpunkter till intervallen även tillhör intervallen. Intervallet $[2, 3)$ är varken öppet eller slutet. Läsaren har säkert noterat att intervallet $(-\infty, \infty)$ både är öppet och slutet, eftersom det inte finns några randpunkter. ▲

2.2 Egenskaper för delmängder av reella tal

En **omgivning** till en punkt $a \in \mathbb{R}$ är ett öppet intervall som innehåller a. Exempelvis är det öppna intervallet $(0, 1)$ en omgivning till talet $3/4$ och intervallen $(-1/n, 1/n)$ för $n > 0$ är alla omgivningar till 0. En **punkterad omgivning** till en punkt a är en omgivning till a där vi har tagit bort talet a.

Exempel 2.2. Mängden $\{x \in (-1, 2) : x \neq 0\} = (-1, 0) \cup (0, 2)$ är en punkterad omgivning till 0. ▲

Definition 2.3. Ett tal m sägs vara en **övre begränsning** till en mängd A om $x \leqslant m$ för varje $x \in A$. En mängd som har en övre begränsning kallas **uppåt begränsad**, annars **uppåt obegränsad**.

Undre begränsning till en mängd, en **nedåt begränsad** mängd och en **nedåt obegränsad** mängd definieras på ett analogt sätt. En mängd som är uppåt begränsad och nedåt begränsad sägs vara **begränsad**, annars **obegränsad**. Ett exempel på en obegränsad mängd är intervallet $[2, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \colon 2 \leqslant x\}$ som är uppåt obegränsad och nedåt begränsad.

Ett grundläggande axiom för de reella talen är

Axiom 2.4 (Supremumaxiomet)**.** Varje uppåt begränsad delmängd av de reella talen har en minsta övre begränsning.

Definition 2.5. Ett tal m sägs vara **supremum** till en mängd A och betecknas $\sup A$ om m är den minsta övre begränsningen till A.

På samma vis definieras **infimum** av en mängd A som den största undre begränsningen till A och betecknas $\inf A$.

Supremumaxiomet säger med andra ord att om A är en mängd av reella tal som är uppåt begränsad så finns talet $\sup A$.

Exempel 2.6. Låt
$$A = \left\{ \frac{4n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$
Visa att $\sup A = 4$. För att se att 4 är en övre begränsning till A räcker det med att notera att för en godtycklig punkt i A gäller att
$$a_n := \frac{4n}{n+1} \leqslant \frac{4n}{n} = 4.$$
Nu måste vi visa att 4 är den minsta övre begränsningen, dvs att det inte finns någon mindre övre begränsning. Låt oss anta att $K < 4$ är en övre begränsning och försöka finna en motsägelse. Vi kan skriva om a_n enligt följande:
$$a_n = \frac{4n}{n+1} = 4 - \frac{4}{n+1}.$$
För att få en motsägelse vill vi finna ett n sådant att $a_n > K$, vilket skulle motsäga att K är en övre begränsning. Alltså, kan vi finna ett n sådant att
$$4 - \frac{4}{n+1} > K?$$
Vi noterar att
$$4 - \frac{4}{n+1} > K$$
gäller om och endast om
$$n > \frac{4}{4-K} - 1.$$
Det är klart att vi kan välja $n > 4/(4-K) - 1$ och alltså få $a_n > K$. Vi har fått en motsägelse och alltså är 4 den minsta övre begränsningen. ▲

Exempel 2.7. Ett sätt att illustrera supremumaxiomet är att visa att de rationella talen $\mathbb{Q}$ inte uppfyller denna egenskap, d.v.s. varje uppåt begränsad delmängd av $\mathbb{Q}$ har inte en minsta övre begränsning i $\mathbb{Q}$. Studera mängden $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leqslant 2\}$. Om vi godkänner reella tal så är $\sup A = \sqrt{2}$. Detta tal är dock inte ett rationellt tal (se här om ni inte har sett det tidigare). Antag att vi har funnit ett rationellt tal q som är supremum till A, d.v.s. q är en övre begränsning till A och q är den minsta övre begränsningen till A.

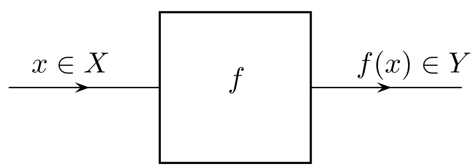
Eftersom $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ så följer att q är antingen större eller mindre än $\sqrt{2}$. Om $q < \sqrt{2}$ så följer att det finns rationella tal i intervallet $(q, \sqrt{2})$ som strider mot att q är en övre begränsning. Om $q > \sqrt{2}$ så finns det rationella tal i intervallet $(\sqrt{2}, q)$ som är mindre övre begränsningar än q. Alltså är q inte den minsta övre begränsningen till A. ▲

3 Funktioner

Innan vi gör en allmän definition av vad en funktion är kan det vara på sin plats att titta på något välbekant, nämligen en formel som $f(x) = x^2 + 1$, för $x > 0$. Formeln säger att om vi tar ett tal $x > 0$ så får vi ett nytt tal $f(x) \in \mathbb{R}$ genom att göra beräkningen $x^2 + 1$; till exempel får vi $f(2) = 2^2 + 1 = 5$. Vi säger att f är en funktion från de positiva reella talen till de reella talen, eftersom det vi stoppar in, x, är ett positivt reellt tal och det vi får ut, $f(x)$, är ett reellt tal. Vi betecknar detta med $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nu till den allmänna definitionen.

Definition 3.1. Låt X och Y vara mängder. En **funktion** $f \colon X \to Y$ är ett sätt att till varje element $x \in X$ tilldela ett välbestämt element $y \in Y$. Vi skriver $f(x) = y$. Vi säger att x **avbildas** på y och att y är **bilden** av x. Elementet x kallas **argument** till f. Mängderna X och Y kallas **definitionsmängd** respektive **målmängd**. För definitionsmängden för f används även beteckningen D_f.

Kommentar 3.2. Beteckningen $f \colon X \to Y$ utläses: f är en funktion från X till Y. Ett vanligt alternativ till ordet funktion är **avbildning**. Vi kan se funktionen som ett eget objekt som utför en handling som bilden nedan visar.



Exempel 3.3. Ett exempel på en funktion från de positiva reella talen till de reella talen är $f \colon \{x \in \mathbb{R} \colon x > 0\} \to \mathbb{R}$, sådan att $f(x) = 1 + 2 \cdot 3^x$. Definitionsmängden är $D_f = \{x \in \mathbb{R} \colon x > 0\}$ och målmängden är $\mathbb{R}$. ▲

Värdemängden till en funktion $f \colon X \to Y$ definieras som

$$V_f := \{y \in Y : y = f(x) \text{ för något } x \in X\}.$$

Exempel 3.4. Betrakta mängderna $A = \{1, 2, 3\}$ och $B = \{1, 2, \ldots, 100\}$. Ett exempel på funktion $f : A \to B$ ges av $f(n) = 2n$ för $n \in A$. Vi har alltså att $f(1) = 2$, $f(2) = 4$ och $f(3) = 6$. Per definition måste vi ha $f(x) \in B$ för alla $x \in A$, och detta gäller ju här eftersom

$$f(1) = 1 \in B, \quad f(2) = 4 \in B, \quad \text{och} \quad f(3) = 6 \in B.$$

I detta exempel definieras funktionen f av formeln $f(n) = 2n$, men det är inte alls nödvändigt att det finns en formel som beskriver hur funktionen verkar. Om vi som här har en funktion från den *ändliga* mängden $A = \{1, 2, 3\}$ kan man till exempel definera funktionen med hjälp av en tabell:

n	$f(n)$
1	2
2	4
3	6

▲

Om inget anges om definitionsmängden antas funktionen vara definierad på så stor delmängd av de reella talen som möjligt och målmängd antas alltid vara $\mathbb{R}$. Detta är en konvention mellan er som läsare och oss som skribenter.

Exempel 3.5. Låt $h(x) = 3x^2/2 - x^3$. Detta definierar en funktion h från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$. Vi har exempelvis att

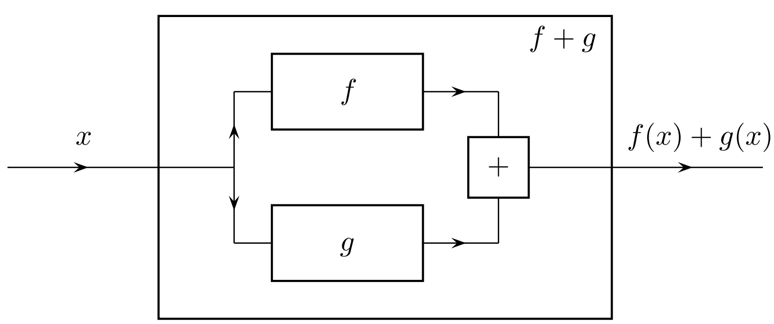
$$h(1) = \frac{1}{2} \quad \text{och} \quad h(-2) = 14.$$

▲

Vi kommer tydligt skilja på f och $f(x)$, det första är funktionen f, medan det andra är funktionens värde i punkten x. Som ett exempel på denna notation så definierar vi summan och produkten av två reellvärda funktioner f och g, sådana att $D_f = D_g \subset \mathbb{R}$ enligt

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$
$$(f \cdot g)(x) := f(x)g(x)$$

Bildmässigt kan vi se additionen som

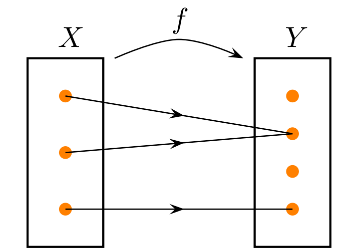


Om vi inte vill namnge den funktion som vi arbetar med eller introducerar används notationen $x \mapsto 1 + x^2$ istället för $f(x) = 1 + x^2$. För er som uppskattar programmering är det väldigt likt det sätt som anonyma klasser eller funktioner definieras i olika programspråk.

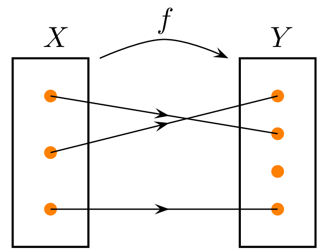
3.1 Inverser och inverterbarhet

Definition 3.6. En funktion $f\colon X \to Y$ säges vara **injektiv** om det för varje $x, y \in X$ gäller att om $f(x) = f(y)$ så är $x = y$.

Uttryckt i ord säger den här definitionen att funktionen aldrig skickar två olika element i X på samma element i Y.



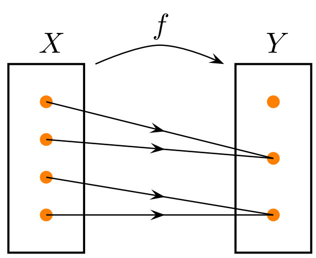
Exempel då f ej är injektiv



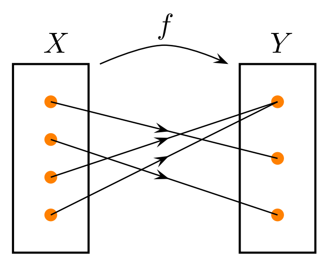
Exempel då f är injektiv

Definition 3.7. En funktion $f\colon X \to Y$ säges vara **surjektiv** om det för varje $y \in Y$ existerar ett $x \in X$ sådant att $f(x) = y$.

Varje element i Y är alltså bilden av något x under funktionen f om funktionen är surjektiv. En funktion är surjektiv om och endast om dess målmängd sammanfaller med dess värdemängd.



Exempel då f ej är surjektiv



Exempel då f är surjektiv

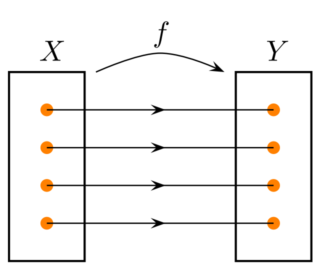
En funktion kan vara surjektiv utan att vara injektiv, och tvärtom.

Exempel 3.8. Låt $\mathbb{R}_+$ beteckna de icke-negativa reella talen. Betrakta funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ som definieras av $f(x) = x^2$. Då är f surjektiv, men inte injektiv — till exempel har vi $f(-2) = f(2) = 4$.

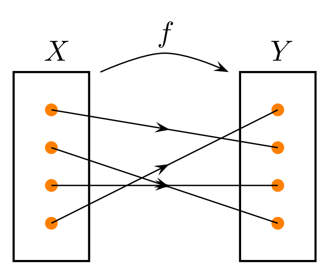
Ett exempel på en funktion som är injektiv men inte surjektiv ges av funktionen i 3.4. Det finns till exempel inget $n \in \{1, 2, 3\}$ sådant att $f(n) = 3$.

▲

Definition 3.9. En funktion $f\colon X \to Y$ som både är injektiv och surjektiv säges vara **bijektiv**, eller en **bijektion**.



Exempel då f är bijektiv



Exempel då f är bijektiv

Definition 3.10. Låt $f\colon X \to Y$ vara en bijektiv funktion. **Inversen** till f är avbildningen $f^{-1}\colon Y \to X$ som ges av $f^{-1}(y) = x$, där x är det entydiga element i X som uppfyller $f(x) = y$. En funktion som har en invers kallas **inverterbar**.

Vi ser här att både injektivitet och surjektivitet är viktigt. Om f inte är injektiv kan det finnas många $x \in X$ med $f(x) = y$. Om f inte är surjektiv kan det vara så att det inte finns något x med $f(x) = y$. För inversen gäller att $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$ för alla $y \in Y$ och $f^{-1}\left(f(x)\right) = x$ för alla $x \in X$.

Exempel 3.11. Betrakta funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som ges av $f(x) = x^3$. Denna funktion är injektiv och surjektiv, och därmed en bijektion. Inversen till f ges av funktionen $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som definieras av $f^{-1}(y) = y^{1/3}$. ▲

Exempel 3.12. Både definitionsmängden och värdemängden måste beaktas när vi undersöker om en funktion är en bijektion.

Funktionen $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ med $f(x) = x^2$ är en bijektion, med invers $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Som vi såg tidigare är detta påstående falskt om vi betraktar f definierad på hela $\mathbb{R}$. ▲

Antag att $f\colon X \to Y$ är en injektiv funktion. Då vet vi att vi kan, för varje $y \in V_f$, finna ett $x \in X$ sådant att $f(x) = y$. Men, om Y innehåller element som inte finns i V_f är funktionen f inte surjektiv och därmed inte bijektiv. I detta fall är förutsättningarna för en invers inte uppfyllda. Detta kan i många fall, men inte alla, ses som en teknikalitet. Ty, om vi bara skulle ändra på definitionen av f så att målmängden Y är exakt de element vi kan få, nämligen V_f, så skulle vi ha en bijektiv funktion och alltså en invers. Vi kan säga att varje funktion som är injektiv har en invers definierad på funktionens värdemängd V_f. Dvs, om $g\colon X \to V_g$ är injektiv så är den inverterbar.

Exempel 3.13. Låt $f(x) = x + 2$ vara en funktion definierad för $x \in [0, 3]$. Det är en enkel verifikation att se att f är injektiv. Värdemängden till f är $V_f = [2, 5]$. Alltså är f inverterbar om f ses som funktionen $f\colon [0, 3] \to [2, 5]$. I detta fall är $f^{-1}\colon [2, 5] \to [0, 3]$ och $f^{-1}(y) = y - 2$. ▲

3.2 Egenskaper för reella funktioner

Definition 3.14. Vi säger att en funktion f är **växande på ett intervall** $I \subset D_f$ om det för varje $x, y \in I$ för vilka $x < y$ ger att $f(x) \leqslant f(y)$. Om en funktion är växande på hela sin definitionsmängd kallas f **växande**.

Observera att den konstanta funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ och $f(x) = 42$ är växande. Den är däremot inte strängt växande som definieras enligt:

Definition 3.15. Vi säger att en funktion f är **strängt växande på ett intervall** $I \subset D_f$ om det för varje $x, y \in I$ för vilka $x < y$ ger att $f(x) < f(y)$. Om en funktion är strängt växande på hela sin definitionsmängd kallas f **strängt växande**.

Definition 3.16. En funktion f är **uppåt obegränsad** om dess värdemängd V_f är uppåt obegränsad och **uppåt begränsad** om dess värdemängd V_f är uppåt begränsad.

Egenskaper som **avtagande**, **strängt avtagande**, **nedåt obegränsad** och **nedåt begränsad** funktioner definieras på ett analogt sätt.

Exempel 3.17. Låt $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ vara en given positiv funktion. Visa att om $g : (0, 1) \to \mathbb{R}$ med $g(x) = xf(x)$ uppfyller att $V_g = [1, 2]$ så är f obegränsad.

Vi visar detta med hjälp av en motsägelse. Antag att f är uppåt begränsad, d.v.s. V_f är uppåt begränsad, vilket i sin tur ger att det existerar ett tal M sådant $f(x) \leqslant M$ för varje $x \in (0, 1)$ och $M > 1$. Vi observerar att $1/2M \in (0, 1)$ och att

$$g(1/2M) = \frac{1}{2M} \cdot f(1/2M) \leqslant \frac{1}{2M} \cdot M = \frac{1}{2} < 1.$$

Detta strider mot att $V_g = [1, 2]$, alltså är f obegränsad. ▲

Definition 3.18. En funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ säges vara **jämn** om $f(-x) = f(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

Några exempel på jämna funktioner är: $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^4$ och $x \mapsto |x|$.

