KTH Datavetenskap
och kommunikation

DT1130 Spektrala transformer
Tentamen 121211

Tentamen består av fem uppgifter där varje uppgift maximalt ger 4 p. Normalt gäller följande betygsgränser: **E: 9 p, D: 11.5 p, C: 14 p, B: 16 p, A: 18 p**
Tillåtna hjälpmedel: räknare, formelblad (bifogat)

Lycka till!

1

Doktor S. Pinn arbetar med en ny revolutionerande turbingenerator. För att kunna mäta rotationshastigheten på turbinen använder han en höghastighetskamera som tar exakt 250 bilder/sekund. Han fäster en liten reflex på ett av turbinbladen, och filmar tubinen med kameran. Han ställer in belysning och exponering så att allt som syns i kameran är en ljus prick (reflexen) som rör sig i en cirkelrörelse när turbinen roterar.

Han skriver därefter ett litet program som analyserar bilden och räknar ut prickens vinkelhastiget i radianer per bildruta, och plottar denna vinkel som funktion av tiden. När han startar turbinen från stillastående hör han hur den accelererar konstant, tills den börjar rotera med konstant hastighet. Programmet plottar ut vinklelhastigheten över tid från turbinstart (stillastående), se figur 1.

a Vilken är turbinens rotationshastighet ψ vid den sista bildrutan? (kurvan planar ut vid $2\pi/3$) *(2 p)*

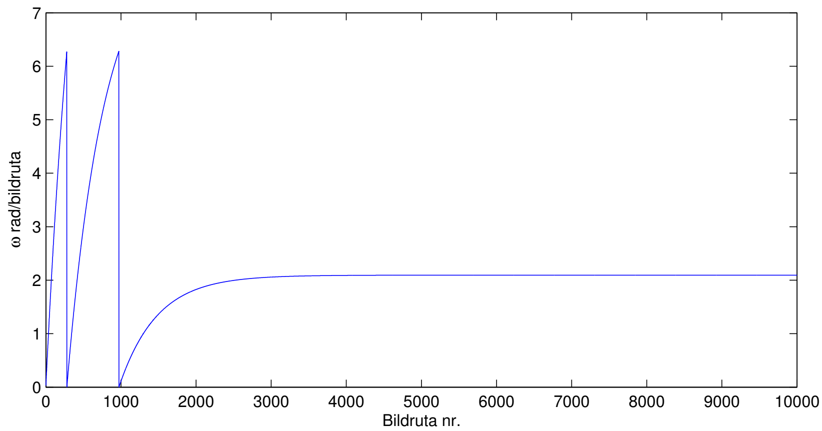
b Givet en viss uppmätt vinkelhastighet ω i *rad/bildruta*, vilka är de rotationshastigheter hos turbinen som kan vara möjliga, i *rad/sekund*? Skriv ett uttryck på formen

$$\psi_k = a + kb$$

där k är ett godtyckligt heltal som representerar olika lösningar och a resp. b kan bero av ω eller vara konstanter. *(2 p)*

2

I figur 2 ser du impulssvar och frekvenssvar från ett antal icke-återkopplade filter. Para ihop de som härhör från samma filter, med motivering. Observera att det blir ett frekvenssvar över. *(1p/ korrekt par)*



Figur 1. Utskrift från Dr. S. Pinn's program: uppmätt vinkelfrekvens som funktion av tid (bildruta)

3

I en digital ljudeffektsapparat önskar man implementera ett filter som uppfyler följande kriterier:

- filtret ska helt släcka ut frekvensen $\omega = \pi/4$
- filtret ska ha ett polpar på imaginära axeln, dvs $p = \pm rj$ där r är reellt i och intervallet $0 \leq r < 1$
- filtrets absoluta förstärkning $|H(\omega)| = 2\sqrt{2}$ vid $\omega = \pi/2$

Ta fram överföringsfunktionen $H(z)$ *(4 p)*

Tips: börja med att ta fram ett uttryck för $H(z)$ som uppfyller punkt 1 och 2. Bestäm sedan r så att tredje villkoret uppfylls.

