1. a) De tre vektorerna $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ och $\boldsymbol{u}_3$ är en bas för rummet om de är linjärt oberoende, dvs. om vektorekvationen

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + c_3\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{0} \qquad (*)$$

endast har lösningen $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

Om vektorerna skrivs i kolumnform får vi

$$c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

och denna ekvation kan sammanfattas i matrisform som

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ovanstående linjära ekvationssystem har exakt en lösning $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ om och endast om determinanten av vänsterledets koefficientmatris är skild från noll,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} + = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(2\cdot 0 - 1\cdot 2) = 2 \neq 0.$$

Alltså har ekvationen $(*)$ bara nollösningen $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ och vektorerna $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ och $\boldsymbol{u}_3$ är linjärt oberoende och är en bas för rummet $\mathbf{R}^3$.

b) Vi ska hitta tal c_1, c_2 och c_3 så att

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + c_3\boldsymbol{u}_3.$$

Skriver vi detta samband i kolumnform får vi

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

som kan skrivas i matrisform som

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Vi löser detta linjära ekvationssystem med gausseliminering,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{matrix} -2 \quad - \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \tfrac{1}{2} \quad - \quad -\tfrac{1}{2} \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ -\tfrac{3}{2} \quad \tfrac{1}{2} \quad - \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Vi avläser lösningen $c_1 = 2$, $c_2 = -2$ och $c_3 = -1$. Alltså är

$$\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{u}_1 - 2\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3.$$

2. a) Kolumnerna i basbytesmatrisen $P_{E\leftarrow B}$ består av B:s basvektorer uttryckta i standardbasen,

$$P_{E\leftarrow B} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Den omvända basbytesmatrisen $P_{B\leftarrow E}$ är inversen av ovanstående matris,

$$P_{B\leftarrow E} = \left(P_{E\leftarrow B}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Inversen beräknar vi genom att radreducera $(A|E)$ till $(E|A^{-1})$,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Alltså är

$$P_{B\leftarrow E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) I standardbasen har vektorn $\boldsymbol{v}$ koordinaterna $(1, 2, -1)$ och i basen B har därför $\boldsymbol{v}$ koordinaterna

$$(\boldsymbol{v})_B = P_{B\leftarrow E}(\boldsymbol{v})_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Alltså, $(\boldsymbol{v})_B = (3, 3, 2)$.

3. a) Nollrummet består av alla vektorer $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ som uppfyller $P\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$, dvs

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Detta är ett linjärt ekvationssystem som vi löser med gausseliminering

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right) \; - \; + \; \tfrac{1}{2} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \; - \; \tfrac{1}{3} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \; - \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Från slutschemat avläser vi lösningarna

$$(u_1, u_2, u_3) = (2t, -t, t) = (2, -1, 1)t,$$

där t är en parameter. Nollrummet är alltså ett linjärt delrum som spänns upp av vektorn $(2, -1, 1)$, dvs. $\{(2, -1, 1)\}$ är en bas för nollrummet.

b) Värderummet består av alla vektorer $P\boldsymbol{u}$ där $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ tillåts variera över hela $\mathbf{R}^3$. Matrisprodukten $P\boldsymbol{u}$ kan skrivas som

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \frac{u_1}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{u_2}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{u_3}{6}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Detta visar att värderummet spänns upp av kolumnerna i matrisen P.

Kolumnrummet till P kan vi bestämma genom att radreducera P till trappstegsform (se deluppgift a),

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

I den radreducerade matrisen till höger ser vi att den tredje kolumnen är en linjärkombination av de två första kolumnerna,

$$(\text{kolumn } 3) = -2 \cdot (\text{kolumn } 1) + 1 \cdot (\text{kolumn } 2),$$

medan första och andra kolumnerna är linjärt oberoende.

Eftersom radoperationer inte påverkar linjära samband mellan kolumnerna kommer kolumnerna i P uppfylla samma samband. Detta betyder att kolumnrummet till P spänns upp av dess två första kolumner.

En bas för värderummet är därmed $\{(2, 2, -2),\ (2, 5, 1)\}$.