Definition 3.19. En funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ säges vara **udda** om $f(-x) = -f(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

Några exempel på udda funktioner är: $x \mapsto x^3$ och $x \mapsto x^7$.

Observera att en funktion som inte är jämn inte behöver vara udda. Exempelvis är $x \mapsto 1 + x$ varken jämn eller udda.

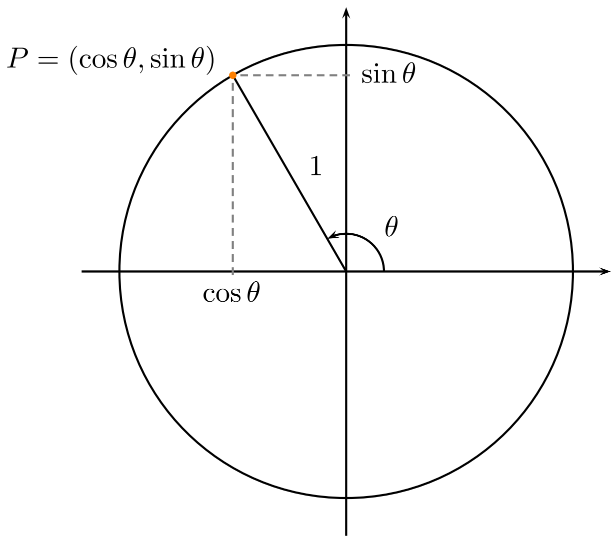
3.3 Trigonometriska funktioner

Vi ska i detta delkapitel definiera sinus och cosinus och vilka grundläggande egenskaper som de besitter.

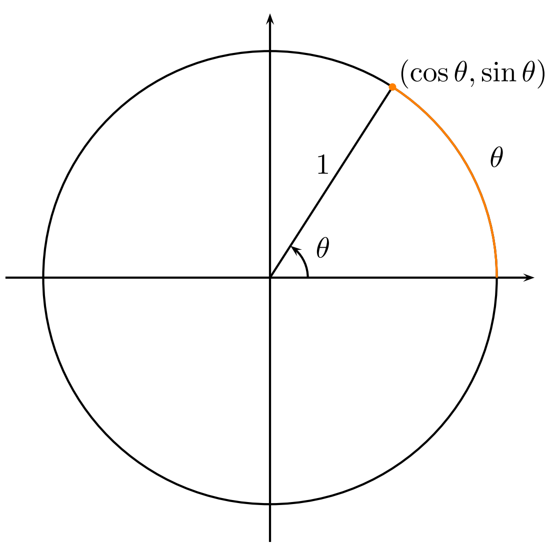
Låt oss betrakta en punkt P på enhetscirkeln vars linje in mot origo bildar vinkeln θ till x-axeln om vi använder orienteringen moturs från x-axeln. Vi kallar koordinaterna i P för $(\cos\theta, \sin\theta)$. Direkt ser vi att

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

vilket kallas för den trigonometriska ettan.



Det är viktigt att vi inför en enhet eller skala för vinkeln θ. Låt oss säga att vinkeln $\theta = 1$ om längden på den cirkelbåge som bildas har längden 1. Vi ska inte problematisera Denna enhet kallas **radianer** och är på många sätt den naturliga skalan för vinklar. Vi kommer i detta häfte alltid förutsätta att vinklar mäts i radianer.



Vi har bildat funktionerna $\theta \mapsto \cos\theta$ och $\theta \mapsto \sin\theta$ för $\theta \in [0, 2\pi)$. Vi utvidgar dessa funktioner periodiskt till hela $\mathbb{R}$, d.v.s.

$$\cos\theta = \cos(\theta + n2\pi),$$
$$\sin\theta = \sin(\theta + n2\pi)$$

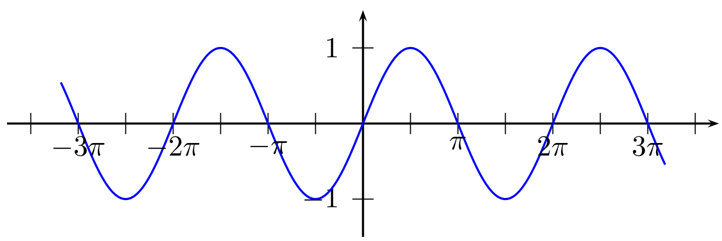
för alla $n \in \mathbb{Z}$. Funktionen $x \mapsto \sin x$ kallas **sinus** och $x \mapsto \cos x$ kallas **cosinus**.

Av symmetriskäl får vi följande relationer direkt från definitionen ovan

$$\sin\theta = \cos(\theta - \pi/2), \tag{3.1}$$
$$\cos\theta = \sin(\theta + \pi/2), \tag{3.2}$$
$$\cos\theta = \cos(-\theta), \tag{3.3}$$
$$\sin\theta = \sin(-\theta), \tag{3.4}$$
$$\cos\theta = -\cos(\pi - \theta), \tag{3.5}$$
$$\sin\theta = \sin(\pi - \theta). \tag{3.6}$$

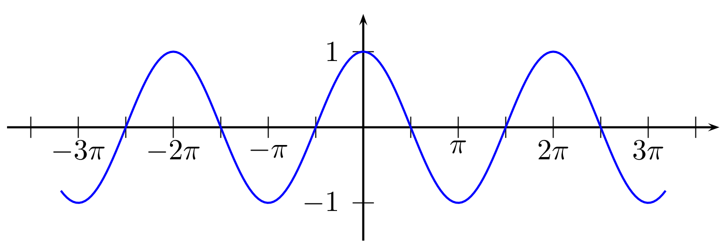
Relationerna (3.3) och (3.4) säger att cosinus och sinus är en jämn respektive udda funktion.

Grafen till funktionerna sinus och cosinus är



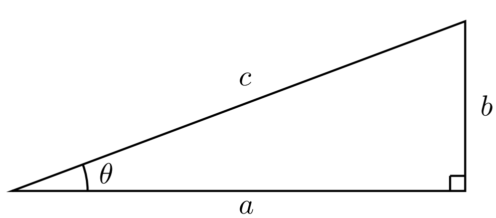
Figur 3.1: Grafen till funktionen $x \mapsto \sin x$.

respektive

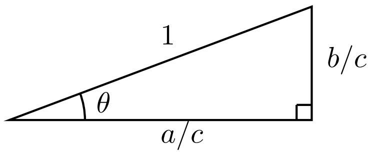


Figur 3.2: Grafen till funktionen $x \mapsto \cos x$.

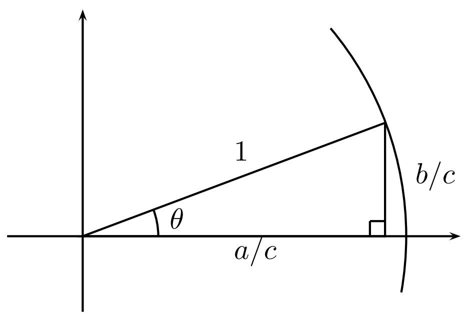
Exempel 3.20. Observera att vi kan med hjälp av sinus och cosinus relatera sidor och vinklar med varandra i rätvinkliga trianglar. Låt oss börja med den rätvinkliga triangeln med sidorna a, b och c



Om vi skalar denna triangel så att hypotenusan får längden 1 så får vi den likformiga triangeln



Om vi nu skriver in denna triangeln i enhetscirkeln så får vi de önskade relationerna



Vi ser att

$$\cos\theta = \frac{a}{c} \quad \text{och} \quad \sin\theta = \frac{b}{c}. \tag{3.7}$$

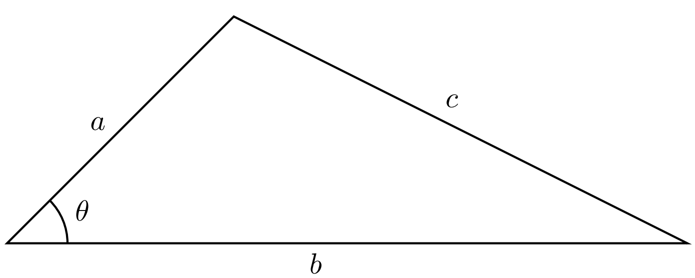
▲

Vi behöver en generalisering av Pythagoras sats som heter Cosinussatsen, nämligen

Sats 3.21 (Cosinussatsen)**.** *Låt a, b och c vara sidlängderna i en triangel. Då gäller att*

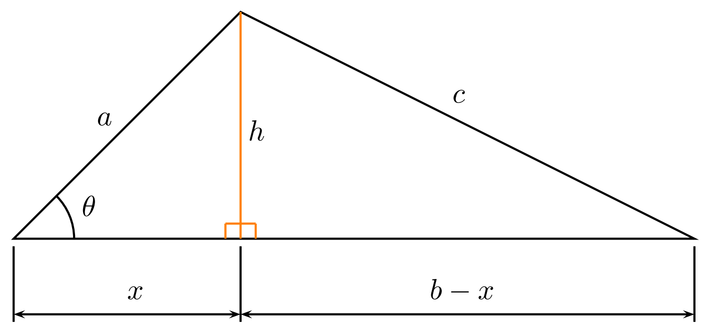
$$a^2 + b^2 = c^2 - 2ab\cos\theta, \tag{3.8}$$

där θ är den vinkel i triangel där sidlängderna a och b möts.



Bevis: I fallet $\theta = \pi/2$ så återfår vi Pythagoras sats. Vi bevisar cosinussatsen för spetsiga och trubbiga vinklar var för sig.

Vi börjar med fallet då vinkeln $\theta < \pi/2$, alltså då θ är spetsig. Vi inför höjden h och låter x vara en del av sidan b som i figuren nedan



Vi använder nu Pythagoras sats i de två rätvinkliga trianglarna och får

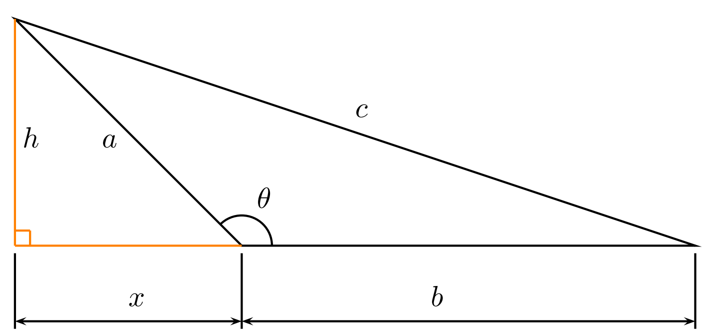
$$\begin{cases} a^2 = h^2 + x^2 \\ c^2 = h^2 + (b-x)^2 \end{cases}$$

Vi löser ut h^2 i den första ekvationen och sätter in resultatet i den andra ekvationen och får

$$c^2 = a^2 - x^2 + (b-x)^2 = a^2 + b^2 - 2bx.$$

Det återstår att konstatera att $x = a\cos\theta$ vilken följer från formel (3.7).

Det andra fallets lösning är näst intill lika. Med hjälp av en bild lämnar vi det som en övning åt läsaren.



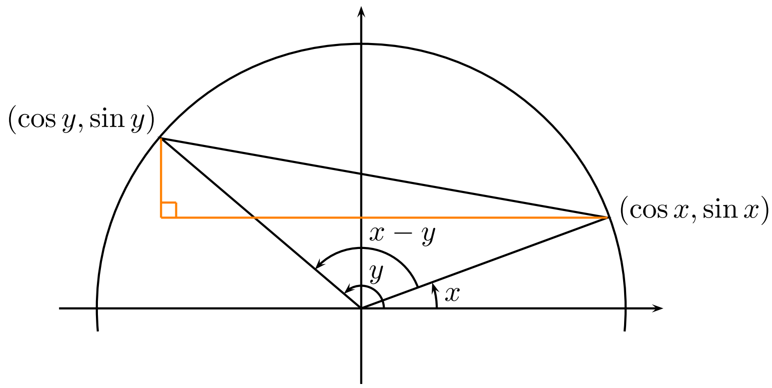
■

Sats 3.22. *Följande identitet gäller*

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \tag{3.9}$$

Bevis: Cosinussatsen (se 3.21) ger att

$$(\cos y - \cos x)^2 + (\sin y - \sin x)^2 = 1 + 1 - 2\cos(x-y).$$



Om vi förenklar med hjälp av den trigonometriska ettan får vi

$$\begin{aligned}2 - 2\cos y\cos x - 2\sin y\sin x &= 2 - 2\cos(x-y)\\ \cos y\cos x + \sin y\sin x &= \cos(x-y)\end{aligned}$$

vilket skulle bevisas. ■

Följdsats 3.23. *Följande identiteter gäller*

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y \tag{3.10}$$
$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y \tag{3.11}$$
$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y \tag{3.12}$$
$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \tag{3.13}$$
$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x \tag{3.14}$$

Bevis: Vi bevisar här (3.10). Låt $y = -z$ i (3.9). Vi får då

$$\begin{aligned}\cos(x+z) &= \cos x\cos(-z) + \sin x\sin(-z)\\ &= \cos x\cos z - \sin x\sin z\end{aligned}$$

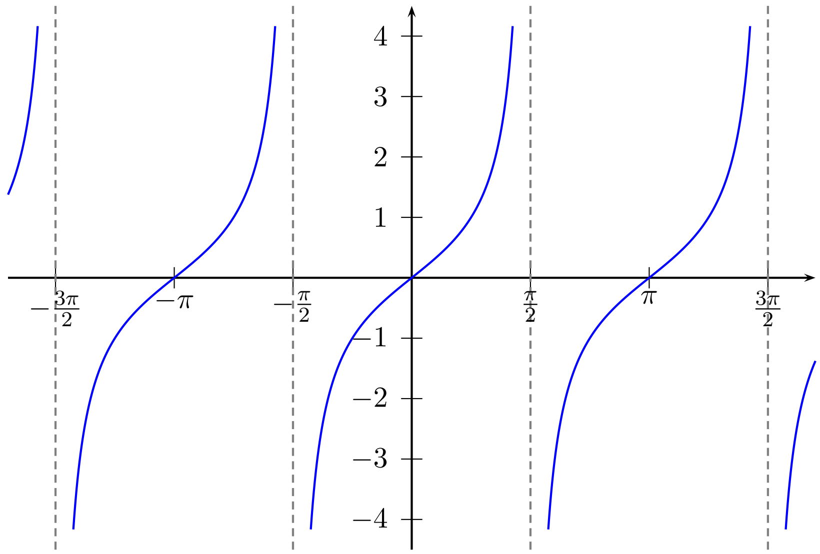
Bevisen för 3.11 – 3.14 följer på liknande vis och med hjälp av (3.1) – (3.6) och lämnas som en övning åt läsaren. ■

Definition 3.24. Funktionen tan: $\{x \in \mathbb{R}\colon x \neq n\pi/2, n \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, sådan att

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \tag{3.15}$$

kallas **tangens**.

Grafen för tangens är



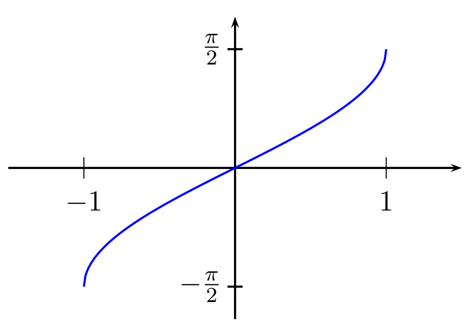
Figur 3.3: Grafen till funktionen $x \mapsto \tan x$.

3.4 Cyklometriska funktioner

Vi börjar med att observera att funktionen $f \colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$ sådan att $f(x) = \sin x$ är inte injektiv och därmed inte inverterbar, vi har t.ex. att $f(0) = f(\pi)$. Om vi däremot begränsar definitionsmängden D_f till det slutna intervallet $[-\pi/2, \pi/2]$ blir f bijektiv och har en invers. Vi gör följande definition:

Definition 3.25. Låt $f \colon [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ sådan att $f(x) = \sin x$. Inversen till f kallas **arcussinus** och betecknas $f^{-1} \colon [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ och $f^{-1}(y) = \arcsin y$.

Observera att den generella formeln $\sin(\arcsin y) = y$ gäller för alla $y \in [-1, 1]$ och $\arcsin(\sin x) = x$ gäller för alla $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Grafen för arcussinus är



Figur 3.4: Grafen till funktionen $x \mapsto \arcsin x$.

