KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2012-10-19

DEL A

1. En kulle beskrivs approximativt av funktionen
$$h(x,y) = \frac{5}{1+3x^2+y^2}$$
i lämpliga enheter där $h(x,y)$ är höjden. Om du befinner dig i punkten $(1,1,1)$ på kullen, i vilken riktning, i xy-planet, skall du gå för att gå brantast nedåt? **(4 p)**

Lösningsförslag. Vi söker $-\operatorname{grad} h(1,1)$,

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{30x}{(1+3x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial h}{\partial x}(1,1) = -\frac{30}{25} = -\frac{6}{5},$$
$$\frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{10y}{(1+3x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial h}{\partial y}(1,1) = -\frac{10}{25} = -\frac{2}{5}.$$

Det lutar brantast i den riktning som ges av $\left(\frac{6}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

Svar. I den riktning som ges av $\left(\frac{6}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

2. Bestäm integralen av $f(x,y) = x^2 y$ över triangeln med hörn i $(0,2)$, $(4,0)$ och $(-4,0)$.
(4 p)

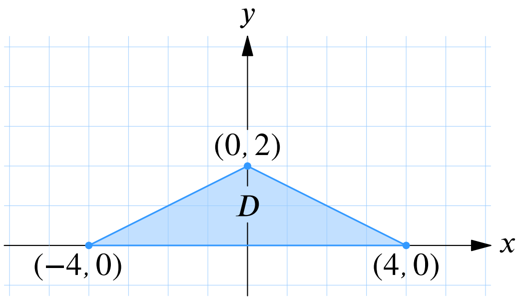
Lösningsförslag. Eftersom funktionen f är en jämn funktion i x-led, dvs.

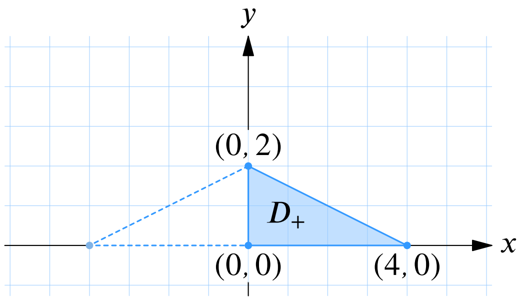
$$f(-x,y) = f(x,y),$$

och triangeln är symmetrisk kring y-axeln kan dubbelintegralen av f över triangeln skrivas som

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 2\iint_{D_+} f(x,y)\,dx\,dy$$

där D är triangeln och D_+ den triangelhalva till höger om y-axeln.





Därmed är

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)\,dx\,dy &= 2\int_0^4 \left(\int_0^{2-x/2} x^2 y\,dy \right) dx \\
&= 2\int_0^4 x^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{2-x/2} dx \\
&= 2\int_0^4 x^2 \cdot \frac{1}{2}\left(2 - \frac{x}{2}\right)^2 dx \\
&= 2\int_0^4 \left(2x^2 - x^3 + \tfrac{1}{8}x^4\right) dx \\
&= 2\left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{40} \right]_0^4 \\
&= \frac{128}{15}.
\end{aligned}$$

Svar. $\dfrac{128}{15}$

3. Ett vektorfält $\boldsymbol{F} = (P, Q)$ i området $x, y > 0$ i planet ges av formlerna

$$P(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \quad \text{och} \quad Q(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2} + \frac{ax}{y^2}.$$

För vilka värden på parametern a är vektorfältet konservativt? Bestäm en potential till vektorfältet för sådana a. **(4 p)**

Lösningsförslag. Eftersom fältet $\boldsymbol{F}$ är definierat på ett enkelt sammanhängande område så har det en potential om och endast om

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Vi beräknar

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2y}{(x^2 + y^2)^2} \cdot 2x + \frac{a}{y^2},$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2x}{(x^2 + y^2)^2} \cdot 2y + \frac{1}{y^2},$$

och ser att fältet är konservativt bara om $a = 1$. En potential U i detta fall uppfyller

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y},$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2} + \frac{x}{y^2}.$$

Den första av dessa ekvationer ger

$$U(x, y) = \ln(x^2 + y^2) - \ln x - \frac{x}{y} + V(y)$$

för någon funktion $V(y)$. Den andra ekvationen ger sedan

$$\frac{2y}{x^2 + y^2} + \frac{x}{y^2} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2} + \frac{x}{y^2} + V'(y)$$

eller $V'(y) = 0$. En lösning på denna ekvation är $V(y) \equiv 0$, och alltså är

$$U(x, y) = \ln(x^2 + y^2) - \ln x - \frac{x}{y}$$

en potential. (Alla andra potentialer fås genom att lägga till en konstant.)