4

Vid bildkompression kan man använda sig av diskret cosinustransform, DCT, i två dimensioner. Antag att en del av en bild representeras som en matris A, och transformeras med 2D DCT till en matris B

a Vilken egenskap hos A reflekteras av det första elementet i B (övre vänstra, dvs $B(0, 0)$)?

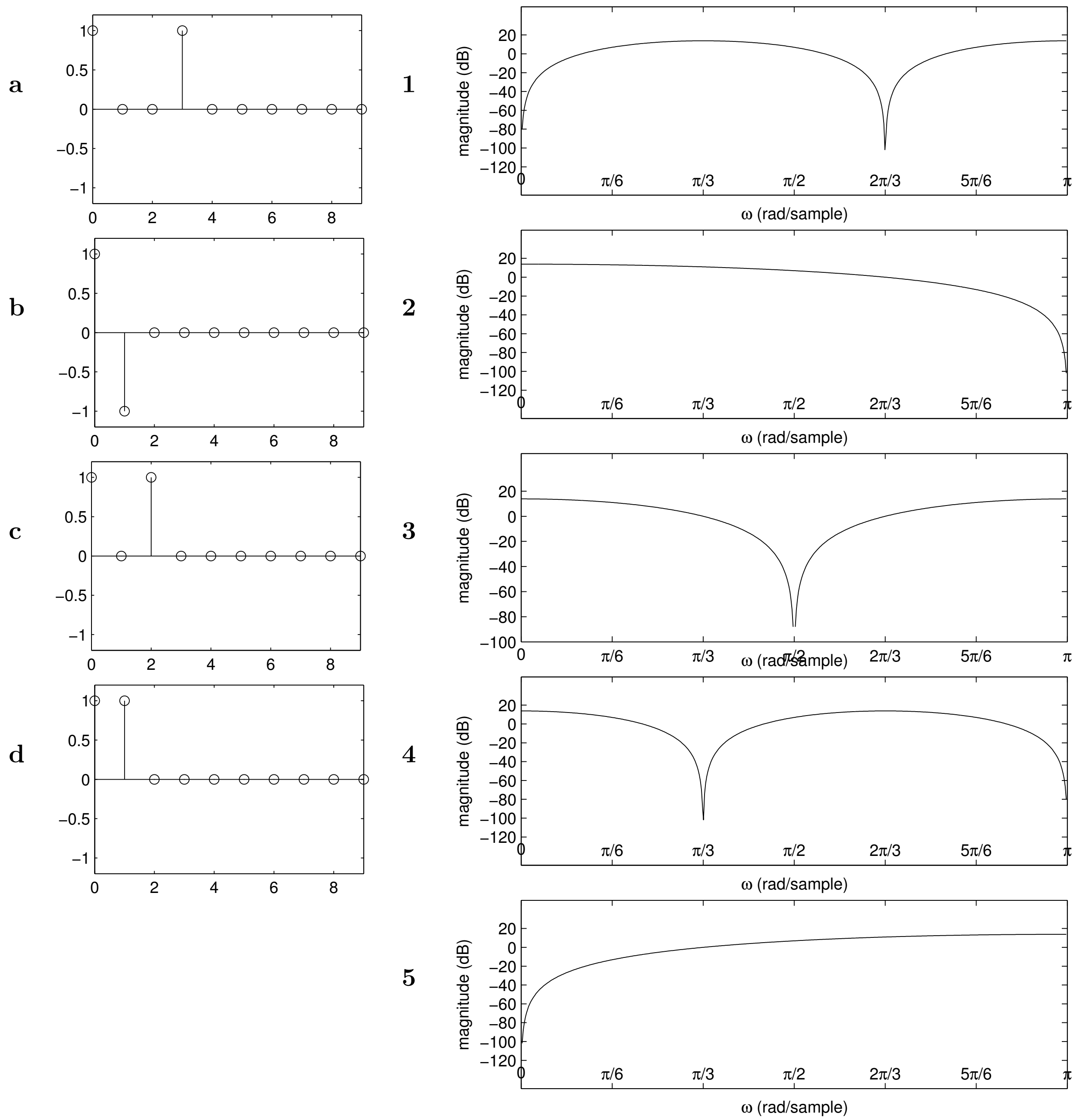
b Vad är den geometriska tolkningen av rad- respektive kolumninex i B?

c Förklara hur DCT kan användas i bildkomprimeringssammanhang.