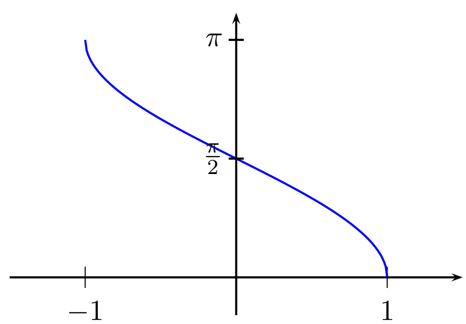
Kommentar 3.26. Vi skulle ha kunnat välja något annat intervall än

$[-\pi/2, \pi/2]$ för att få $x \mapsto \sin x$ bijektiv. Detta intervall är dock standardiserat runt om i världen, så om inget annat anges kan man med säkerhet anta att det är detta intervall man menar när man pratar om inversen till $x \mapsto \sin x$.

På liknande sätt konstaterar vi att funktionerna $x \mapsto \cos x$ och $x \mapsto \tan x$ kan göras inverterbara genom att inskränka definitionsmängden.

Definition 3.27. Låt $f\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$ sådan att $f(x) = \cos x$. Inversen till f kallas **arcuscosinus** och betecknas $f^{-1}\colon [-1, 1] \to [0, \pi]$ och $f^{-1}(y) = \arccos y$.

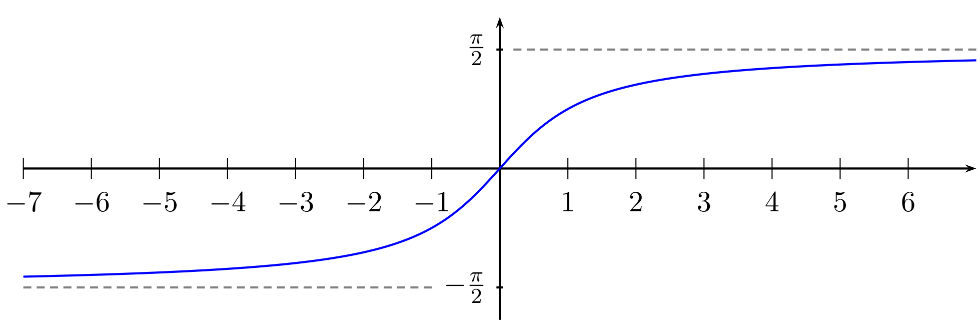
Grafen för arcuscosinus är



Figur 3.5: Grafen till funktionen $x \mapsto \arccos x$.

Definition 3.28. Låt $f\colon [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$ sådan att $f(x) = \tan x$. Inversen till f kallas **arcustangens** och betecknas $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to [-\pi/2, \pi/2]$ och $f^{-1}(y) = \arctan y$.

Grafen för arctangens är



Figur 3.6: Grafen till funktionen $x \mapsto \arctan x$.

3.5 Exponentialfunktionen

Vi kommer inte i detta häfte definiera exponentialfunktionen $x \mapsto a^x$, där $a > 1$. Utan fritt anta att läsaren är bekväm med funktionen som en strängt växande funktion med värdemängd $(0, \infty)$ som uppfyller räknelagarna

a) $a^0 = 1$

b) $a^1 = a$

c) $a^{x+y} = a^x a^y$

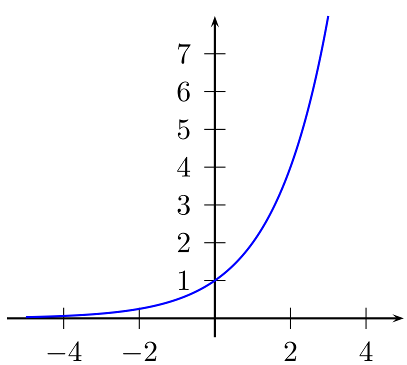
d) $a^{-x} = 1/a^x$

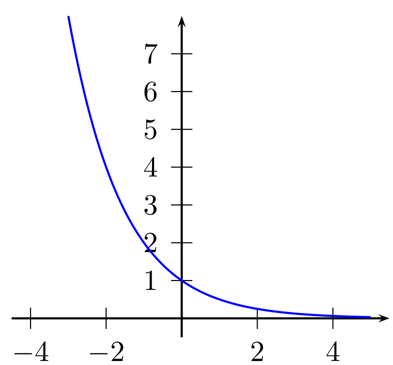
e) $(a^x)^y = a^{xy}$

Att introducera exponentialfunktionen på ett korrekt vis är långt ifrån en enkel sak och ligger utanför ramarna för detta häfte. Med hjälp av d) kan vi definiera exponentialfunktionen för $a < 1$. Vi har för $a < 1$ att $1/a > 1$ och

$$a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}.$$

Grafen för exponentialfunktionen är

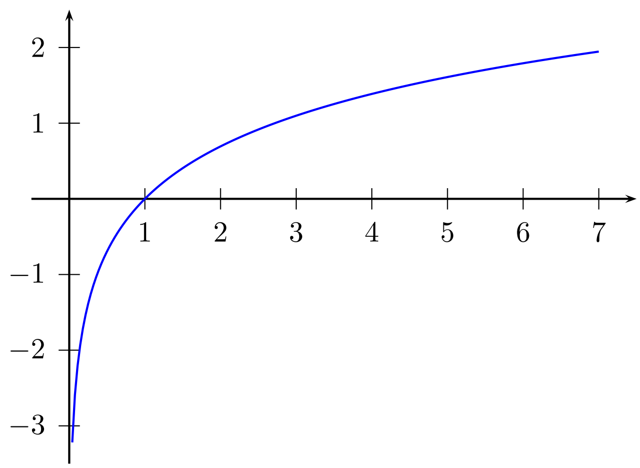




Figur 3.7: Grafen till funktionen $x \mapsto 2^x$ till vänster och $x \mapsto (1/2)^x$ till höger.

3.6 Logaritmfunktionen

Låt $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ sådan att $f(x) = a^x$, för något $a > 1$. Då gäller att f är inverterbar. Vi definierar **logaritmfunktionen** som inversen till f och betecknar $f^{-1}(y) = \log_a y$. Alltså har vi att $D_{f^{-1}} = (0, \infty)$ och $V_{f^{-1}} = \mathbb{R}$. Grafen för logaritmfunktionen är



Figur 3.8: Grafen till funktionen $x \mapsto \log_2 x$.

Inversen uppfyller följande räknelagar:

Sats 3.29. *Låt $a > 1$, då gäller att logaritmfunktionen uppfyller*

a) $\log_a 1 = 0$

b) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \qquad x > 0, y > 0$

c) $\log_a x^y = y \log_a x, \qquad x > 0$

Bevis: Generellt gäller att vi vill överföra exponentialfunktionens räknelagar till dess inversfunktion. Vi kommer hela tiden att använda oss av att $x = y$ om och endast om $a^x = a^y$. Detta är en direkt följd av att $x \mapsto a^x$ är injektiv.

a) Vi vill visa att $\log_a 1 = 0$ eller ekvivalent att $a^{\log_a 1} = a^0$. Vänsterledet uppfyller att $a^{\log_a 1} = 1$ och högerledet att $a^0 = 1$. Alltså stämmer alla påståenden.

b) Vi vill visa att $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ eller ekvivalent att $a^{\log_a(xy)} = a^{\log_a x + \log_a y}$. För vänsterledet gäller att $a^{\log_a(xy)} = xy$ och för högerledet via exponentialfunktionens räknelagar att $a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = xy$.

c) Vi vill visa att $\log_a x^y = y \log_a x$ eller ekvivalent att $a^{\log_a x^y} = a^{y \log_a x}$. Vänsterledet är x^y och högerledet är $a^{y \log_a x} = (a^{\log_a x})^y = x^y$ och vi är klara.

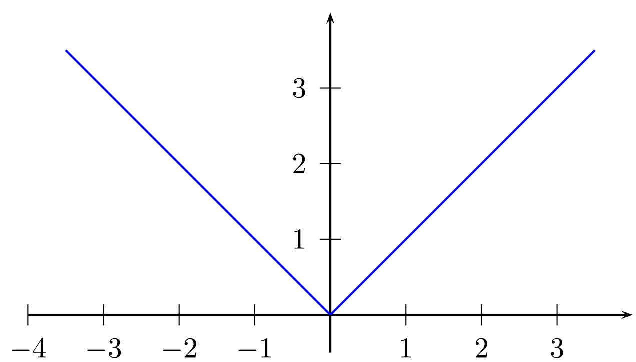
■

3.7 Absolutbelopp

Givet ett tal $x \in \mathbb{R}$ (eller $\in \mathbb{C}$) så definieras $|x|$ som avståndet från x till origo. Funktionen $x \mapsto |x|$ kallas **absolutbeloppet** alternativt **beloppet** av x. För reella tal implicerar detta att

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases} \tag{3.16}$$

eller $|x| = \sqrt{x^2}$. Grafen har följande utseende



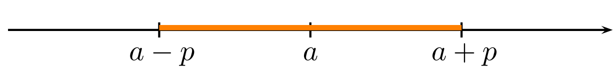
Figur 3.9: Grafen till funktionen $x \mapsto |x|$.

Exempel 3.30. Vi har enligt definitionen att $|-5| = -(-5) = 5$, $|5| = 5$, $|-\pi| = -(-\pi) = \pi$ och $|0| = 0$. Vi har här varit övertydliga med användningen av minustecken. ▲

I detta häfte kommer vi i ett flertal tillfällen att använda absolutbeloppet på formen $|x - a| = b$ som betyder att avståndet från $x - a$ till origo, eller avståndet från x till a, är b.

Exempel 3.31. Skissa mängden $A = \{x \in \mathbb{R} \colon |x - a| \leqslant p\}$, där $p > 0$.

LÖSNING:



▲

Observera att definitionen direkt ger att

$$x \leqslant |x|, \tag{3.17}$$

för varje $x \in \mathbb{R}$. Följande sats visas exempelvis med hjälp av fallindelning.

Sats 3.32. *Låt $x, y \in \mathbb{R}$, då gäller*

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \tag{3.18}$$
$$|x + y| \leqslant |x| + |y|. \tag{3.19}$$

Bevis: Vi lämnar beviset av (3.18) till läsaren som en övning.

Beviset av (3.19) gör vi med hjälp av fallindelning.

Antag att $x \geqslant 0$ och $y \geqslant 0$. Olikheten är i detta fall en likhet, ty

$$|x + y| = x + y = |x| + |y|.$$

Antag nu att en av x och y är negativ. Symmetriskäl gör att det räcker med att vi betraktar olikheten för $x \geqslant 0$ och $y < 0$. Även här vill vi dela upp i två fall. Det ena är då $x + y \geqslant 0$ och det andra då $x + y < 0$. Vi börjar med fallet då $x + y \geqslant 0$. Vi får (kom ihåg att $y < 0$)

$$|x + y| = x + y \leqslant x \leqslant x - y = |x| + |y|.$$

Nu till delfallet att $x + y < 0$. Vi får

$$|x + y| = -(x + y) = -x - y \leqslant -y \leqslant x + (-y) = |x| + |y|.$$

Slutligen det sista fallet då $x < 0$ och $y < 0$. Vi får

$$|x + y| = -(x + y) = -x + (-y) = |x| + |y|$$

och olikheten är visad. ■

3.8 Övningar

Övning 3.1. Visa den andra delen i beviset av cosinussatsen.

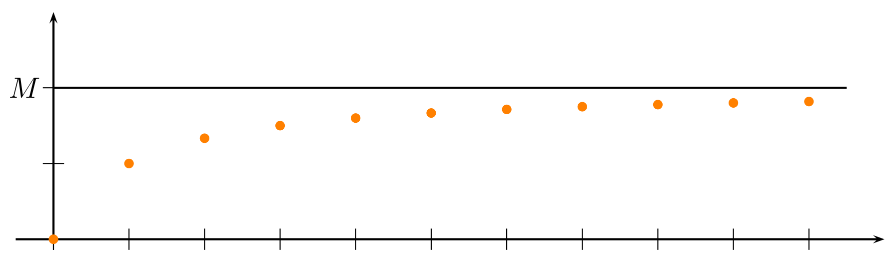
Övning 3.2. Visa (3.11) – (3.14).

Övning 3.3. Visa likhet (3.18).

4 Talföljder

4.1 Definitionen och konvergens

Definition 4.1. En följd av tal $a_1, a_2, a_3, \ldots$ av reella tal kallas för en **talföljd** och betecknas $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Vi säger att talföljden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är **växande** om $a_{n+1} \geqslant a_n$ för varje $n \geqslant 1$ och att den är **uppåt begränsad** om det finns ett tal M sådant att $a_n \leqslant M$ för varje $n \geqslant 1$.



Vi definierar på ett analogt sätt vad som menas med att en talföljd är **avtagande** och **nedåt begränsad**. En talföljd sägs vara **begränsad** om den är både uppåt och nedåt begränsad.

Exempel 4.2. Om $a_n = \frac{2n}{n+1}$ så blir $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ talföljden $2/2, 4/3, 6/4, 8/5, \ldots$. Talföljden är uppåt begränsad av talet 2 men även av talet 14. Den är dessutom växande eftersom

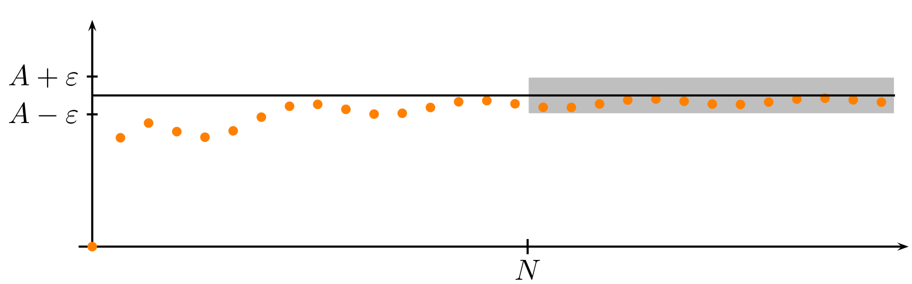
$$a_{n+1} - a_n = \frac{2}{(n+1)(n+2)} > 0.$$

▲

Definition 4.3. En talföljd $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sägs **konvergera mot gränsvärdet** A om det för alla $\varepsilon > 0$ finns ett N sådant att $|a_n - A| < \varepsilon$ för varje $n > N$. Vi inför beteckningen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

En talföljd med denna egenskap kallas **konvergent**. Om inget sådant A existerar kallas talföljden **divergent**.



Exempel 4.4. Visa att talföljden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ där talen ges av $a_n = 2 + 3^{-n}$ konvergerar mot 2 då $n \to \infty$.

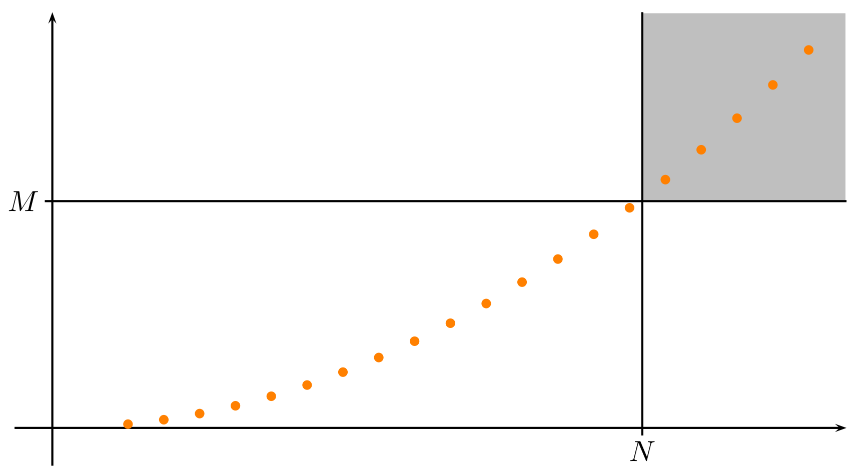
Enligt definitionen ska vi först låta ett tal $\varepsilon > 0$ vara givet. Vi vill nu finna ett N, som kommer att bero av ε, sådant att $|a_n - 2| < \varepsilon$ för varje $n > N$. Vi ser att

$$|a_n - 2| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad 3^{-n} < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{\varepsilon} < 3^n \quad \Longleftrightarrow \quad -\log_3 \varepsilon < n$$

där den sista ekvivalensen följer av att logaritmfunktionen är strängt växande. Räkningen visar att $|a_n - 2| < \varepsilon$ är sann då $n > -\log_3 \varepsilon$. Alltså kan vi välja N till något tal större än eller lika med $-\log_3 \varepsilon$, låt oss ta $N = -\log_3 \varepsilon$. ▲

Vi säger att talföljden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ har det **oegentliga gränsvärdet** ∞ om det för varje M existerar ett N sådant att $a_n > M$ för varje $n > N$. Vi betecknar detta med

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$



Observera att talföljder som har oegentliga gränsvärden är divergenta. Det finns även talföljder som helt saknar gränsvärde, exempelvis $a_n := (-1)^n$, som pendlar mellan -1 och 1. Det är lämnat till läsaren att visa att en konvergent talföljd är begränsad.

Sats 4.5. *Låt $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ och $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ vara konvergenta talföljder med gränsvärdena A respektive B. Då följer att*

a) $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$ är konvergent med gränsvärdet $A + B$,

b) $(a_n b_n)_{n=1}^{\infty}$ är konvergent med gränsvärdet AB,

c) om $B \neq 0$ har vi att $(a_n/b_n)_{n=1}^{\infty}$ är konvergent med gränsvärdet A/B,

d) om $a_n \leqslant b_n$, för varje n så gäller att $A \leqslant B$.