Svar. Fältet är konservativt om och endast om $a = 1$. En potential är

$$U(x, y) = \ln(x^2 + y^2) - \ln x - \frac{x}{y}.$$

DEL B

4. Beräkna arbetet som en partikel utför då den genomlöper kurvan Γ given av $4x^2 + y^2 = 4$ ett varv moturs i kraftfältet $\boldsymbol{F} = (y + 3x, 2y - x)$. **(4 p)**

Lösningsförslag.

Metod 1 (Greens formel)

Arbetet ges av

$$\begin{aligned}
W &= \int_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \{\text{ Greens formel }\} \\
&= \iint_{\{4x^2+y^2\le 4\}} \Big(\frac{\partial}{\partial x}(2y - x) - \frac{\partial}{\partial y}(y + 3x) \Big)\, dx\, dy \\
&= -2 \iint_{\{4x^2+y^2\le 4\}} dx\, dy \\
&= -2 \operatorname{area}\Big(\text{ellipsen } \{x^2 + y^2/4 \le 1\}\Big) \\
&= -2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot 2 = -4\pi.
\end{aligned}$$

Metod 2 (Parametrisera Γ)

Kurvintegralen kan beräknas med

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_a^b \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(t)\big) \cdot d\boldsymbol{r}(t)$$

där $t \mapsto \boldsymbol{r}(t)$ är en parametrisering av Γ och $t\colon\ a \to b$ är parameterområdet.

Kurvan Γ är en ellips centrerad kring origo med halvaxlar 1 och 2 i x- resp. y-riktningen och kan parametriseras som

$$\boldsymbol{r}(t) = \big(\cos t, 2\sin t\big), \quad \text{för } t\colon 0 \to 2\pi,$$

och då är

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(t)\big) &= \big(2\sin t + 3\cos t, 4\sin t - \cos t\big), \\
d\boldsymbol{r}(t) &= \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}\, dt = \big(-\sin t, 2\cos t\big)\, dt.
\end{aligned}$$

Arbetet blir

$$\begin{aligned}
W = \int_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} &= \int_0^{2\pi} \big(2\sin t + 3\cos t, 4\sin t - \cos t\big) \cdot \big(-\sin t, 2\cos t\big)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \big(-2\sin^2 t - 3\sin t\cos t + 8\cos t\sin t - 2\cos^2 t\big)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-2)\, dt + 5\int_0^{2\pi} \cos t \sin t\, dt \\
&= -4\pi + 0 = -4\pi.
\end{aligned}$$

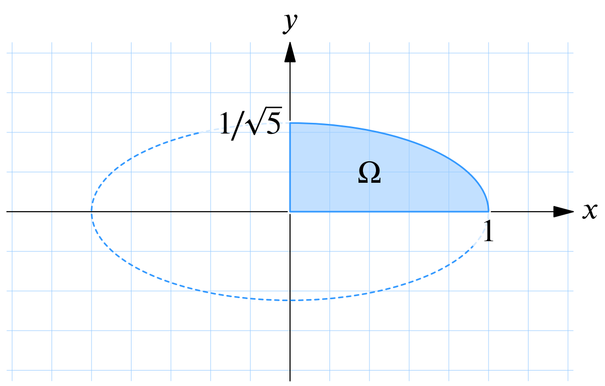
Svar. -4π

5. Bestäm det största och minsta värdet av funktionen

$$f(x, y) = yx^2 + 5y^3$$

på området $\Omega = \{(x, y) \colon x^2 + 5y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$. **(4 p)**

Lösningsförslag. Funktionen f är ett polynom och är därmed en kontinuerlig funktion. Olikheten $x^2 + 5y^2 \leq 1$ definierar en ellipsskiva centrerad kring origo med halvaxlar 1 och $1/\sqrt{5}$ i x- resp. y-riktningen. Området Ω, som är den del av ellipsskivan som finns i första kvadranten, är därför både en begränsad och sluten mängd, dvs. en kompakt mängd.



Eftersom f är kontinuerlig och Ω är en kompakt mängd så vet vi att f antar ett största och ett minsta värde på området Ω.

Dessa värden antar f i följande typer av punkter:

(a) inre stationära punkter,

(b) lokala max- och minpunkter på randen

Vi undersöker dessa fall.