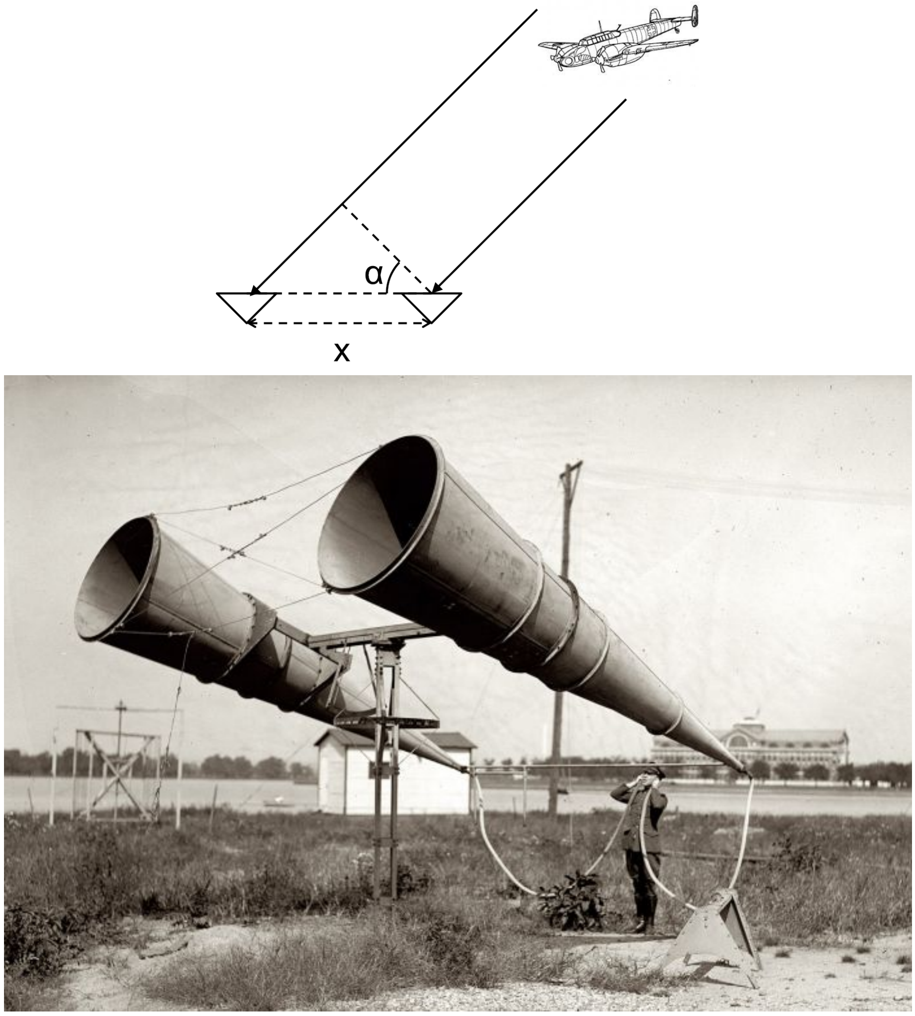
d Vilken typ av bilder lämpar sig sämst för komprimering med DCT, och varför?

5

Under början på 1900-talet ägnades i det militära stor möda åt att bygga apparater som kunde användas för att detektera inkommande fientliga flygplan. Principen som utnyttjades i dessa var att flera parallella akustiska mottagare ger en ökad riktningskänslighet, se figur 3. Om en farkost kommer in från sidan, kommer ljudet att nå de två mottagarna med en viss tidsförskjutning τ som



Figur 2. Impuls- och frekvensssvar för ett antal FIR-filter



Figur 3. Akustisk radar, Bolling Field, USA, 1921.