Kommentar 4.6. Den observante noterar att vi i c) måste anta att $b_n \neq 0$ för alla de n som är inkluderade i (a_n/b_n). Eftersom vi är intresserade av gränsvärdet då $n \to \infty$ kan vi exkludera tal i början av följden. Då vi vet att $B \neq 0$ så kan vi välja ett N sådant att $|b_n - B| < |B|/2$. Alltså följer att $b_n \neq 0$, då $n > N$. Vi kan nu omformulera c) som att $(a_n/b_n)_{n=N}^{\infty}$ är konvergent med gränsvärdet A/B.

Bevis: Vi använder oss av definitionen.

a) Tag $\varepsilon > 0$. Vi vill visa att det finns ett N sådant att $|a_n + b_n - A - B| < \varepsilon$ för alla $n > N$. Enligt triangelolikheten (3.19) har vi

$$|a_n + b_n - A - B| \leqslant |a_n - A| + |b_n - B|$$

Då $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar mot A och $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar mot B får vi att det finns tal N_1 och N_2 så att

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2},$$

då $n > N_1$ och

$$|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2},$$

då $n > N_2$. Detta ger att

$$|a_n + b_n - A - B| < \varepsilon,$$

då $n > \max(N_1, N_2)$.

b) Tag $\varepsilon > 0$. Vi vill visa att det finns ett N sådant att $|a_n b_n - AB| < \varepsilon$ för alla $n > N$. Enligt triangelolikheten (3.19) har vi

$$\begin{aligned} |a_n b_n - AB| &= |a_n b_n - a_n B + a_n B - AB| \\ &\leqslant |a_n b_n - a_n B| + |a_n B - AB| \\ &= |a_n||b_n - B| + |B||a_n - A|. \end{aligned}$$

Eftersom $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är konvergent så är den begränsad, d.v.s. det finns ett tal $K > 0$ sådant att $|a_n| < K$ för varje $n \geqslant 1$. Då $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar mot A och $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar mot B får vi att det finns tal N_1 och N_2 sådana att

$$|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2K},$$

då $n > N_1$ och

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2|B|},$$

då $n > N_2$. Detta ger att

$$|a_n b_n - AB| < \varepsilon,$$

då $n > \max(N_1, N_2)$.

c) Detta bevis lämnas som en övning åt läsaren.

d) Låt oss göra ett motsägelsebevis. Antag att $B < A$. Bilda talföljden $c_n = a_n - b_n$. Vi har att $c_n \geqslant 0$, för varje $n \geqslant 1$. Talföljden $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ har gränsvärdet $C := B - A < 0$. Tag $\varepsilon = -C/2 > 0$. Från definitionen existerar det ett N sådant att $C + C/2 < c_n < C/2$, för varje $n > N$. Men då $C < 0$ så får vi att $c_n < C/2 < 0$ för $n > N$. Detta strider mot att $c_n \geqslant 0$, för varje $n \geqslant 1$. Alltså är $A \geqslant B$.

■

Sats 4.7. *Om $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är en växande och uppåt begränsad talföljd är så är den konvergent och*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \geqslant 1\}.$$

BEVIS: Eftersom $\{a_n : n \geqslant 1\}$ är en delmängd av de reella talen som är uppåt begränsad så finns enligt supremumaxiomet 2.4 en minsta övre begränsning. Låt oss kalla denna minsta övre begränsning till $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ för K, d.v.s. $K = \sup\{a_n : n \geqslant 1\}$. Då K är den minsta övre begränsningen till talföljden så finns det element i talföljden godtyckligt nära K och i vissa fall även lika stora som K. Alltså, för varje givet $\varepsilon > 0$ finns ett N sådant att $|a_N - K| < \varepsilon$. Men då talföljden är växande kommer $|a_n - K| < \varepsilon$ för alla $n > N$. Vi är klara och har visat att gränsvärdet av talföljden är precis K, d.v.s.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = K.$$

■

På samma sätt visas att om $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är en avtagande och nedåt begränsad talföljd är så är den konvergent och

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \geqslant 1\}.$$

4.2 Binomialsatsen

Vi börjar med några exempel för att illustrera vad vi vill åstadkomma i detta delavsnitt.

Exempel 4.8. Antag att det finns fem personer och vi frågar oss följande: På hur många sätt kan dessa bilda en kö, d.v.s. en ordnad följd?

Svaret är att vi har fem möjligheter att välja den första personen, fyra möjligheter att välja den andra personen, o.s.v.. Vi får alltså $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ möjligheter. ▲

Definition 4.9. Låt $n \in \mathbb{N}$, då definieras

$$n! = \begin{cases} n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1, & n \geqslant 1, \\ 1, & n = 0. \end{cases}$$

Beteckningen kallas n-**fakultet**.

Exempel 4.10. Antag att det finns tio personer och vi vill bilda en kö bestående av fyra personer. På hur många sätt kan vi åstadkomma detta?

Svaret är att vi kan välja första personen på tio olika sätt, andra personer på nio olika sätt, tredje personen på åtta olika sätt och slutligen den fjärde personen på sju olika sätt. Alltså finns det

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \frac{10!}{6!} = \frac{10!}{(10-4)!}$$

olika sätt. Den sista identiteten är där för att illustrera hur svaret beror av parametrarna från frågeställningen. ▲

Läsaren kan själv verifiera att detta resonemang leder till att vi kan välja ut en kö på k personer från n stycken på

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

olika sätt. Här förutsätts att $k \leqslant n$.

Exempel 4.11. Antag att det finns tio personer och vi vill bilda en grupp bestående av fyra personer. Där ordningen på de utvalda inte spelar någon roll. På hur många sätt kan vi åstadkomma detta?

Vi vet från det tidigare exemplet att varje kö av fyra personer från tio kan väljas ut på $10!/(10-4)!$ olika sätt. Det betyder att om vi nu tar bort den inbördes ordningen så finns varje grupp med $4!$ gånger för mycket. Det vi vill är att dessa $4!$ olika köer är en och samma grupp. Vi måste alltså dividera med $4!$. Svaret är att vi kan välja ut fyra personer av tio till en grupp på

$$\frac{10!}{(10-4)!4!}$$

olika sätt. Det är värt att bekräfta att detta svar är symmetriskt i 4 och $10-4$. Jag menar att vi kunde lika gärna ha valt ut fyra personer genom att välja ut vilka sex personer som inte ska vara med. Att välja ut sex personer från tio till en grupp kan enligt ovan göras på

$$\frac{10!}{(10-6)!6!}$$

olika sätt. I båda fallen är svaret

$$\frac{10!}{4!6!}.$$

▲

Mer allmänt

Definition 4.12. Låt $n, k \in \mathbb{N}$ sådana att $k \leqslant n$. Vi definierar n**-över-**k som

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Vi har alltså definierat en notation och talesätt för svaret på den viktiga frågan: På hur många sätt kan vi välja ut k stycken saker från n stycken?

Vi är nu redo att beskriva satsen som delavsnittet handlar om

Sats 4.13 (Binomialsatsen)**.** *Låt $n \in \mathbb{N}$, då gäller att*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Bevis: Vänsterledet består av en multiplikation av n stycken faktorer av typen $(a+b)$. Om vi utför parentesmultiplikation så får vi termer av typen $a^k b^{n-k}$, så att den totala antalet faktorer är n. Frågan är hur många termer av denna typ vi får. Att välja ut k stycken a ur n parenteser kan göras på $\binom{n}{k}$ olika sätt. Alltså är vi klara. ■

4.3 Talet e

Exempel 4.14. Antag att vi har x kr på banken och att banken ger oss xr kr i ränta varje år. Efter ett år har vi alltså $(1+r)x$ kr. Antag vidare att banken ger oss halva räntan om vi endast har pengarna insatta halva året och analogt för andra tidsperioder av året. I vårt fall betyder det att vi har $(1+r/2)x$ kr efter ett halvår. Vi kan då utnyttja detta genom att ha x kr insatta ett halvår för att ta ut $(1+r/2)x$. Nu sätter vi in $(1+r/2)x$ samma dag och plockar vid årets slut ut $(1+r/2)$ gånger pengarna, dvs. $(1+r/2)(1+r/2)x$. Det senare kan skrivas om som

$$\left(1+\frac{r}{2}\right)\left(1+\frac{r}{2}\right)x = \left(1+\frac{r}{2}\right)^2 x = \left(1+r+\frac{r^2}{4}\right)x.$$

Vi har vunnit $r^2x/4$ på kuppen.

Om vi nu gör så här varje dag blir det

$$\left(1+\frac{r}{365}\right)^{365} x = \left(1+r+\frac{r^2}{4}+\dots\right)x.$$

Om vi gör det n gånger så blir det

$$\left(1+\frac{r}{n}\right)^n x,$$

vad händer nu då $n \to \infty$?

Vi kommer senare i detta avsnitt att se att detta gränsvärde går mot $e^r x$, där e är ett tal. Alltså har vi $e^r x$ pengar efter ett år. Banken kan nu använda strategin att de betalar ut ränta utefter denna modell redan från början. Om en kund vill ta ut pengar efter halva året så får de $e^{r/2}$ gånger pengarna. Med denna modell så kan de inte tjäna mer genom att ta ut och sätta in pengarna vid upprepade tillfällen. För en kund som har x pengar och gör detta efter ett halvår får vi, $e^{r/2}e^{r/2}x = e^r x$. Alltså är ränta på ränta redan inkluderad. Årsräntan är $1 + r_{year} = e^r$ eller $r_{year} = e^r - 1$. ▲

Definition 4.15. Vi definierar talet

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

För att definitionen ovan skall vara av någon mening så måste vi visa att gränsvärdet existerar.

Sats 4.16. *Talföljden* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *med*

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

är konvergent.

BEVIS: Vi vill verifiera att $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är växande och uppåt begränsad. Låt oss använda binomialsatsen 4.13

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}.$$

Vi studerar varje term i detalj.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!n^k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k} \\
&= \frac{1}{k!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} \\
&= \frac{1}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).
\end{aligned}$$

För att nu inse att talföljden är växande studerar vi a_n och a_{n+1}.

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

och analogt följer att

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right).$$

Låt oss jämföra de termer vi får för ett givet k. Vi har att

$$1 - \frac{i}{n} < 1 - \frac{i}{n+1}, \quad i = 1, 2, ..., k-1$$

vilket ger att

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) < \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right).$$

För varje k i summorna är termen från a_{n+1} större än den från a_n. Dessutom innehåller a_{n+1} en term mer än a_n som också ger ett positivt bidrag. Alltså är $a_{n+1} > a_n$ för alla $n \geqslant 1$.

Låt oss nu även verifiera att $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är uppåt begränsad. Återigen använder vi oss av framställningen

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!},$$

då varje parantes är mindre än 1.

Vi behöver olikheten $k! > 2^k$ för alla $k \geqslant 4$. Olikheten kan ekvivalent beskrivas som $k!/2^k > 1$, för alla $k \geqslant 4$. Vi har följande

$$\frac{k!}{2^k} = \frac{k(k-1)(k-2)\cdots 2\cdot 1}{2\cdot 2\cdot 2\cdots 2} = \frac{k}{2}\frac{k-1}{2}\cdots\frac{5}{2}\frac{4}{2}\frac{3}{2}\frac{2}{2}\frac{1}{2} > \frac{k}{2}\frac{k-1}{2}\cdots\frac{5}{2} > 1,$$

eftersom varje faktor är större än 1.

Detta passar nu perfekt för vår uppskattning.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} &= \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k!} < 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{2^k}\\ &= 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k} < 1+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}.\end{aligned}$$

Vi påminner oss nu om formeln för en geometrisk summa,

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

I vårt fall får vi

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} < 1+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k} = 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 1+2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) < 3.$$

Vi har nu visat att $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ både är växande och uppåt begränsad vilket ger att $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är konvergent. ■

Exempel 4.17. Vi får även talet e som gränsvärde ifall vi låter $n \to -\infty$. Nämligen,

$$\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Lösning: Låt $m = -n$, vi får

$$\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}$$
$$= \lim_{m\to\infty}\left(\frac{m}{m-1}\right)^m = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^m.$$

Låt nu $k = m-1$ och nyttja 4.5 b). Alltså är

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^m = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\left(1+\frac{1}{k}\right) = e.$$

▲

Definition 4.18. Inversen till exponentialfunktionen med e som bas kallas för den **naturliga logaritmfunktionen** och betecknas $x \mapsto \ln x$.

4.4 Standardgränsvärden

Nästa sats säger oss att exponentiell tillväxt är snabbare än polynomiell tillväxt och fakultet växer snabbare än exponentiell tillväxt.

Sats 4.19. *Låt $a > 1$ och $b \in \mathbb{R}$. Då gäller att*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^b} = \infty, \tag{4.1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{b^n} = \infty. \tag{4.2}$$

Bevis: Vi börjar med att visa (4.1). I fallet då $b \leqslant 0$ inser vi att resultatet följer. Så, antag att $b > 0$. Eftersom $a > 1$ så gäller att $a^{1/b} > 1$. Vi låter $a^{1/b} = 1+p$, där $p > 0$. Vi har att

$$\frac{a^n}{n^b} = \left(\frac{a^{n/b}}{n}\right)^b = \left(\frac{(1+p)^n}{n}\right)^b.$$

Det räcker nu att visa att

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+p)^n}{n} = \infty.$$

Med hjälp av binomialsatsen (se sats 4.13), där vi endast kommer att utnyttja en term, får vi

$$\frac{(1+p)^n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k \geqslant \frac{1}{n}\binom{n}{2}p^2 = \frac{n(n-1)p^2}{2n} = \frac{(n-1)p^2}{2} \to \infty,$$

då $n \to \infty$.

Låt oss nu visa (4.2). Bilda

$$c_n = \frac{n!}{b^n}.$$

Låt N vara sådant att $N > 2b$ och notera att

$$c_{n+1} = \frac{(n+1)!}{b^{n+1}} = \frac{(n+1) \cdot n!}{b \cdot b^n} = \frac{n+1}{b} c_n.$$

Vi har att

$$c_{N+j} = \frac{N+j}{b} \cdot \frac{N+j-1}{b} \cdots \frac{N+1}{b} c_N \geqslant 2^j c_N \to \infty,$$

då $j \to \infty$. ■

4.5 Bolzano-Weierstrass sats

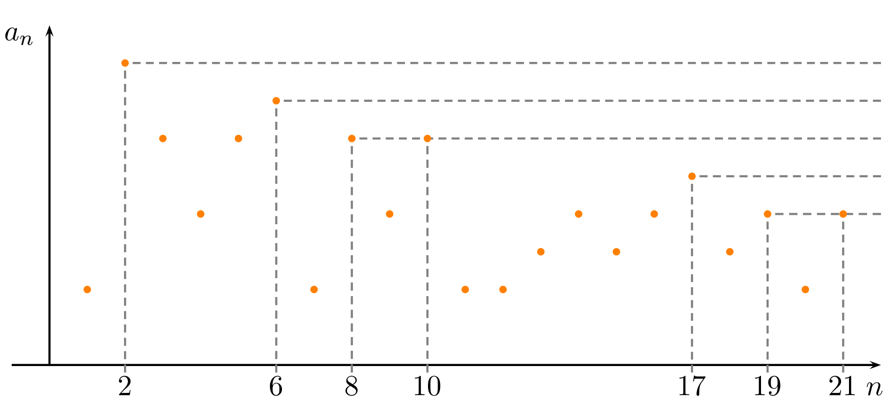
Låt $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en talföljd. Om vi endast studerar en del av talen a_n, men fortfarande oändligt många, i talföljden och bildar en egen talföljd av dessa så sägs denna nya talföljd vara en **delföljd** av den ursprungliga talföljden. Den nya talföljden betecknas ofta $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, där $n_k \in \mathbb{N}$ är en strängt växande talföljd. Vi ger ett exempel för att klargöra notationen.

Exempel 4.20. Låt $a_n = 2n$. Talföljden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ges då av $2, 4, 6, 8, \ldots$. En delföljd till denna är när vi endast betraktar var femte tal, alltså $2, 12, 22, 32, \ldots$. Den nya talföljden betecknas $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, där $n_k = 5(k-1)+1$. D.v.s., för n_1 (då $k=1$) får vi $a_{n_1} = a_1 = 2$, för n_2 (då $k=2$) får vi $a_{n_2} = a_6 = 12$, o.s.v. ▲

Sats 4.21 (Bolzano-Weierstrass sats). *Låt $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en begränsad talföljd. Då finns det en konvergent delföljd.*

Bevis: Om vi lyckas visa att det finns en växande eller avtagande delföjd så vet vi från sats 4.7 att den kommer att vara konvergent.

Låt $A = \{n \colon a_n \geqslant a_m,\ \text{för varje } m \geqslant n\}$. Mängen A beskriver alla index n_k av tal i $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sådana att alla resterande tal i följden är mindre eller lika med talet a_{n_k}.



