EL1000/1120/1110 Reglerteknik AK

Föreläsning 9:

Tillståndsåterkoppling och observerare

Kursinfo

- Anmälan och förberedelse för Lab 2 och Lab 3 (se föregående föreläsningar och hemsida för detaljer)

- Tentaanmälan via ”Mina sidor”. Stänger 2 veckor före tentan. Tentan går 17 december kl. 9-14. <u>Efteranmälan ej möjlig</u>

Innehåll

- Lösning av tillståndsekvation (repetition)
- Styrbarhet och observerbarhet (repetition)
- Tillståndsåterkoppling
- Observerare

Optimering av kvadratiska kriterier, Glad & Ljung kapitel 9.3 ingår ej. Se fortsättningskurser i reglerteknik.

Tillståndsmodeller

Tillståndsbeskrivning

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

där $x \in \mathbf{R}^n, u \in \mathbf{R}^m, y \in \mathbf{R}^p$ och oftast $m = p = 1$ i denna kursen.

- Vektorn $x(t) = (x_1(t)\ x_2(t) \ldots x_n(t))^T$ - systemets tillstånd.
- $x(t)$ innehåller den information som behövs för att räkna ut framtida $y(t)$, givet framtida $u(t)$, dvs. lagrar information om tidigare u.

Lösningsformel:

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

e^{At} = Exponentialmatris. Generalisering av ”vanlig” exponentialfunktion.

Styrbarhet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

Styrbarhet: kan styra från $x = 0$ till alla tillstånd x^* mha. $u(t)$ (på ändlig tid) om *styrbarhetsmatrisen*

$$S = [B \; AB \ldots A^{n-1}B]$$

har full rang $\Rightarrow$ $det(S) \neq 0$

De styrbara tillstånden ligger i kolonnrummet till *S*

Observerbarhet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

- *Observerbarhet:* ett tillstånd x^* är icke-observerbart om $y(t) = 0 \; \forall t$ då $x(0) = x^*$ och $u = 0$.

  Icke-observerbart underrum ges av nollrummet till *observerbarhetsmatrisen*

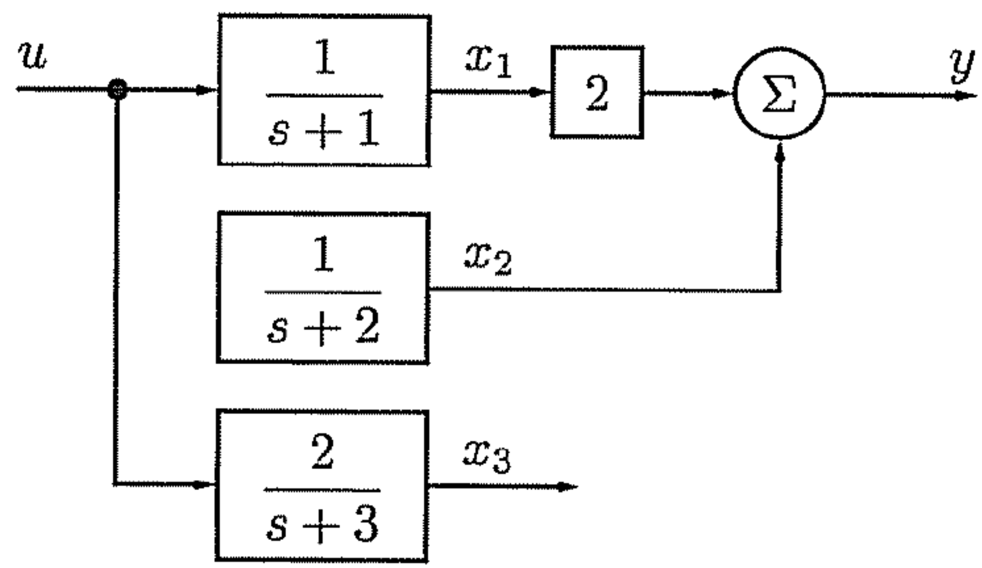
$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

Alla tillstånd observerbara om $det(O) \neq 0$.