(a) I en inre stationär punkt är

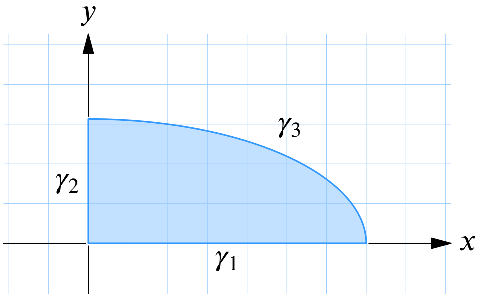
$$\operatorname{grad} f(x, y) = \left(2xy, x^2 + 15y^2\right) = (0, 0),$$

vilket ger oss ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 2xy &= 0, \\ x^2 + 15y^2 &= 0. \end{aligned}$$

Den andra ekvationen är bara uppfylld när $x = y = 0$, och eftersom den första ekvationen då också är uppfylld så är $(0, 0)$ den enda stationära punkten, men $(0, 0)$ är inte en inre punkt.

(b) Randen till området består av tre kurvstycken: γ_1 (intervallet $[0, 1]$ på x-axeln), γ_2 (intervallet $[0, 1/\sqrt{5}]$ på y-axeln) och γ_3 (kvartsellipsen från $(0, 1/\sqrt{5})$ till $(1, 0)$).



Vi undersöker respektive kurvdel:

- På γ_1 är $f \equiv 0$.
- Linjestycket γ_2 kan vi parametrisera som $(x, y) = (0, t)$ där $0 \leq t \leq 1/\sqrt{5}$. Problemet kan då formuleras som

$$\text{maximera } f(t) = 5t^3 \quad \text{för } 0 \leq t \leq 1/\sqrt{5}.$$

  Detta polynom har max/min antingen där $f'(t) = 15t^2$ är noll (dvs. $t = 0$) eller i ändpunkterna $t = 0$ och $t = 1/\sqrt{5}$.
  I dessa punkter är $f(0) = 0$ och $f(1/\sqrt{5}) = 1/\sqrt{5}$.
- Vi parametriserar ellipsstycket γ_3 som

$$(x, y) = \left(\cos t, \frac{1}{\sqrt{5}} \sin t\right), \quad \text{där } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

  och optimeringsproblemet på denna kurvdel blir

$$\text{maximera } f(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sin t \quad \text{för } 0 \leq t \leq \pi/2.$$

  Max och min antas antingen där $f'(t) = (\cos t)/\sqrt{5}$ är noll (dvs. $t = \pi/2$) eller i ändpunkterna $t = 0$ och $t = \pi/2$.
  I dessa punkter är $f(0) = 0$ och $f(\pi/2) = 1/\sqrt{5}$

Det största och minsta värdet av f i området Ω är alltså $1/\sqrt{5}$ resp. 0.

Svar. Största värde är $1/\sqrt{5}$ och minsta värde är 0.

6. Bestäm flödet av vektorfältet $\boldsymbol{F} = \big(xz, yz, z(1-z)\big)$ genom ytan S där S är cylinderytan $\{(x, y, z)\colon x^2 + y^2 = 1, 0 \le z \le 2\}$. **(4 p)**

Lösningsförslag. Låt $\boldsymbol{N}$ vara den utåtpekande normalen. Då ges flödet av

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N}\, dS = \iint_D \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(s,t)\big) \cdot (\boldsymbol{r}'_s \times \boldsymbol{r}'_t)\, ds\, dt$$

om $(s, t) \mapsto \boldsymbol{r}(s, t)$ är en parametrisering av S sådan att $\boldsymbol{r}'_s \times \boldsymbol{r}'_t$ är utåtpekande och D är parameterområdet för (s, t).

Vi parametriserar S med hjälp av cylindriska koordinater till

$$\boldsymbol{r}(\theta, z) = \big(\cos\theta, \sin\theta, z\big), \qquad \text{där } D\colon 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le z \le 2,$$

och vi använder θ och z som parameternamn (istället för s och t). Då är

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}'_\theta(\theta, z) &= \big(-\sin\theta, \cos\theta, 0\big),\\
\boldsymbol{r}'_z(\theta, z) &= (0, 0, 1),\\
\boldsymbol{r}'_\theta \times \boldsymbol{r}'_z &= (-\sin\theta, \cos\theta, 0) \times (0, 0, 1) = (\cos\theta, \sin\theta, 0).
\end{aligned}$$

Flödet blir

$$\begin{aligned}
&\iint_D \big(z\cos\theta, z\sin\theta, z(1-z)\big) \cdot (\cos\theta, \sin\theta, 0)\, d\theta\, dz\\
&\quad = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 (z\cos^2\theta + z\sin^2\theta)\, dz \right) d\theta\\
&\quad = 2\pi \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^2 = 4\pi.
\end{aligned}$$

Anm. Ett alternativt lösningssätt är att sluta ytan med plana cirkelskivor och använda Gauss sats. Flödet genom botten är 0 och toppen är -2π.