I figuren ovan innehåller A indexen 2, 6, 8, 10, 17, 19, 21, $\ldots$.

Om antalet index n_k i A är oändligt många bildar $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ en avtagande delföljd. Vi är färdiga i detta fall.

Om antalet index i A är ändligt många så finns det ett största index i A om nu inte A är tomma mängden, låt oss kalla detta index för M. Nu kan vi välja vårt första tal i talföljden $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ till a_{M+1} eller a_1 i fallet att A var tomma mängden. Eftersom detta index är större än M så finns det större tal än a_{M+1} i talföljden $(a_n)_{n=M+1}^{\infty}$. Låt n_2 vara ett index sådant att $a_{n_2} > a_{M+1}$. Eftersom $n_2 \notin A$ så finns det ett index $n_3 > n_2$ sådant att $a_{n_3} > a_{n_2}$. Denna process leder till en växande talföljd $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ som är konvergent enligt sats 4.7.

$\blacksquare$

Övning 4.1. Bevisa sats 4.5 c).

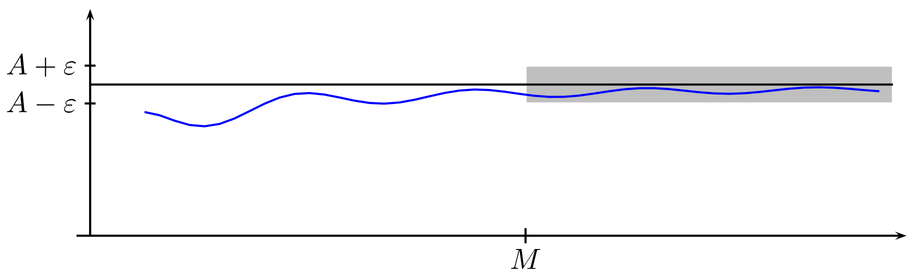
Övning 4.2. Visa att en konvergent talföljd är begränsad.

5 Gränsvärden av funktioner vid oändligheten

Definition 5.1. Låt f vara en funktion definierad i (a, ∞) för något a. Vi säger att f **konvergerar** mot gränsvärdet A då x går mot ∞ om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett M sådant att $|f(x) - A| < \varepsilon$ för varje $x > M$. Vi skriver detta

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A.$$

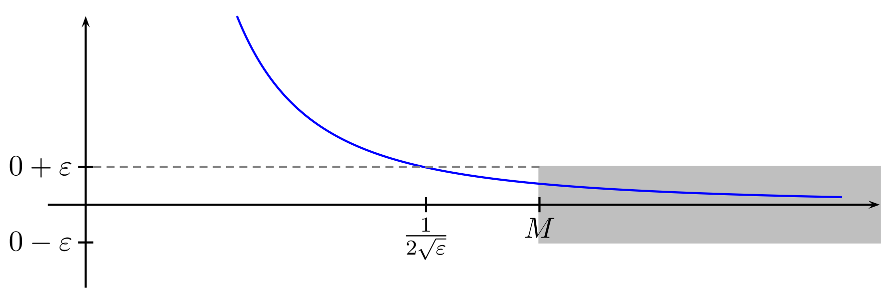
Alternativt skriver vi att $f(x) \to A$ då $x \to \infty$. Om inget sådant A existerar kallas f **divergent** då x går mot ∞.



Exempel 5.2. Visa att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{4x^2} = 0.$$

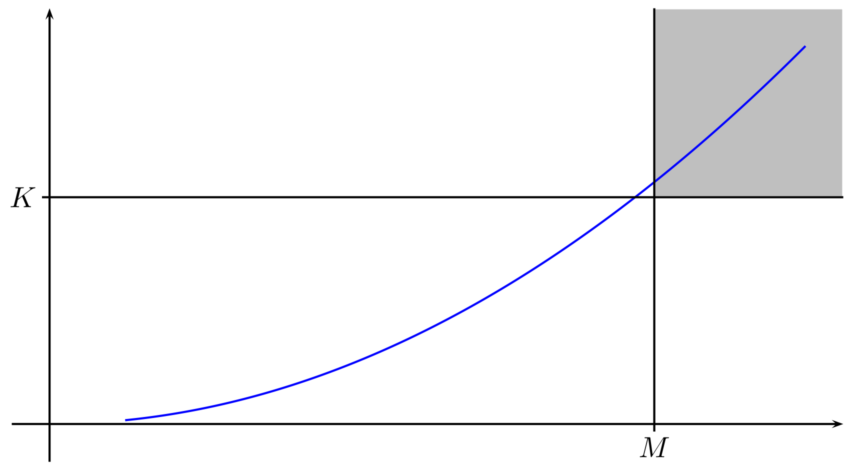
Låt $\varepsilon > 0$ vara givet. Vi vill visa att det finns ett M sådant att $|f(x) - 0| < \varepsilon$ för varje $x > M$. Vi har att $|f(x) - 0| < \varepsilon$ om och endast om $\frac{1}{4x^2} < \varepsilon$. Det senare gäller om och endast om $x > \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}$. Vi kan alltså välja M till något tal större än $\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}$.



Observera att M är beroende av ε. Förändras ε så kan vi behöva byta värdet på M. Vi kan förtydliga detta genom att skriva $M = M(\varepsilon)$. ▲

Definition 5.3. Låt f vara en funktion definierad i (a, ∞) för något a. Vi säger att f har det **oegentliga gränsvärdet** ∞ då x går mot ∞ om det för varje K finns ett M sådant att $f(x) > K$ för varje $x \geqslant M$. Vi skriver detta

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$



På samma vis som ovan definierar vi gränsvärden och oegentliga gränsvärden mot $-\infty$.

Precis som för talföljder så gäller följande sats

Sats 5.4. *Låt f och g vara funktioner sådana att $f(x) \to A$ och $g(x) \to B$, då $x \to \infty$. Då följer att*

a) $f(x) + g(x) \to A + B$, *då* $x \to \infty$,

b) $f(x)g(x) \to AB$, *då* $x \to \infty$,

c) om $B \neq 0$ *så följer att* $f(x)/g(x) \to A/B$, *då* $x \to \infty$.

d) om $f(x) \leqslant g(x)$, *för alla* $x \in (a, \infty)$ *så gäller att* $A \leqslant B$.

Beviset för denna sats sammanfaller sånär som på notation beviset för sats 4.5. Det är lämnat till läsaren, som en övning i notation, att utföra dessa bevis. För c) gäller att a behöver väljas tillräckligt stort så att $g(x) \neq 0$, för varje $x \in (a, \infty)$.

Det är värt att notera att vi kan tillåta att $A = \infty$ och/eller $B = \infty$ med de formella räknereglerna:

$$\begin{aligned}
&\infty \cdot \infty = \infty, \\
&\infty + \infty = \infty, \\
&x \cdot \infty = \infty, \quad \text{där } x > 0, \\
&x + \infty = \infty, \quad \text{där } x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Observera dock att följande uttryck är odefinierade

$$\frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty.$$

Sats 5.5. *Låt $a > 1$ och $b \in \mathbb{R}$ då gäller följande gränsvärden*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^b} = \infty, \tag{5.1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^b}{\log_a x} = \infty. \tag{5.2}$$

Bevis: Vi börjar med att visa (5.1) genom att överföra problemet på (4.1). Låt m vara ett heltal som uppfyller att $x - 1 < m \leqslant x$. Precis som i beviset av (4.1) så räcker det med att visa att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x} = \infty.$$

Vi har för $x \geqslant 1$ att

$$\frac{a^x}{x} \geqslant \frac{a^m}{2m} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^m}{m} \to \infty, \tag{5.3}$$

då $x \to \infty$, enligt (4.1).

För att visa (5.2) så låter vi $x = a^t$. Detta medför att $x \to \infty$ blir ekvivalent med att $t \to \infty$. Vi får alltså att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^b}{\log_a x} = \lim_{t\to\infty} \frac{a^{bt}}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{(a^b)^t}{t} = \infty, \tag{5.4}$$

enligt (5.1). ■

5.1 Övningar

Övning 5.1. Bevisa sats 5.4

Övning 5.2. Bestäm gränsvärdet av $x \mapsto x^{1/x}$, då $x \to \infty$.

6 Lokala gränsvärden

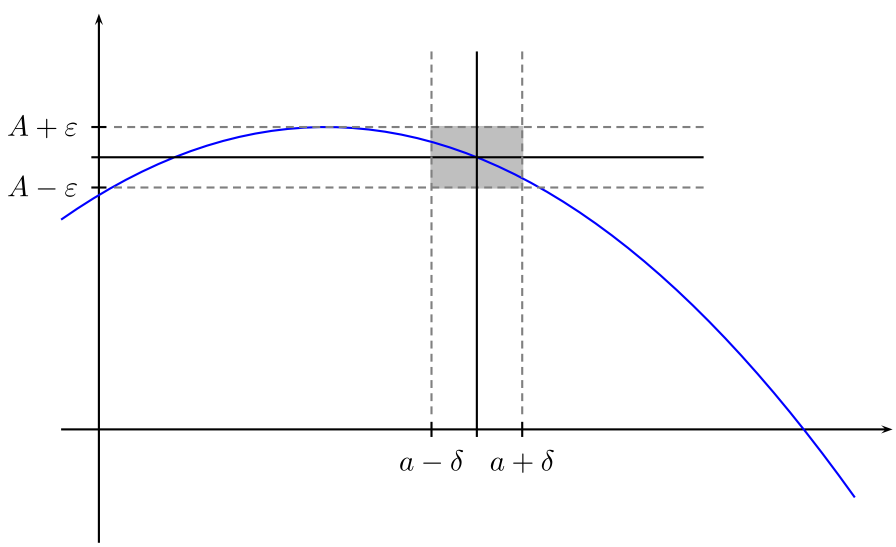
Definition 6.1. Låt f vara en funktion sådan att varje punkterad omgivning till $x = a$ innehåller punkter i D_f. Vi säger att f **konvergerar mot** A då x går mot a om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett δ sådant att $|f(x) - A| < \varepsilon$ för varje $x \in D_f$ som uppfyller att $0 < |x - a| < \delta$. Vi skriver detta

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

eller $f(x) \to A$, då $x \to a$.

Vänster- och **högergränsvärden** definieras genom att endast studera funktionsvärdena för $x < a$, respektive $x > a$. Vi använder då notationen $x \to a-$ för vänstergränsvärde och $x \to a+$ för högergränsvärde. För att ett gränsvärde ska existera måste vänster- och högergränsvärdena finnas och vara lika.

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = A$$



Exempel 6.2. Visa att

$$\lim_{x \to 3} x^2 = 9.$$

Låt $\varepsilon > 0$, vi vill finna ett δ sådant att $|x^2 - 9| < \varepsilon$, då $0 < |x - 3| < \delta$. Vi har att

$$|x^2 - 9| = |x + 3| \cdot |x - 3| \leqslant 20|x - 3| < 20\delta.$$

Vi vill att detta ska vara mindre än ε, dvs.

$$20\delta < \varepsilon,$$

vilket är ekvivalent med att

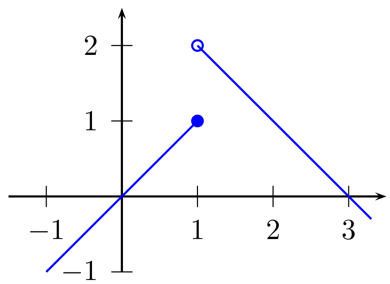
$$\delta < \frac{\varepsilon}{20}.$$

Vi väljer alltså δ till något tal mindre än $\varepsilon/20$. ▲

Exempel 6.3. Låt

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{om } x \leqslant 1 \\ 3 - x, & \text{om } x > 1 \end{cases}$$

Eftersom $\lim_{x\to 1-} f(x) = 1$ och $\lim_{x\to 1+} f(x) = 2$ så existerar inte $\lim_{x\to 1} f(x)$. Grafen nedan illustrerar vad som händer.

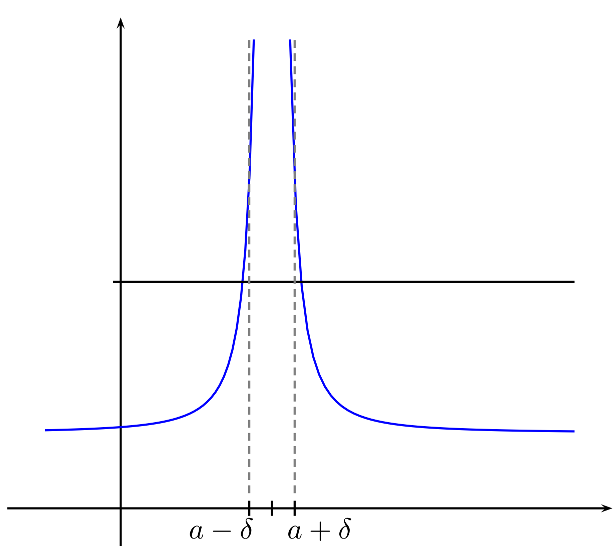


▲

Definition 6.4. Låt f vara en funktion sådan att varje punkterad omgivning till $x = a$ innehåller punkter i D_f. Vi säger att f har det **oegentliga gränsvärdet** ∞ då x går mot a om det för varje K finns ett δ sådant att $f(x) > K$ för varje $0 < |x - a| < \delta$. Vi skriver detta

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty.$$

Vi definierar oegentliga vänster- och högergränsvärden och mot $-\infty$ på ett analogt vis.



Sats 6.5. *Låt f och g vara funktioner sådana att $f(x) \to A$ och $g(x) \to B$, då $x \to a$. Då följer att*

a) $f(x) + g(x) \to A + B$*, då* $x \to a$*,*

b) $f(x)g(x) \to AB$*, då* $x \to a$*,*

c) om $B \neq 0$ *så följer att* $f(x)/g(x) \to A/B$*, då* $x \to a$*,*

d) om $f(x) \leqslant g(x)$ *för varje* x *i en omgivning av* a *så följer att* $A \leqslant B$*.*

Beviset för denna sats sammanfaller sånär som på notation beviset för sats 4.5. Det är lämnat till läsaren, som en övning i notation, att utföra dessa bevis.

Exempel 6.6. Visa att

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x}{|x|}$$

inte existerar.

Lösningen är att studera höger- respektive vänstergränsvärde separat. Vi börjar med högergränsvärdet. Vi får

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^2 + x}{|x|} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x\to 0+} (x + 1) = 1.$$

Vänstergränsvärdet blir

$$\lim_{x\to 0-} \frac{x^2 + x}{|x|} = \lim_{x\to 0-} \frac{x^2 + x}{-x} = \lim_{x\to 0-} (-x - 1) = -1.$$

Eftersom höger- och vänstergränsvärdet inte sammanfaller existerar inte gränsvärdet.

▲

6.1 Övningar

Övning 6.1. Bevisa sats 6.5.

7 Kontinuitet

7.1 Definitionen och exempel

Definition 7.1. Låt f vara en funktion sådan att varje punkterad omgivning till $x = a$ innehåller punkter i D_f och att $a \in D_f$. Vi säger att f är **kontinuerlig** i a om

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Om f är kontinuerlig i alla punkter i sin definitionsmängd sägs f vara **kontinuerlig**.

Det är värt att notera att om x sätts till $a + h$ i definitionen ovan så får vi en alternativt sätt att uttrycka kontinuitetsvillkoret. Vi har då att f är kontinuerlig i a om

$$\lim_{h \to 0} f(a + h) = f(a) \tag{7.1}$$

eller f är kontinuerlig om det för varje $x \in D_f$ gäller att

$$\lim_{h \to 0} f(x + h) = f(x). \tag{7.2}$$

Att en funktion f är kontinuerlig i $a \in D_f$ betyder att vänstergränsvärdet, högergränsvärdet och funktionsvärdet i a sammanfaller. Detta visar även att det finns en omgivning till a där funktionen är begränsad, vilket vi kommer att utnyttja i sats 7.6.

Kontinuitet förknippas ofta med följande räkneregel:

Sats 7.2. *Låt f vara kontinuerlig i punkten b och låt $g(x) \to b$, då $x \to a$. Då gäller att*

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right).$$

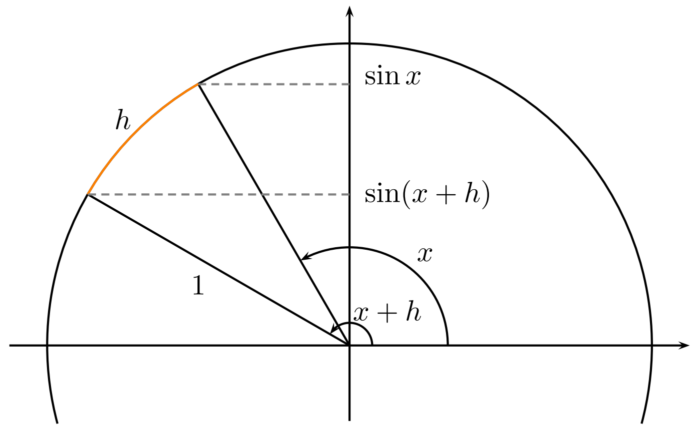
Bevis: Högerledet kan skrivas som $f(b)$ eftersom $g(x) \to b$, då $x \to a$. Vi vill visa att vänsterledet är $f(b)$. Tag $\varepsilon > 0$. Vi vill visa att det finns ett δ sådant att $|f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon$ då $0 < |x - a| < \delta$. Då f är kontinuerlig i b så följer att det finns ett δ_1 sådant att $|f(y) - f(b)| < \varepsilon$, då $|y - b| < \delta_1$. Då $g(x) \to b$, då $x \to a$ så följer att vi kan välja ett δ så att $|g(x) - b| < \delta_1$, då $0 < |x - a| < \delta$. Vilket visar satsen.

