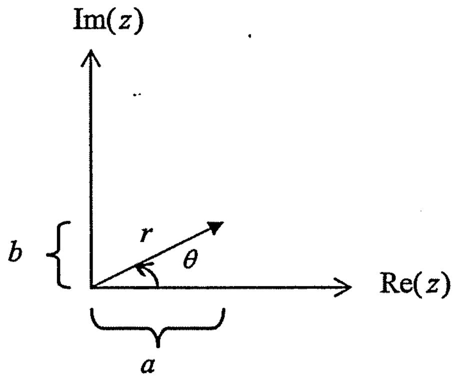
Komplexa tal

Allmänt

Det komplexa talet z kan skrivas antingen på rektangulär eller polär form.

$$z = \underbrace{a+ib}_{rekt.\,form} = \underbrace{re^{i\theta}}_{polär\ form}$$



a: realdel
b: imaginärdel. För den imaginära enheten gäller $\boxed{i^2 = -1}$.
$r = |z|$ (belopp)
$\theta = \arg(z)$ är en vinkel (argument eller fas)

Samband mellan rektangulär och polär form:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$\tan\theta = \dfrac{b}{a}$, $\quad \theta = \arctan(\dfrac{b}{a}) + n\pi$ (där n kompenserar för antal halva varv).

$\boxed{\text{Eulers formel: } e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$ vilket ger $z = re^{i\theta} = \underbrace{r\cos\theta}_{=a} + i\underbrace{r\sin\theta}_{=b}$

Division av två komplexa tal

$$z_d = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad \Rightarrow \begin{cases} |z_d| = \dfrac{r_1}{r_2} \underbrace{\left|e^{i(\theta_1-\theta_2)}\right|}_{=1} = \dfrac{r_1}{r_2} \\ \arg(z_d) = \theta_1 - \theta_2 \end{cases}$$

där $r_1 = \sqrt{{a_1}^2 + {b_1}^2}$, $r_2 = \sqrt{{a_2}^2 + {b_2}^2}$, $\theta_1 = \arg(a_1 + ib_1)$ och $\theta_2 = \arg(a_2 + ib_2)$. Notera att $\left|e^{i\theta}\right| = |\cos\theta + i\sin\theta| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$

$\boxed{\text{Slutsats: vid division divideras beloppen och argumenten subtraheras.}}$

Multiplikation av två komplexa tal

$$z_m = (a_3 + ib_3)(a_4 + ib_4) = r_3 r_4 e^{i(\theta_3 + \theta_4)} \quad \Rightarrow \begin{cases} |z_m| = r_3 r_4 \\ \arg(z_m) = \theta_3 + \theta_4 \end{cases}$$

där $r_3 = \sqrt{{a_3}^2 + {b_3}^2}$, $r_4 = \sqrt{{a_4}^2 + {b_4}^2}$, $\theta_3 = \arg(a_3 + ib_3)$ och $\theta_4 = \arg(a_4 + ib_4)$.

$\boxed{\text{Slutsats: vid multiplikation multipliceras beloppen och argumenten adderas.}}$