Svar. 4π

DEL C

7. Masstätheten för en gas ges av

$$\varrho(x,y,z) = \frac{c}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}},$$

där c är en fysikalisk konstant. Gasen befinner sig i rummet utanför ett klot som ges av $x^2+y^2+z^2 \leq 1$, dvs. i mängden $K = \{(x,y,z)\colon x^2+y^2+z^2 \geq 1\}$. Beräkna gasens totala massa uttryckt i c. **(4 p)**

Lösningsförslag. Massan ges av den generaliserade integralen

$$\begin{aligned}
M &= \iiint_K \varrho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \\
&= c\iiint_K \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \\
&= \{\text{ Rymdpolära koordinater }\} \\
&= c\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^\infty r^2\cdot\frac{1}{(r^2)^{5/2}}\,dr \\
&= 4\pi c\int_1^\infty \frac{dr}{r^3} \\
&= 4\pi c\lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{2r^2}\right]_1^R \\
&= 2\pi c.
\end{aligned}$$

Svar. $2\pi c$

8. Betrakta ekvationen

$$x + y + z = \sin xyz \qquad (*)$$

a) Visa att genom ekvationen $(*)$ defineras en funktion f i en omgivning av $(x, y) = (0, 0)$, så att $(*)$ är ekvivalent med $z = f(x, y)$ i en omgivning $(0, 0, 0)$. **(2 p)**

b) Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $z = f(x, y)$ i origo. **(2 p)**

Lösningsförslag.

a) Definiera funktionen $F(x, y, z)$ genom

$$F(x, y, z) = x + y + z - \sin xyz.$$

Då beskriver ekvationen $(*)$ nivåytan $F(x, y, z) = 0$. Funktionen F är av klass C^1 och punkten $(0, 0, 0)$ ligger på nivåytan $(*)$. Vidare är

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial z}(0,0,0) &= 1 - xy\cos xyz \,\Big|_{(x,y,z)=(0,0,0)} \\ &= 1 \neq 0, \end{aligned}$$

så implicita funktionssatsen garanterar att det finns en funktion $f(x, y)$ så att nivåytan är lika med grafen $z = f(x, y)$ nära $(0, 0, 0)$.

b) Eftersom ytan $z = f(x, y)$ är lika med nivåytan $F(x, y, z) = 0$ nära origo så ges dess normalvektor i origo av

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} F(0,0,0) &= \Big(1 - yz\cos xyz,\ 1 - xz\cos xyz, \\ &\qquad\qquad 1 - xy\cos xyz\Big)\,\Big|_{(x,y,z)=(0,0,0)} \\ &= (1, 1, 1). \end{aligned}$$

Tangentplanet i origo har alltså normalvektorn $(1, 1, 1)$ och ges av ekvationen

$$(1, 1, 1) \cdot (x, y, z) = x + y + z = 0.$$

Svar. b) $x + y + z = 0$

9. Ett elektriskt laddat skal S utgörs av den del av halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $y \geq 0$ som begränsas av planen $z = 1/\sqrt{2}$ och $z = -1/\sqrt{2}$. Laddningstätheten ges av

$$q(x, y, z) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Beräkna skalets totala laddning

$$Q = \iint_S q(x, y, z)\, dS.$$ **(4 p)**

Lösningsförslag. Halvsfärens ekvation kan skrivas som $y = \sqrt{1 - (x^2 + z^2)}$, dvs. som en parameterytan med x och z som parametrar,

$$(x, z) \mapsto \left(x, \sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z\right).$$

Då blir ytans arealement

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2}\, dx\, dz \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}}\right)^2 + \left(\frac{-z}{\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}}\right)^2}\, dx\, dz \\ &= \frac{dx\, dz}{\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}}. \end{aligned}$$

Ytans projektion D i xz-planet är området som i x-led begränsas av cirkelbågarna $x = \pm\sqrt{1 - z^2}$ och i z-led av linjerna $z = \pm 1/\sqrt{2}$. Vi observerar att $x^2 + y^2 = 1 - z^2$ på S och därför är

$$\begin{aligned} Q &= \iint_S \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dS \\ &= \iint_D \frac{dx\, dz}{\sqrt{1 - z^2}} \\ &= \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \left(\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} dx\right) \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} \\ &= 2\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} dz \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Anm. Ett alternativ är att använda sfäriska koordinater.

Svar. $2\sqrt{2}$