■

Kommentar 7.3. Vi kan även tillåta att $a = \infty$ i sats 7.2. Beviset blir då lite annorlunda och lämnas som en övning åt läsaren.

Sats 7.4. *Funktionerna $x \mapsto \sin x$ och $x \mapsto \cos x$ är kontinuerliga.*

Bevis: Vi använder (7.2) för att visa kontinuiteten. Vi vill visa att $\sin(x + h) - \sin x \to 0$ och $\cos(x + h) - \cos x \to 0$, då $h \to 0$. Studera bilden nedan (där vi har antagit att x och h är positiva)



Vi ser att det kortaste avståndet mellan punkterna $(\cos x, \sin x)$ och $(\cos(x+h), \sin(x+h))$ är från Pythagoras sats

$$\sqrt{(\cos(x+h)-\cos x)^2+(\sin(x+h)-\sin x)^2} \leqslant h.$$

Att det kortaste avståndet är mindre än h följer av att h är längden av den bågnade delen av enhetscirkeln mellan de aktuella punkterna. I fallet att $h<0$ blir olikheten

$$\sqrt{(\cos(x+h)-\cos x)^2+(\sin(x+h)-\sin x)^2} \leqslant |h|.$$

Vi har att

$$\begin{aligned}|\sin(x+h)-\sin x| &= \sqrt{(\sin(x+h)-\sin x)^2}\\ &\leqslant \sqrt{(\cos(x+h)-\cos x)^2+(\sin(x+h)-\sin x)^2}\\ &\leqslant |h| \to 0,\end{aligned}$$

då $h \to 0$. Vi har visat att $x \mapsto \sin x$ är kontinuerlig. Räkningen för att visa $x \mapsto \cos x$ är kontinuerlig är analog. ∎

7.2 Satser om kontinuerliga funktioner

Sats 7.5. *Låt $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion. Då är f begränsad.*

Bevis: Låt oss visa att f är uppåt begränsad med hjälp av ett motsägelsebevis. Antag därför att f är uppåt obegränsad. Då gäller att för varje heltal k så finns ett x_k sådant att

$$f(x_k) > k. \tag{7.3}$$

Vi har nu en talföljd $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ med $x_n \in [a,b]$, för varje n. Alltså är talföljden begränsad och enligt Bolzano-Weierstrass sats (se 4.21) så finns det en konvergent delföljd $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$. Låt oss beteckna gränsvärdet med x, alltså $x_{n_k} \to x$, då $k \to \infty$. Eftersom $x \in [a,b]$ och f är kontinuerlig i x så har vi att $f(x_{n_k}) \to f(x)$, då $k \to \infty$. Men från (7.3) gäller att

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \infty.$$

Vi har en motsägelse.

På liknande sätt kan vi visa att f är nedåt begränsad. ■

Sats 7.6. *Summan och produkten av kontinuerliga funktioner är kontinuerlig.*

Bevis: Låt f och g vara två kontinuerliga funktioner och antag att $a \in D_f \cap D_g$, d.v.s. a är en punkt som finns i definitionsmängden för f såväl som g. Vi har att

$$\lim_{h\to 0}(f(a+h) - f(a)) = 0 \tag{7.4}$$

$$\lim_{h\to 0}(g(a+h) - g(a)) = 0. \tag{7.5}$$

Vi vill visa att

$$\lim_{h\to 0}(f(a+h) + g(a+h) - (f(a) + g(a))) = 0 \tag{7.6}$$

och

$$\lim_{h\to 0}(f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)) = 0 \tag{7.7}$$

Att summan (7.6) är kontinuerlig följer direkt från (7.4) och (7.5) enligt

$$\lim_{h\to 0}(f(a+h) + g(a+h) - (f(a) + g(a))) \tag{7.8}$$

$$= \lim_{h\to 0}(f(a+h) - f(a)) + \lim_{h\to 0}(g(a+h) - g(a)) = 0. \tag{7.9}$$

För produkten (7.7) behöver vi lägga till och dra ifrån termen $f(a+h)g(a)$ och sedan utnyttja att då f är kontinuerlig så är f begränsad (se sats 7.5). Vi får att det finns ett M sådant att

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}|f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)| \\
&\quad= \lim_{h\to 0}|f(a+h)g(a+h) - f(a+h)g(a) + f(a+h)g(a) - f(a)g(a)| \\
&\quad\leqslant \lim_{h\to 0}|f(a+h)(g(a+h) - g(a))| + \lim_{h\to 0}|f(a+h) - f(a))g(a)| \\
&\quad\leqslant \lim_{h\to 0} M|g(a+h) - g(a)| + \lim_{h\to 0}|f(a+h) - f(a))g(a)| = 0.
\end{aligned}$$

■

Följdsats 7.7. *Polynom är kontinuerliga funktioner.*

Bevis: Eftersom polynom är summor och produkter av räta linjer av typen $y = kx + m$ så räcker det enligt sats 7.6 att konstatera att dessa linjer är kontinuerliga. ■

Exempel 7.8. Polynomet $f(x) = 2x^4 - x + 3 = (2x) \cdot x \cdot x \cdot x + (-x + 3)$ och kan med andra ord beskrivas som summor och produkter av de räta linjerna $2x$, x och $-x + 3$. ▲

Exempel 7.9. Bestäm
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$
LÖSNING: Uttrycket kan skrivas om enligt följande

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n/x}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{1}{n/x}\right)^{n/x}\right)^x.$$

Eftersom funktionen $t \mapsto t^x$ är kontinuerlig (se sats 7.7) har vi identiteten

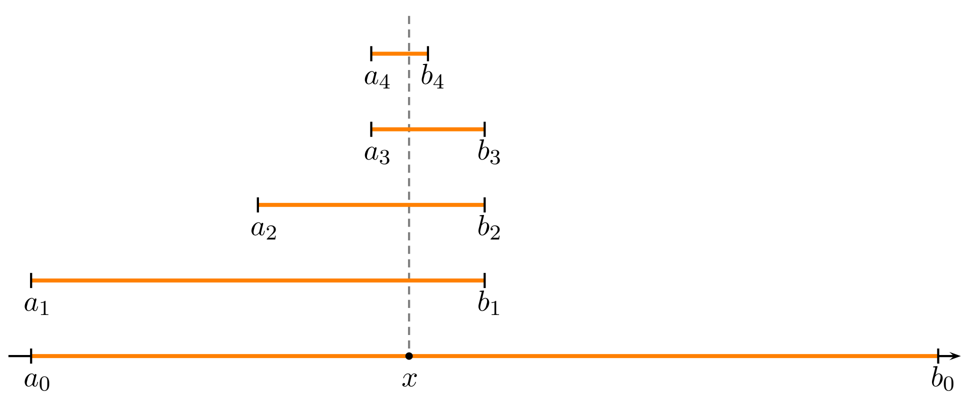
$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n/x}\right)^{n/x}\right)^x = \left(\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n/x}\right)^{n/x}\right)^x.$$

Med hjälp av variabelbytet $m = n/x$ och definition 4.15 får vi att

$$\left(\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n/x}\right)^{n/x}\right)^x = \left(\lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right)^x = e^x.$$

▲

Lemma 7.10 (Intervallhalvering)**.** *Låt $[a_j, b_j]$ vara intervall, för varje $j \in \mathbb{N}$, med egenskapen att givet $[a_j, b_j]$ så får vi $[a_{j+1}, b_{j+1}]$ genom att låta $a_{j+1} = a_j$ och b_{j+1} vara mittpunkten på $[a_j, b_j]$ eller tvärt om. Då gäller att det finns ett unikt element x sådant att $x \in [a_j, b_j]$, för varje $j \in \mathbb{N}$.*



BEVIS: Talföljden $(a_j)_{j=0}^{\infty}$ är växande och uppåt begränsad av b_0. Enligt sats 4.7 konvergerar $(a_j)_{j=0}^{\infty}$, då $j \to \infty$. Även $(b_j)_{j=0}^{\infty}$ konvergerar eftersom den är avtagande och nedåt begränsad. Låt $a_j \to x_a$ och $b_j \to x_b$, då $j \to \infty$. Vi vill visa att $x_a = x_b$.

Antag att $x_a \neq x_b$ och låt $d = |x_a - x_b|$ beskriva avståndet mellan de båda gränsvärdena. Vi vet att

$$b_j - a_j = \frac{b_0 - a_0}{2^j} \to 0,$$

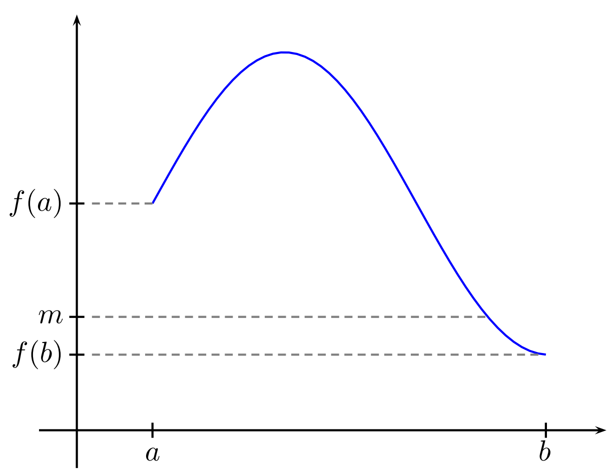
då $j \to \infty$. Låt $\varepsilon = d/4$, då finns det ett N sådant att $|a_j - x_a| < \varepsilon$, $|b_j - x_b| < \varepsilon$ och $|b_j - a_j| < \varepsilon$, för varje $j > N$. Triangelolikheten 3.19 ger nu att för $j > N$ har vi

$$\begin{aligned} |x_b - x_a| &= |x_b - b_j + b_j - a_j + a_j - x_a| \\ &\leqslant |x_b - b_j| + |b_j - a_j| + |a_j - x_a| \\ &< 3\varepsilon < d. \end{aligned}$$

Detta motsäger att $d = |x_a - x_b|$. Alltså måste $x_a = x_b$. ■

Sats 7.11 (Satsen om mellanliggande värde)**.** *Låt f vara kontinuerlig och låt $[a, b] \subseteq D_f$. Då antar f alla värden mellan $f(a)$ och $f(b)$.*

Kommentar 7.12. Satsen säger att om $f(a) \leqslant m \leqslant f(b)$ (eller $f(b) \leqslant m \leqslant f(a)$) så finns det ett $c \in [a, b]$ sådant att $f(c) = m$.



Bevis: Antag att $f(a) < m < f(b)$. Vi vill visa att det finns ett $x \in [a, b]$ sådant att $f(x) = m$. Låt oss nyttja intervallhalveringsmetoden, alltså lemma 7.10. Låt $a_0 = a$, $b_0 = b$ och c vara mittpunkten på intervallet $[a_0, b_0]$. Alltså,

$$c = a_0 + \frac{b_0 - a_0}{2}.$$

Om $f(c) > m$, så väljer vi $a_1 = a_0$ och $b_1 = c$, annars väljer vi $a_1 = c$ och $b_1 = b_0$. Vi upprepar nu denna algoritm och konstaterar från lemma 7.10 att det finns ett unikt element x som har egenskapen att $x \in [a_j, b_j]$, för varje $j \in \mathbb{N}$. Vi har att

$$f(a_j) \leqslant m \leqslant f(b_j),$$

för varje $j \in \mathbb{N}$. Om vi låter $j \to \infty$ och använder oss av 6.5 d) så får vi relationen $f(x) \leqslant m \leqslant f(x)$. Alltså är $f(x) = m$ och vi är klara. ■

Exempel 7.13. Har ekvationen $x^3 - 5x + 3 = 0$ någon lösning i intervallet $[-1, 1]$?

LÖSNING: Bilda funktionen $f(x) = x^3 - 5x + 3$. Eftersom f är kontinuerlig och $f(-1) = 7$ och $f(1) = -1$ så finns det enligt satsen om mellanliggande värde (se sats 7.11) ett $x_0 \in (-1, 1)$ sådant att $f(x_0) = 0$. Alltså har ekvationen någon lösning i intervallet $[-1, 1]$. ▲

Sats 7.14. *Låt $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion. Då har f ett max- och minvärde.*

Kommentar 7.15. Satsen säger att det finns en punkt $x_0 \in [a, b]$ sådan att $f(x) \leqslant f(x_0)$, för alla $x \in [a, b]$ och analogt för minvärdet.

BEVIS: Låt oss visa att f antar sitt maxvärde. Fallet med minvärde är analogt. Eftersom f är kontinuerlig är f från sats 7.5 begränsad. Alltså är värdemängden till f en delmängd av $[A_0, B_0]$ för något A_0 och B_0. Vi ska nu använda intervallhalveringsmetoden i vårt resonemang. Låt oss dela intervallet mitt itu, så vi får $[A_0, C]$ och $[C, B_0]$, där C är mittpunkten i intervallet $[A_0, B_0]$. Om $f(x) \geqslant C$, för något $x \in [a, b]$, så väljer vi som $[A_1, B_1]$ intervallet $[M, B_0]$, annars $[A_0, M]$. Vi återupprepar denna algoritm och får att det finns ett $x_j \in [a, b]$ sådant att $A_j \leqslant f(x_j) \leqslant B_j$. Enligt lemma 7.10 så finns det även ett element V sådant att $V \in [A_j, B_j]$, för varje $j \in \mathbb{N}$. För varje j. Vi får alltså att

$$\lim_{j \to \infty} f(x_j) = V.$$

Det återstår att visa att det finns ett $x \in [a, b]$ sådant att $f(x) = V$, d.v.s. att den övre begränsningen antas. Eftersom $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ är en begränsad talföljd så finns det från Bolzano-Weierstrass sats (se 4.21) en konvergent delföljd $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ med gränsvärde x. Vi har då f är kontinuerlig

$$f(x) = f\left(\lim_{k \to \infty} x_{n_k}\right) = \lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = V.$$

■

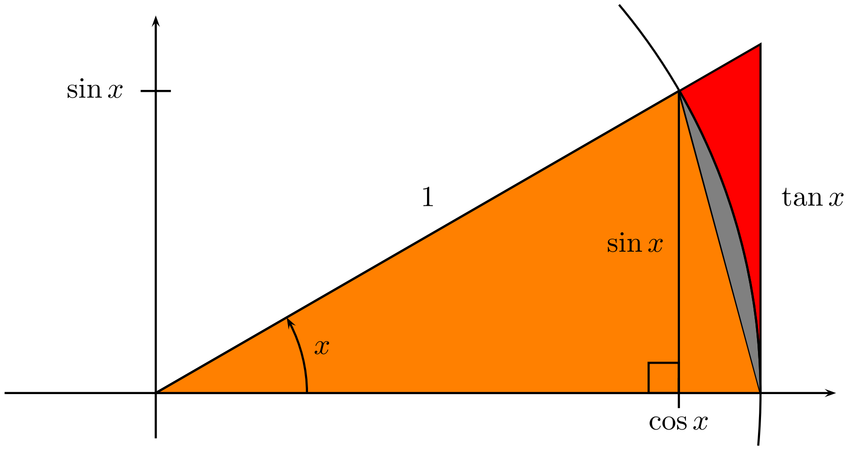
7.3 Lokala standardgränsvärden

Hjälpsats 7.16. *Olikheten*

$$|\sin x| \leqslant |x| \leqslant |\tan x|, \tag{7.10}$$

gäller för alla $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

BEVIS: Antag först att $x \in [0, \pi/2)$. Vi vill då visa att $\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$. Låt oss studera tre areor enligt figuren



Den minsta arean är den vi får från triangeln som har höjden $\sin x$ och bredden ett. Den mittersta arean får vi från cirkelsektorn med vinkeln x och den största arean får vi från den triangel som har höjden $\tan x$ och bredden ett. Areornas relationer är

$$\frac{\sin x}{2} \leqslant \frac{x}{2\pi}\pi \leqslant \frac{\tan x}{2}$$

eller enklare

$$\sin x \leqslant x \leqslant \tan x.$$

Antag nu att $x \in (-\pi/2, 0)$. Då är $-x \in (0, \pi/2)$ och från den bevisade delen av satsen har vi att

$$\sin(-x) \leqslant -x \leqslant \tan(-x),$$

eller

$$-\sin x \leqslant -x \leqslant -\tan x.$$

Då $x \in (-\pi/2, 0)$ är $-\sin x = |\sin x|$, $-x = |x|$ och $-\tan x = |\tan x|$. Därmed följer att

$$|\sin x| \leqslant |x| \leqslant |\tan x|$$

även gäller då $x \in (-\pi/2, 0)$. ■

Sats 7.17 (Lokala standardgränsvärden)**.** *Följande gränsvärden gäller*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \tag{7.11}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \tag{7.12}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{7.13}$$