Exempel från Fö. 8

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} u$$

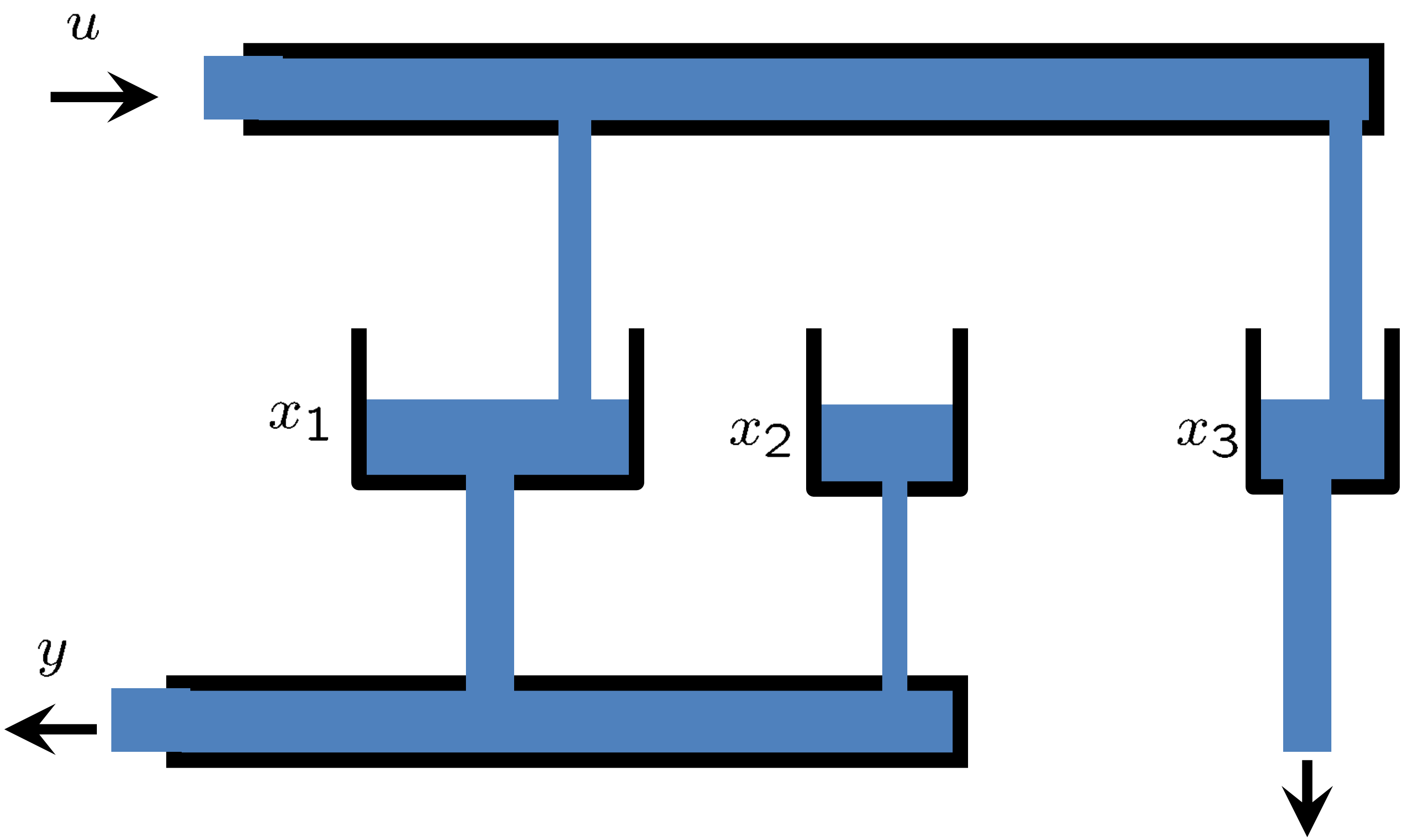
$$y = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} x$$



x_2 icke styrbar

x_3 icke observerbar

Exempel illustrerat med vattentankar



Endast x_1 syns i överföringsfunktionen från u till y!

x_2 påverkas ej av u

x_3 syns ej i y

Minimala tillståndsmodeller

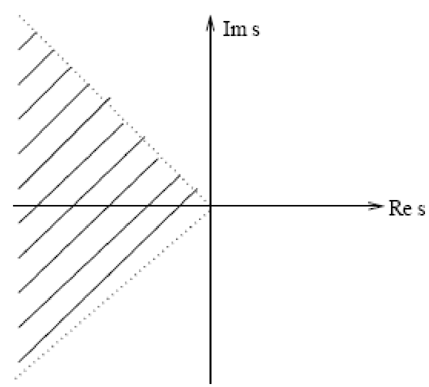
- Förkortningar av poler och nollställen i *G(s)* beror på icke-observerbara eller icke-styrbara tillstånd.
- Minimala tillståndsmodeller: Alla tillstånd styrbara och observerbara
  - $\det(S) \neq 0$ och $\det(O) \neq 0$
- *G(s)* ger en **yttre** beskrivning av systemet
- Tillståndsmodellen ger en **inre** beskrivning av systemet

Dagens program

1. Återkoppling från systemets samtliga tillstånd $x(t)$
   $\longrightarrow$ *tillståndsåterkoppling*
2. Skattning av tillstånd $\hat{x}(t)$ från mätning av utsignalen $y(t)$
   $\longrightarrow$ *observatör*

Var ska polerna placeras?