beror av avståndet mellan mottagarna x, vinkeln α samt ljudhastigheten c. Antag att flygplanet i övre delen av figur 3 avger ett ljud som kan approximeras med en sinuston med frekvensen $f = 180Hz$. Om vi bortser från dämpning på grund av avståndet (som kan antas lika för de två mottagarna) så kan vi anta att den ena mottagaren att tar emot signalen $y_1(t) = \cos(2\pi f t)$ och den andra fångar upp $y_1(t) = \cos(2\pi f(t + \tau))$.

a Ta fram ett uttryck för hur amplituden hos den sammlagda signalen $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ varierar med avseende på tidsförskjutningen τ.

b Vid vilken vinkel α kommer amplituden hos den sammanlagda signalen $y(t)$ vara som minst? Antag att ljudhastigheten $c = 340m/s$ och avståndet mellan mottagarna $x = 6m$.

Lösningar

1

b

Vi kan beskriva reflexens cirkelrörelse med en phasor. I den analoga domänen får vi

$$x(t) = e^{j\psi t}$$

Kameran tar bilder med frekvensen $f_s = 250Hz$. Genom att ersätta t med $nT_s = \frac{n}{f_s}$ erhålls

$$x(n) = e^{\frac{j\psi n}{fs}}$$

Markören kan göra flera varv mellan två på varandra följande sampel. Detta kan vi representera genom att lägga till $2\pi m$ till vinkelnhastigheten, där m är ett heltal:

$$x(n) = e^{jn(\frac{\psi}{fs}+2\pi m)}$$

Men den uppmätta vinkelfrekvensen ω kan också användas för att skriva samma uttryck:

$$x(n) = e^{j\omega n}$$

Dessa måste vara lika, vilket gör att

$$\frac{\psi}{fs} + 2\pi m = \omega$$

Detta ger

$$\psi = (\omega - 2\pi m)f_s$$

där m är ett godtyckligt heltal. Byt $m = -k$:

$$\psi = (\omega + 2\pi k)f_s$$

a

I figuren kan vi se att ω når 2π två ggr innan den planar ut vid $\omega = 2\pi/3$. Detta innebär att $k = 2$ (dvs rotorn gör två hela varv plus $2\pi/3$ rad. mellan varje bildruta).

$\psi = (2\pi/3 + 4\pi)250 = 3665$ rad/s = 583 varv/s.

2

För ett icke-återkopplat filter gäller att $h(n) = b_n$. Vi kan alltså direkt skriva $H(z) = h(0) + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} + h(3)z^{-3} + ...$ osv (Z-transformen). Sedan kan nollställena lösas ut, och deras frekvenser matchas mot dipparna i frekvenssvaren till höger.

a $\quad H(z) = 1 + z^{-3} = \dfrac{z^3 + 1}{z^3}$

Denna funktion har tre nollställen på enhetscirkeln som fås enligt

$$z^3 + 1 = 0 \rightarrow z^3 = e^{j(\pi + k2\pi)}$$

$$z = e^{\frac{j(\pi+k2\pi)}{3}}$$

$$k = 0 \rightarrow z = e^{j\pi/3}$$

$$k = 1 \rightarrow z = e^{j\pi}$$

$$k = 2 \rightarrow z = e^{j5\pi/6}$$

Detta motsvarar frekvenssvar *4*.

b $$H(z) = 1 - z^{-1} = \frac{z-1}{z}$$

Nollställe: $z = 1$ $(\omega = 0)$

Frekvenssvar *5*.

c $$H(z) = 1 + z^{-2} = \frac{z^2+1}{z^2}$$

Nollställen:

$$z^2 = -1 \rightarrow z = \pm j$$

$(\omega = \pm\pi/2)$

Passar med frekvenssvar *3*.

d $$H(z) = 1 + z^{-1} = \frac{z+1}{z}$$

Nollställe: $z = -1$ $(\omega = \pi)$

Frekvenssvar *2*.