Bevis:

Bevis av 7.11: Vi börjar med att skriva om uttrycket enligt

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{x}\ln(1+x) = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Låt oss utföra variabelbytet $s = 1/x$. Gränsvärdet $x \to 0$ kommer att sammanfalla med $s \to \pm\infty$ (obs två gränsvärden!). Då vi vet att logaritmfunktionen är kontinuerlig, får vi att

$$\lim_{s\to\pm\infty} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{s}\right)^s \right) = \ln \left(\lim_{s\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{s}\right)^s \right) = \ln e = 1.$$

Bevis av 7.12: Låt oss direkt utföra variabelbytet $e^x - 1 = s$, vilket ger $x = \ln(1 + s)$

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{s}{\ln(1+s)} \to 1, \text{ då } s \to 0 \text{ (vilket är detsamma som } x \to 0).$$

Bevis av 7.13: Enligt sats 7.16 har vi relationen

$$|\sin x| \leqslant |x| \leqslant |\tan x|, \tag{7.14}$$

för alla x i en liten omgivning av 0. Låt oss dividera med $|x|$. Vi får att

$$\frac{|\sin x|}{|x|} \leqslant 1 \leqslant \frac{|\sin x|}{|x|} \frac{1}{\cos x}. \tag{7.15}$$

Sats 6.5 d) ger att relationen kvarstår efter att vi låtit $x \to \infty$. Alltså

$$\lim_{x\to 0} \frac{|\sin x|}{|x|} \leqslant 1 \leqslant \lim_{x\to 0} \frac{|\sin x|}{|x|} \frac{1}{\cos x}. \tag{7.16}$$

I den sista identiteten kan vi använda sats 6.5 b) som ger

$$\lim_{x\to 0} \frac{|\sin x|}{|x|} \leqslant 1 \leqslant \lim_{x\to 0} \frac{|\sin x|}{|x|}. \tag{7.17}$$

Alltså har vi

$$\lim_{x\to 0} \frac{|\sin x|}{|x|} = 1. \tag{7.18}$$

Observera till sist att

$$\frac{\sin x}{x} > 0,$$

för alla $x \neq 0$ sådana att $|x| < \pi/2$. Detta ger önskad likhet. ■

Exempel 7.18. Bestäm

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{\tan 5x}.$$

Lösningen är att utnyttja standardgränsvärden. Vi får

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{\tan 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{5} \cdot \frac{\ln(1+2x)}{2x} \cdot \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \cos 5x.$$

Den första och den andra faktorn är standardgränsvärden och går båda mot ett enligt sats 7.17. Vi utnyttjar nu sats 6.5 b) för kunna utföra dessa gränsvärden var för sig. Vi får att

$$\lim_{x\to 0} \frac{2}{5} \cdot \frac{\ln(1+2x)}{2x} \cdot \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \cos 5x = \frac{2}{5} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{2}{5}.$$

▲

7.4 Övningar

Övning 7.1. Visa att sats 7.2 gäller även för $a = \infty$, d.v.s. låt $f(x)$ vara kontinuerlig i punkten b och låt $g(x) \to b$, då $x \to \infty$. Då gäller att

$$\lim_{x\to\infty} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to\infty} g(x)\right).$$

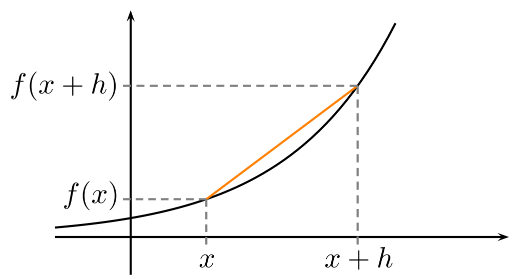
8 Derivata

8.1 Definitionen

Definition 8.1. Låt f vara en funktion definierad i en omgivning av x_0. Vi säger att f är **deriverbar** i punkten x_0 om

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{8.1}$$

existerar. Värdet $f'(x_0)$ kallas **derivatan** av f i punkten x_0. Om f är deriverbar i varje punkt i sin definitionsmängd så kallas f **deriverbar** och f' kallas för **derivatan**.



Det är värt att notera att vi endast kan derivera en funktion i en punkt om funktionen är definierad i en omgivning av punkten. Alltså kan vi inte derivera funktioner i ändpunkter av intervall.

8.2 Derivatan av elementära funktioner

Exempel 8.2. Låt $f(x) = e^x$. Enligt definitionen och (7.12) är

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} = e^x \left(\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} \right) = e^x.$$

Alltså är f deriverbar med derivatan $f'(x) = e^x$. ▲

Exempel 8.3. Låt $f\colon \{x \in \mathbb{R} \colon x \neq 0\} \to \mathbb{R}$ sådan att $f(x) = \ln |x|$. Låt först $x > 0$. Vi får enligt definitionen och (7.11) att

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1 + h/x)}{h} = \frac{1}{x} \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1 + h/x)}{h/x} = \frac{1}{x}.$$

Låt nu $x < 0$. Vi får för tillräckligt små h, sådana att $x + h < 0$ att

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(-(x+h)) - \ln(-x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1 + h/x)}{h} = \frac{1}{x}.$$

Alltså är f deriverbar med derivatan $f'(x) = 1/x$. ▲

Exempel 8.4. Låt $f(x) = \sin x$. Enligt definitionen och (7.13) är

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \sin x \left(\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x \left(\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \right) \\ &= \sin x \left(\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x. \end{aligned}$$

Låt oss närmare studera uttrycket

$$\frac{\cos h - 1}{h} = \frac{1 - \sin^2(h/2) - 1}{h} = -\frac{\sin^2(h/2)}{h} = -\frac{1}{2} \frac{\sin(h/2)}{h/2} \sin(h/2) \to 0,$$

då $h \to 0$, ty

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} = 1$$

och

$$\lim_{h\to 0} \sin(h/2) = 0.$$

Alltså är f deriverbar med derivatan $f'(x) = \cos x$. ▲

Sats 8.5. *Låt funktionen f vara deriverbar i intervallet (a, b). Då är f kontinuerlig i (a, b).*

Bevis: Antag att f är deriverbar i punkten $x \in (a, b)$, d.v.s. gränsvärdet

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

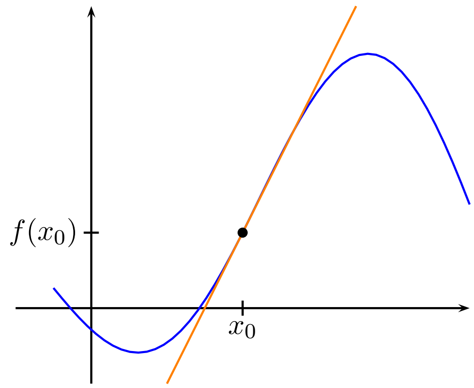
existerar. Vi vill visa att f är kontinuerlig i x, d.v.s. att $f(x + h) - f(x) \to 0$, då $h \to 0$. Vi har att

$$\lim_{h\to 0} (f(x+h) - f(x)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot h = f'(x) \cdot \lim_{h\to 0} h = 0.$$

Vi är klara. ■

8.3 Linjär approximation

Antag att vi vill studera en funktion f i en omgivning av en punkt x_0 och att vi vet värdena av $f(x_0)$ och $f'(x_0)$. Då kan vi approximera f i en omgivning av x_0 med hjälp av tangenten för f i punkten x_0.



Figur 8.1: Linjär approximation av f i punkten x_0.

Tangenten är en linje vars funktion är $T(x) = f'(x_0)x + m$. Eftersom $(x_0, f(x_0)$ är en punkt på linjen så är $f(x_0) = f'(x_0)x_0 + m$. Alltså blir tangentens funktion

$$T(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Exempel 8.6. Använd linjär approximation för att beräkna $\sqrt{4.01}\sin(0.01)$.

LÖSNING: Låt $f(x) = \sqrt{4+x}\sin x$. Alltså är

$$f'(x) = \frac{\sin x}{2\sqrt{4+x}} + \sqrt{4+x} \cdot \cos x.$$

Tangentlinjen för f i punkten $x = 0$ ges av

$$T(x) = f'(0)x + f(0) = 2x.$$

En approximation för $f(0.01)$ med hjälp av tangenten är alltså $T(0.01) = 0.02$.

▲

8.4 Derivationsregler

Sats 8.7. *Låt f och g vara deriverbara funktioner i punkten x. Då följer att $f + g$ och fg är deriverbara i punkten x. Derivatorna har följande samband*

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) \tag{8.2}$$
$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{8.3}$$

Om dessutom $g(x) \neq 0$ så följer att f/g är deriverbar i punkten x och

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \tag{8.4}$$

Bevis: Om vi visar sambanden (8.2), (8.3) och (8.4) så följer att $f+g$, fg och f/g är deriverbara i punkten x, (eftersom högerleden existerar från förutsättningarna i satsen).

Låt oss visa att $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$. Vi har

$$\begin{aligned}\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} &= \frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} \\ &= \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &\to f'(x)+g'(x),\end{aligned}$$

då $h \to 0$.

Vi lämnar beviset av (8.3) som en övning.

Antag nu även att $g(x) \neq 0$. Eftersom g är deriverbar i punkten x är g enligt sats 8.5 kontinuerlig i punkten x och därmed är g enligt lemma **??** skild från noll i någon omgivning av punkten x. Antag att $|h|$ är så litet i räkningen nedan så att $x+h$ tillhör denna omgivning och därmed är $g(x+h) \neq 0$. Vi har

$$\begin{aligned}&\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x+h) - \left(\frac{f}{g}\right)(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right) \\ &= \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} \\ &= \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} \\ &= \frac{1}{g(x+h)g(x)}\left(g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + f(x)\frac{g(x)-g(x+h)}{h}\right) \\ &\to \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2},\end{aligned}$$

då $h \to 0$. ■

Exempel 8.8. Låt $f(x) = \tan x$. Enligt (8.4)

$$f'(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Alltså är f deriverbar med derivatan $f'(x) = 1/\cos^2 x$. ▲

Sats 8.9 (Kedjeregeln)**.** *Antag att f är deriverbar i punkten y, g deriverbar i punkten x och $y = g(x)$. Då är $f \circ g$ deriverbar i punkten x med derivatan*

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x). \tag{8.5}$$

Bevis: Eftersom f är deriverbar så vet vi att funktionen ρ definierad som

$$\rho(k) = \frac{f(x+k)-f(x)}{k} - f'(x) \to 0, \tag{8.6}$$

då $k \to 0$. Vi kommer att använda formeln

$$f(x+k) - f(x) = k(f'(x) + \rho(k)). \tag{8.7}$$

Låt $k(h) = g(x+h) - g(x)$ och studera förändringskvoten

$$\begin{aligned}
\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} &= \frac{f(g(x) + g(x+h) - g(x)) - f(g(x))}{h} \\
&= \frac{f(g(x) + k(h)) - f(g(x))}{h} \\
&= \frac{(f'(g(x)) + \rho(k))k(h)}{h} \\
&= (f'(g(x)) + \rho(k))\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&\to f'(g(x))g'(x),
\end{aligned}$$

då $h \to 0$ och därmed även $k = g(x+h) - g(x) \to 0$. ■

Exempel 8.10. Låt $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ sådan att $f(x) = x^a$, där $a \in \mathbb{R}$ och $a \neq 0$. Vi använder oss av följande omskrivning

$$f(x) = x^a = e^{\ln x^a} = e^{a \ln x}$$

och använder oss av kedjeregeln och får att

$$f'(x) = e^{a \ln x} a \frac{1}{x} = a x^a \frac{1}{x} = a x^{a-1}.$$

Om $a \in \mathbb{Z}$ så kan f även definieras för negativa tal. För $x \in (-\infty, 0)$ så gäller att

$$f(x) = x^a = (-1)^a (-x)^a = (-1)^a e^{a \ln(-x)}$$

och därmed är

$$f'(x) = (-1)^a e^{a \ln(-x)} a \frac{1}{-x}(-1) = x^a a \frac{1}{x} = a x^{a-1}.$$

Slutligen har vi att om $a \geqslant 1$ är ett heltal är f även deriverbar i punkten 0. Vi har från definitionen att

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} h^{a-1} = \begin{cases} 0, & a \geqslant 2 \\ 1, & a = 1 \end{cases}$$

Vi observerar att även i detta fall kan vi beskriva derivatan med formeln

$$f'(x) = a x^{a-1}.$$

▲

8.5 Derivatan av inversa funktioner

Exempel 8.11. Visa att

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

LÖSNING: Eftersom arctan är inversen av tan så har vi identiteten

$$\tan(\arctan x) = x, \tag{8.8}$$

för alla $x \in \mathbb{R}$. För att beräkna derivatan av arctan så deriverar vi vänster- och högerledet. Vänsterledets derivata är från exempel 8.8 och sats 8.9 uttrycket

$$\frac{d}{dx}(\tan(\arctan x)) = \frac{1}{\cos^2(\arctan x)} \cdot \frac{d}{dx}(\arctan x) \tag{8.9}$$

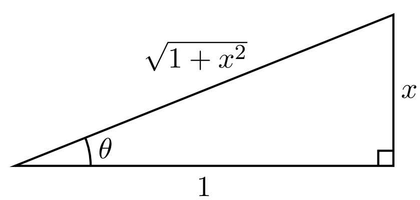
och högerledets derivata är 1. Eftersom vänster- och högerledet är en identitet så har de samma beroende av x. Alltså sammanfaller derivatorna, vi får

$$\frac{1}{\cos^2(\arctan x)} \cdot \frac{d}{dx}(\arctan x) = 1 \tag{8.10}$$

eller

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \cos^2(\arctan x). \tag{8.11}$$

Låt $\theta = \arctan x$. Talen θ och x har de samband som triangeln nedan visar



Hypotenusan har vi beräknat med hjälp av Pythagoras sats. Med hjälp av triangeln ser vi att

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Vi har alltså att

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \cos^2(\arctan x) = \cos^2\theta = \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2 = \frac{1}{1+x^2}.$$

Vi har visat att derivatan av $x \mapsto \arctan x$ är $x \mapsto 1/(1+x^2)$. ▲

Exempel 8.12. På liknande sätt som exempel 8.11 så kan man visa att

$$\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{8.12}$$

$$\frac{d}{dx}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{8.13}$$

Det är lämnat som en övning för läsaren att verifiera dessa derivator. ▲

Exempel 8.11 och 8.12 kan generaliseras till

Sats 8.13. *Låt f vara en deriverbar och inverterbar funktion. Då gäller att inversen f^{-1} är deriverbar med derivatan*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \tag{8.14}$$

där $y = f(x)$.

Bevis: Vi vill visa att

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)}{h} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Låt $x = f^{-1}(y)$ och k vara sådant att $x+k = f^{-1}(y+h)$. Alltså är $f(x+k) = y+h = f(x)+h$ och $h \to 0$ implicerar att $k \to 0$. Vi får

$$\frac{f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)}{h} = \frac{k}{f(x+k) - f(x)} \to \frac{1}{f'(x)},$$

då $k \to 0$. ■

Kommentar 8.14. Om vi visste att f^{-1} var deriverbar så kunde vi utgå ifrån identiteten $f(f^{-1}(y)) = y$, som gäller för varje $y \in D_{f^{-1}}$. Derivation med avseende på variabeln y ger enligt sats 8.9 att

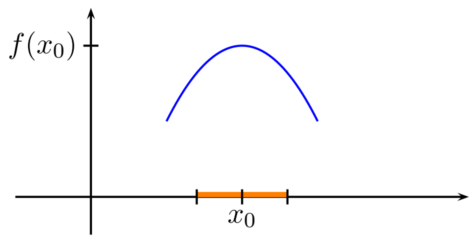
$$f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y) = 1. \tag{8.15}$$

Alltså har vi att

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(x)}. \tag{8.16}$$

8.6 Definitioner av lokala max- och minpunkter

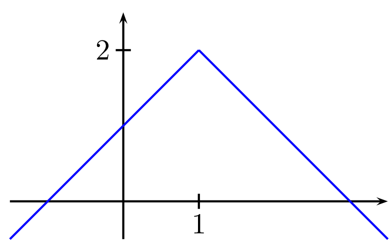
Definition 8.15. En funktion f sägs ha ett **lokalt maximum** i punkten $x_0 \in D_f$ om det finns en omgivning $I \subset D_f$ till x_0 sådan att $f(x) \leqslant f(x_0)$, för varje $x \in I$.



Figur 8.2: Exempelbild på ett lokalt minimum i x_0. Omgivningen I är här orangemarkerad.

Läsaren kan själv förverkliga en definition av hur ett **lokalt minimum** för en funktion definieras. En funktion som har ett lokalt maximum eller lokalt minimum i en punkt x_0 sägs ha en **lokal extrempunkt** i x_0.