- Valet av slutna systemets poler styrs av specifikationer på:
  - Önskad snabbhet och dämpning
  - Begränsningar på styrsignalens storlek
  - Robusthet (mot modellfell)
  - Känslighet (mot yttre störningar)
- Allmänna råd:
  - Flytta polerna iterativt tills specifikationer uppfyllda
  - Poler närmast origo viktigast
  - Välj poler som ger bra avvägning mellan snabbhet och dämpning $\Rightarrow$ Im(s)$\leq$Re(s)



Typexempel: Polplacering

$$G_c(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

$$\zeta = \cos\phi$$

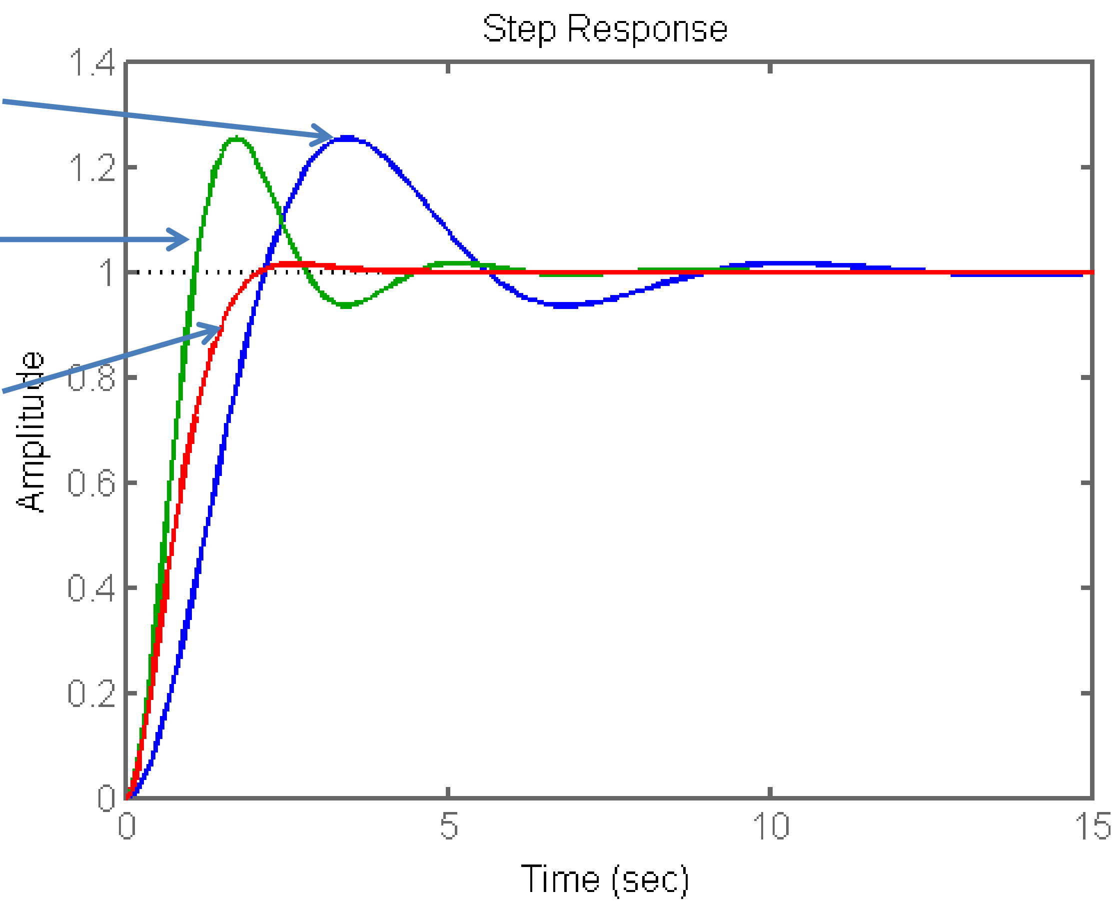
Snabbhet(∼1/stigtid) $\approx \omega_0 e^{-\frac{\phi}{\tan\phi}}$