3

Första villkoret innebär att vi ska ha nollställen vid $e^{j\pm\pi/4}$. Täljaren blir då

$$(z - e^{j\pi/4})(z - e^{-j\pi/4})$$

Andra villkoret ger nämnaren

$$(z - rj)(z + rj)$$

vilket ger överföringsfunktionen

$$H(z) = \frac{(z - e^{j\pi/4})(z - e^{-j\pi/4})}{(z - rj)(z + rj)} = \frac{z^2 - \sqrt{2}z + 1}{z^2 + r^2}$$

Tredje villkoret innebär att vi ska sätta in $\omega = \pi/2$ dvs $z = e^{j\pi/2} = j$ och bestämma r så att $|H(z)|$ blir $2\sqrt{2}$. Sagt och gjort:

$$H(z = j) = \frac{j^2 - j\sqrt{2} + 1}{r^2 - 1} = \frac{-j\sqrt{2}}{r^2 - 1}$$

$$|H(z=j)| = \frac{\sqrt{2}}{|r^2-1|} = 2\sqrt{2} \rightarrow |r^2-1| = \frac{1}{2}$$

Två möjligheter: $r^2 = \frac{1}{2}$ och $r^2 = 1\frac{1}{2}$. Endast den första kan ge $r < 1$ (ett bivillkor i uppgiften). Insatt i $H(z)$ ovan får vi således

$$H(z) = \frac{z^2 - \sqrt{2}z + 1}{z^2 + \frac{1}{2}}$$

4

a $B(0,0)$ motsvarar medlevärdet av A

b De motsvarar frekvenser i A. Radindex motsvarar vertikal frekvens, kolumnindex motsvarar horisontell frekvens.

c Olika frekvenskomponenter är olika viktiga för hur ögat uppfattar bilden, vissa kan man ta bort utan att påverka intrycket nämnvärt. Genom att transformera med DCT kan man välja vilka frekvenskomponenter man vill behålla i bilden, och med vilken upplösning (hur många bitar) de ska kodas.

d Grafiska bilder med skarpa kanter, t.ex. datorgenererad text och grafik lämpar sig inte, därför att för att beskriva skarpa kanter med DCT behövs höga frekvenskomponenter, och de högsta frekvenserna är de man plockar bort först vid kompression.

5

a

Sätt $\omega = 2\pi f$

$$y(t) = \cos(\omega t) + \cos(\omega(t+\tau))$$

Skriv om med Euler:

$$y(t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t} + e^{j\omega t}e^{j\omega\tau} + e^{-j\omega t}e^{-j\omega\tau}}{2}$$

$$= \frac{e^{j\omega t}(1+e^{j\omega\tau}) + e^{-j\omega t}(1+e^{-j\omega\tau})}{2}$$

$$= \frac{e^{j\omega t}e^{j\omega\tau/2}(e^{-j\omega\tau/2}+e^{j\omega\tau/2}) + e^{-j\omega t}e^{-j\omega\tau/2}(e^{-j\omega\tau/2}+e^{j\omega\tau/2})}{2}$$

$$= \frac{e^{j\omega t}e^{j\omega\tau/2}2\cos(\omega\tau/2) + e^{-j\omega t}e^{-j\omega\tau/2}2\cos(\omega\tau/2)}{2}$$

$$= \cos\frac{\omega\tau}{2}(e^{j\omega t}e^{j\omega\tau/2} + e^{-j\omega t}e^{-j\omega\tau/2})$$

$$= \cos\frac{\omega\tau}{2}\cos(\omega(t+\tau/2))$$

Detta uttryck beskriver en sinusvåg med amplituden $2\cos\frac{\omega\tau}{2} = 2\cos(\pi f\tau)$.

b

Amplituden blir som minst då $2\cos(\pi f\tau) = 0$ vilket inträffar (första gången) då argumentet $\pi f\tau = \pi/2$ dvs $\tau = \frac{1}{2f}$.

Denna tidsskillnad motsvarar sträckan τc där c är ljudhastigheten.

Figuren ger att skillnaden i sträcka som ljudet måste färdas till de två mottagarna mosvarar $x\sin\alpha$.

Detta ger alltså att minsta amplitud erhålls då $\frac{c}{2f} = x\sin\alpha \to \alpha = \arcsin\frac{c}{2fx} \approx 9°$