Exempel 8.16. Låt $f(x) = 2 - |x - 1|$. Då gäller att f har ett lokalt maximum i punkten 1. Ty, $f(1) = 2$ och $f(x) = 2 - |x - 1| \leqslant 2$, för varje $x \in \mathbb{R}$. I detta fall kunde alltså omgivningen i definition 8.15 väljas till $\mathbb{R}$.



▲

Sats 8.17. *Låt f vara deriverbar i punkten x_0 och ha en lokal extrempunkt i x_0. Då gäller att $f'(x_0) = 0$.*

Bevis: Vi börjar med fallet att f har ett lokalt maximum i punkten x_0.

Eftersom f är deriverbar i punkten x_0 så är f definierad i en omgivning av x_0. Enligt definitionen av derivata vill vi studera gränsvärdet av

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

då $h \to 0$. Täljaren i detta uttryck är alltid negativ eftersom f har ett lokalt maximum i punkten x_0. Nämnaren kommer uppenbarligen vara positiv för positiva h och negativ för negativa h. Alltså har vi att

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geqslant 0,$$

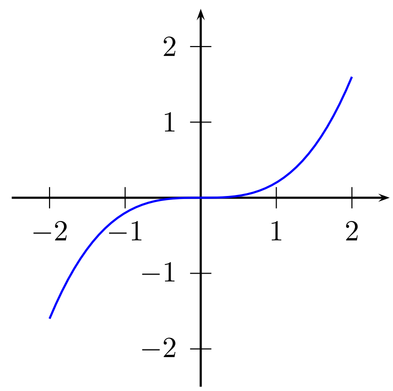
då $h < 0$ och

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leqslant 0,$$

då $h > 0$. Eftersom f är deriverbar i punkten x_0 så vet vi att detta gränsvärde existerar. Alltså måste $f'(x_0) = 0$.

Beviset i fallet att f har ett lokalt minimum i punkten x_0 är analogt och lämnas till läsaren att kontrollera. ∎

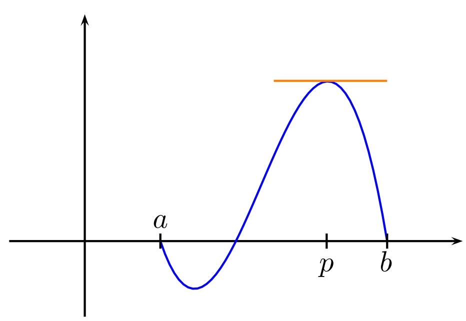
Vi kallar en punkt $x_0 \in D_f$ för en **stationär punkt** om $f'(x_0) = 0$. Omvändningen av sats 8.17 gäller inte, d.v.s. om x_0 är en stationär punkt till en funktion f, så har f nödvändigtvis inte ett lokalt extremvärde i punkten x_0. Funktionen $x \mapsto x^3$ har en stationär punkt i 0, men inte ett lokalt extremvärde i punkten 0.



Figur 8.3: Funktionen $x \mapsto x^3/5$ kring 0.

8.7 Medelvärdessatsen

Sats 8.18 (Rolles sats)**.** *Låt $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion som är deriverbar på (a,b) och låt $f(a) = f(b)$. Då gäller att det existerar ett punkt $p \in (a,b)$ sådan att $f'(p) = 0$.*



Bevis: Vi börjar med att inse att om $f(x) = 0$, för varje $x \in [a,b]$ så gäller att $f'(x) = 0$, för varje $x \in (a,b)$. Detta gör att punkten p kan väljas godtyckligt inom (a,b).

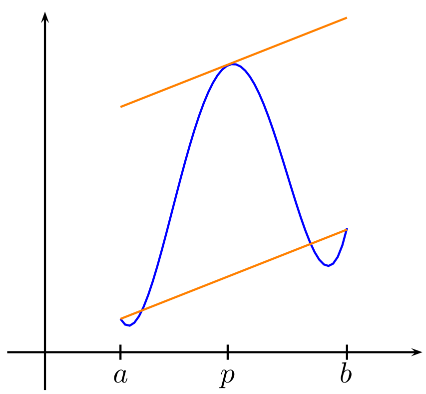
Antag nu att $f(x) > 0$, för något $x \in (a,b)$. Eftersom f är kontinuerlig på det slutna intervallet $[a,b]$ så antar f sitt maxvärde (se sats 7.14). Då $f(a) =$

$f(b) = 0$ så gäller att maxvärdet antas i en inre punkt $q \in (a, b)$. Eftersom f är deriverbar i den punkt som ger maxvärdet så gäller enligt sats 8.17 att $f'(q) = 0$. Alltså kan p väljas till detta q.

Fallet då $f(x) < 0$ behandlas på ett analogt sätt. ■

Sats 8.19 (Medelvärdessatsen). *Låt f vara en deriverbar funktion. För varje intervall $[a, b] \subset D_f$ gäller att det existerar ett punkt $p \in (a, b)$ sådan att*

$$f'(p)(b - a) = f(b) - f(a). \tag{8.17}$$



Bevis: Låt oss skriva om problemet så att vi kan använda Rolles sats. Funktionen f går genom punkterna $(a, f(a))$ och $(b, f(b))$. Låt g vara den räta linjen som går genom dessa punkter. En enkel beräkning ger att g ges av

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + \frac{bf(a) - af(b))}{b - a}.$$

Om vi nu låter h vara differensen mellan f och g så är förutsättningarna för Rolles sats uppfyllda. Alltså, om $h(x) = f(x) - g(x)$ så gäller att $h(a) = h(b) = 0$ och h är deriverbar i intervallet (a, b) samt kontinuerlig i $[a, b]$. Alltså finns det en punkt $p \in (a, b)$ sådan att $h'(p) = 0$. För denna punkten gäller att $f'(p) - g'(p) = 0$. Alltså är

$$f'(p) = g'(p) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Vilket bevisar satsen. ■

Följdsats 8.20. *Låt f vara en deriverbar funktion på ett intervall $(a, b) \subseteq D_f$. Då gäller att*

a) $f'(x) = 0$, *för varje $x \in (a, b)$ om och endast om f konstant på (a, b).*

b) $f'(x) \geqslant 0$, *för varje $x \in (a, b)$ om och endast om f är växande på (a, b).*

c) $f'(x) > 0$, *för varje* $x \in (a, b)$ *om och endast om* f *är strängt växande på* (a, b).

d) $f'(x) \leqslant 0$, *för varje* $x \in (a, b)$ *om och endast om* f *är avtagande på* (a, b).

e) $f'(x) < 0$, *för varje* $x \in (a, b)$ *om och endast om* f *är strängt avtagande på* (a, b).

Bevis: Låt x_0 och x_1 vara två godtyckliga punkter i (a, b) sådana att $x_0 < x_1$.

Vi börjar med att visa a).

Antag först att $f'(x) = 0$, för varje $x \in (a, b)$. Vi vill visa att funktionsvärdena sammanfaller i dessa punkter, d.v.s. att $f(x_0) = f(x_1)$. Vi använder oss av medelvärdessatsen 8.19. Alltså finns det ett $c \in (x_0, x_1)$ sådant att

$$f(x_1) - f(x_0) = f'(c)(x_1 - x_0) = 0,$$

ty $f'(c) = 0$.

Antag nu att f är konstant. Vi vill visa att $f'(x) = 0$, för varje $x \in (a, b)$. Detta följer direkt från definitionen.

Låt oss nu visa b).

Antag först att $f'(x) \geqslant 0$, för varje $x \in (a, b)$. Vi vill visa att f är växande, d.v.s. att $f(x_0) \leqslant f(x_1)$. Vi använder oss av medelvärdessatsen 8.19. Alltså finns det ett $c \in (x_0, x_1)$ sådant att

$$f(x_1) - f(x_0) = f'(c)(x_1 - x_0) \geqslant 0,$$

ty $f'(c) \geqslant 0$ och $x_1 - x_0 > 0$ enligt antagande.

Antag nu det omvända, att f är växande på (a, b). Vi vill visa att $f'(x) \geqslant 0$, för varje $x \in (a, b)$. Från definitionen har vi att

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geqslant 0, \tag{8.18}$$

ty om $h > 0$ är $f(x + h) - f(x) \geqslant 0$ och om $h < 0$ är $f(x + h) - f(x) \leqslant 0$.

Bevisen av c) – e) följer på ett analogt vis. ■

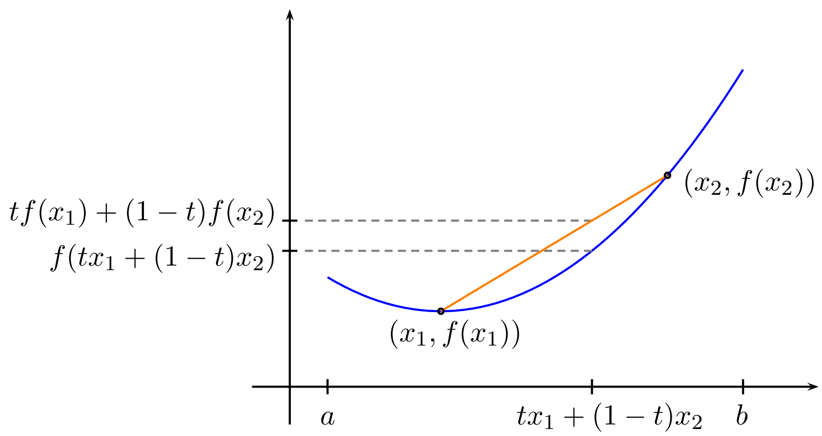
8.8 Konvexitet och konkavitet

Definition 8.21. En funktion f sägs vara **konvex** i intervallet $[a, b] \subseteq D_f$ om det för varje $x_1, x_2 \in [a, b]$ gäller att

$$f(tx_1 + (1 - t)x_2) \leqslant tf(x_1) + (1 - t)f(x_2) \tag{8.19}$$

för alla t sådana att $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Kommentar 8.22. En funktion f som är konvex på $[a, b]$ uppfyller att varje sekant, som endast skär funktionen f i intervallet $[a, b]$, ligger ovanför eller sammanfaller med f.



Figur 8.4: En sekant är aldrig ovanför en konvex funktion.

För att visa detta så tar vi fram den orangefärgade linjens funktion. Eftersom linjen passerar punkterna $(x_1, f(x_1))$ och $(x_2, f(x_2))$ så blir funktionen

$$L(x) = \frac{(f(x_2) - f(x_1))x + x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_2 - x_1}.$$

Om vi nu beräknar värdet i $x = tx_1 + (1-t)x_2$ får vi

$$L(tx_1 + (1-t)x_2) = tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

Alltså är sekanten ej under f i intervallet (x_1, x_2).

Exempel 8.23. Visa att funktionen $f(x) = 1 - |x|$ inte är konvex i intervallet $[-2, 2]$.

Lösning: Funktionen f är ej konvex ty för $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ och $t = 1/2$ får vi att vänsterledet är $f(0) = 1$ medan högerledet är

$$\frac{f(-1)}{2} + \frac{f(1)}{2} = 0.$$

▲

Exempel 8.24. Visa att funktionen $g(x) = x^2$ är konvex i intervallet $(-\infty, \infty)$.

Lösning: Låt $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ och $0 \leqslant t \leqslant 1$. Vi vill visa att högerledet minus vänsterledet i (8.19) är icke-negativt. Alltså

$$\begin{aligned} tx_1^2 + (1-t)x_2^2 - &(tx_1 + (1-t)x_2)^2 \\ &= t(1-t)x_1^2 + t(1-t)x_2^2 - 2t(1-t)x_1x_2 \\ &= t(1-t)(x_1 - x_2)^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Detta ger att g är en konvex funktion. ▲

Sats 8.25. *Låt f vara deriverbar i intervallet $(a, b) \in D_f$. Då gäller att f är konvex i (a, b) om och endast om f' är växande i (a, b).*

Bevis: Antag först att f' är växande i (a, b). Vi vill visa att f är konvex, d.v.s. att för varje $x_1, x_2 \in (a, b)$ gäller att

$$tf(x_1) + (1-t)f(x_2) - f(tx_1 + (1-t)x_2) \geqslant 0, \tag{8.20}$$

för varje $t \in [0, 1]$. Låt $c = tx_1 + (1-t)x_2$. Vi har från medelvärdessatsen 8.19 att

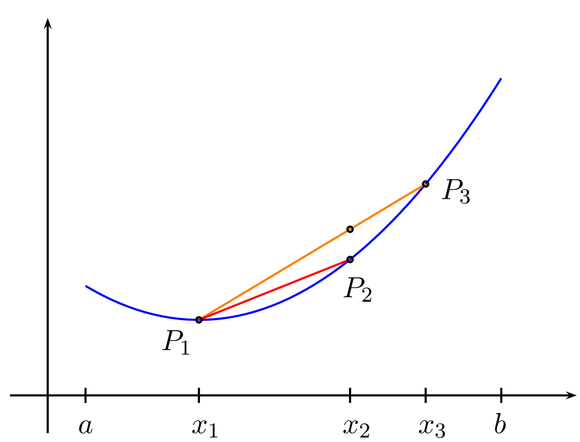
$$\begin{aligned} tf(x_1) + (1-t)f(x_2) - f(c) &= tf(x_1) + (1-t)f(x_2) - (t + 1 - t)f(c) \\ &= t(f(x_1) - f(c)) + (1-t)(f(x_2) - f(c)) \\ &= tf'(d_1)(x_1 - c) + (1-t)f'(d_2)(x_2 - c), \end{aligned}$$

där $d_1 \in (x_1, c)$ och $d_2 \in (c, x_2)$. Om vi nu använder oss av $c = tx_1 + (1-t)x_2$, så får vi att

$$\begin{aligned} tf'(d_1)(x_1 - c) &+ (1-t)f'(d_2)(x_2 - c) \\ &= t(1-t)(f'(d_2) - f'(d_1))(x_2 - x_1) \geqslant 0, \end{aligned}$$

eftersom alla faktorerna är icke-negativa.

Antag nu att f är konvex. Vi vill visa att f' är växande, d.v.s. om $x_1 < x_2$ är $f'(x_1) \leqslant f'(x_2)$. Låt oss börja med att visa att för konvexa funktioner är sekanternas lutning växande. Vi illustrerar med en bild.



Figur 8.5: Relationen mellan olika sekanters lutning

Låt L_{12} och L_{13} vara räta linjer mellan punkterna P_1 och P_2 respektive P_1 och P_3. Antag att $x_1 < x_2 < x_3$. I kommentar 8.22 så visades att $f(x_2)$ är mindre än eller sammanfaller med $L_{13}(x_2)$. Alltså är lutningen på L_{12} mindre än lutningen på L_{13}. Om f dessutom är deriverbar och vi låter $x_2 \to x_1$ så får vi från sats 6.5 d) att

$$f'(x_1) \leqslant L'_{13}(x) = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}, \tag{8.21}$$

för varje $x \in (x_1, b)$. På samma vis kan vi visa att

$$L'_{13}(x) = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leqslant f'(x_3), \tag{8.22}$$

för varje $x \in (a, x_3)$. Alltså är $f'(x_1) \leqslant f'(x_3)$ och vi är klara. ■

Följdsats 8.26. *Låt f vara två gånger deriverbar i intervallet $[a, b] \in D_f$. Då gäller att $f''(x) \geqslant 0$, för varje $x \in [a, b]$ om och endast om f är konvex.*

Bevis: Kombinera sats 8.20 b) med sats 8.25. ■

Definition 8.27. En funktion f sägs vara **konkav** i $[a, b] \subseteq D_f$ om $-f$ är konvex i $[a, b]$.

Definition 8.28. Låt f vara en funktion definierad på ett intervall I. En punkt $x_0 \in I$ sägs vara en **inflexionspunkt** till f om det finns ett $\delta > 0$ sådant att f är konvex i ett av intervallen $[x_0 - \delta, x_0]$ och $[x_0, x_0 + \delta]$, och konkav i det andra.

Sats 8.29. *Låt f vara två gånger deriverbar. Om f har en inflexionspunkt i x_0 så är $f''(x_0) = 0$.*

Bevis: Antag att f har en inflexionspunkt i x_0. Vi kan anta att det finns då ett $\delta > 0$ sådant att f är konvex i $[x_0 - \delta, x_0]$ och konkav i $[x_0, x_0 + \delta]$. Enligt sats 8.26 så är $f''(x) \geqslant 0$, för varje $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ och enligt övning 8.5 så är $f''(x) \leqslant 0$, för varje $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Eftersom f är två gånger deriverbar även i x_0 så måste $f''(x_0) = 0$. ■

8.9 Övningar

Övning 8.1. Visa att derivatan av $x \mapsto \cos x$ är $x \mapsto -\sin x$.

Övning 8.2. Bevisa (8.3).

Övning 8.3. Visa (8.12) och (8.13).

Övning 8.4. Låt f vara deriverbar i intervallet (a, b). Visa att f är konkav om och endast om f' är avtagande i (a, b).

Övning 8.5. Låt f vara två gånger deriverbar i intervallet (a, b). Visa att f är konkav om och endast om $f''(x) \leqslant 0$, för varje $x \in (a, b)$.