Dämpning(∼1/översväng) $\approx e^{\alpha}$, $\alpha = \frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$

$\omega_0 = 1,\ \zeta = 0.4$

$\omega_0 = 2,\ \zeta = 0.4$

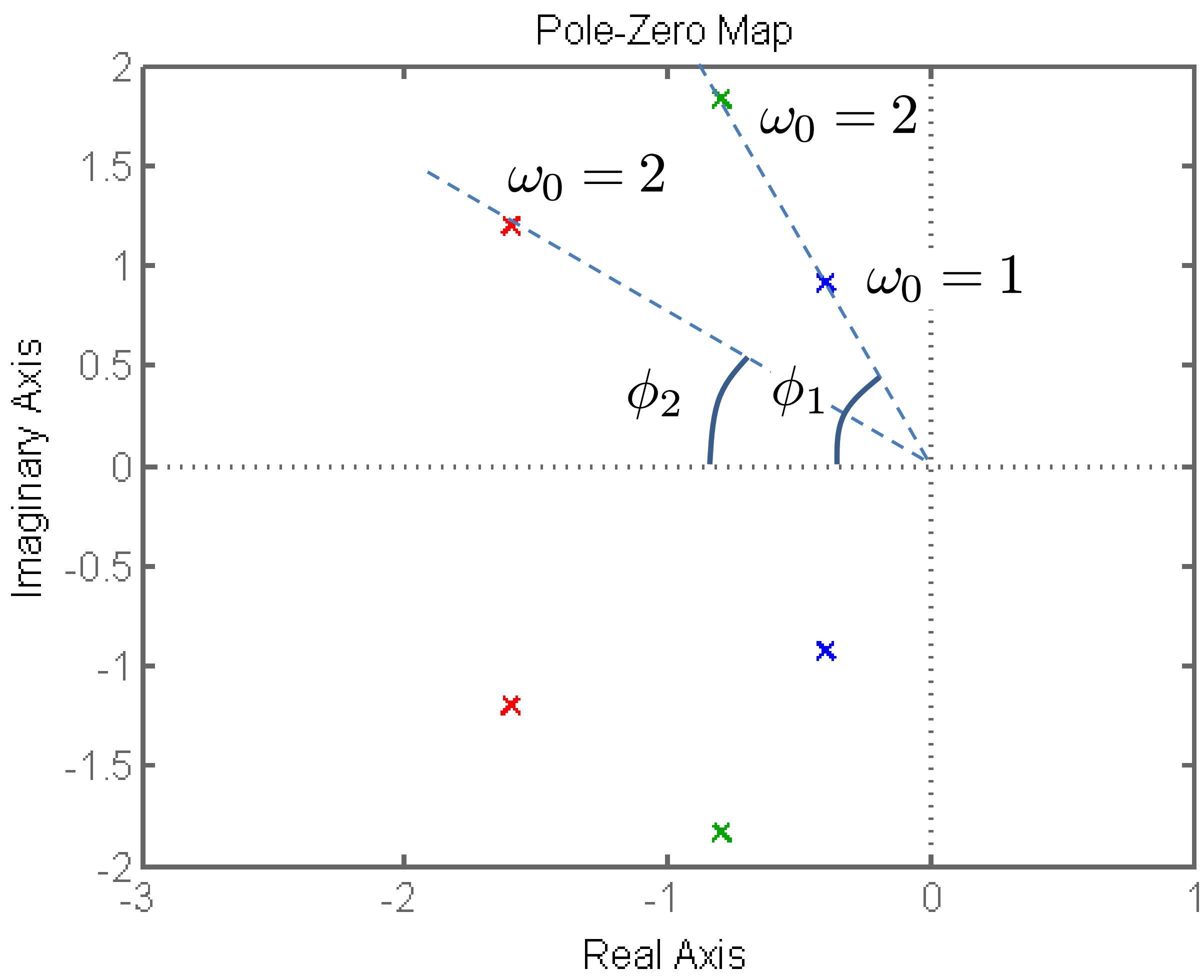
$\omega_0 = 2,\ \zeta = 0.8$



Typexempel: Polplacering

$$\phi_1 = \arccos 0.4$$

$$\phi_2 = \arccos 0.8$$



Typexempel: Polplacering