Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning 2, 2012-12-14, kl. 14.00 – 19.00.

SF1663 Tillämpad linjär algebra med numeriska metoder, för CFATE.

Examinator: Lars Filipsson

Inga hjälpmedel!

Varje uppgift i del A bedöms antingen som godkänd eller underkänd. Varje uppgift i del B ger maximalt 4 poäng. För godkänt krävs att alla uppgifter på del A är godkända och minst 6 poäng på del B.

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa.

Ett resultat på 7 poäng eller mer på kontrollskrivning 2 ger 4 poäng på uppgift 5 på del B, som därmed inte behöver lösas.

Del A

1. Använd följande matlab-körning

```
>> A = [1 3 2 4 6; 2 6 -1 3 -3; 1 3 3 5 9; 1 3 2 4 6];
>> rref(A)

ans =

     1     3     0     2     0
     0     0     1     1     3
     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0
```

för att besvara nedanstående frågor.

(Matlabkommandot `rref(A)` bestämmer den radreducerade formen av matrisen `A`.)

a) Vilken dimension har delrummet som kolumnerna i A spänner upp?

b) Ange en bas för delrummet som kolumnerna i A spänner upp.

c) Skriv vektorn $\boldsymbol{u} = (4, 3, 5, 4)$ som en linjärkombination av $\boldsymbol{v}_1 = (1, 2, 1, 1)$ och $\boldsymbol{v}_2 = (2, -1, 3, 2)$.

V.g. vänd!

2. En linjär avbildning i rummet $\mathbf{R}^3$ har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Visa att $\boldsymbol{u} = (-1, 2, 1)$ är en egenvektor till A. Vilket är motsvarande egenvärde?

b) Bestäm den karakteristiska ekvationen.

c) Den karakteristiska ekvationen i deluppgift b har en dubbelrot och en enkelrot. Går det att utifrån detta dra någon slutsats om huruvida A är diagonaliserbar eller inte?

3. Låt S vara en spegling i linjen $2x - y = 0$ i $\mathbf{R}^2$.

a) Bestäm en egenvektorbas för $\mathbf{R}^2$, dvs. en bas för $\mathbf{R}^2$ som består av egenvektorer till S.

b) Vilken matris har S i den införda egenvektorbasen?

4. Vilken typ är följande andragradsytor i rummet $\mathbf{R}^3$, dvs. klassificera ytorna med namn.

a) $x^2 + 2y^2 + z^2 = 2$

b) $x^2 = y^2 + 2z^2$

c) $2x^2 = 2 - z^2$

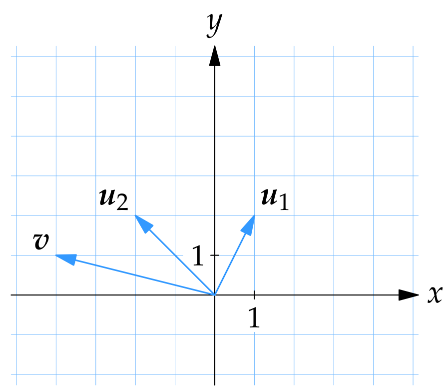
d) $z = 2y^2$

Del B

5. En ny bas $B = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ införs för $\mathbf{R}^2$, där $\boldsymbol{u}_1$ och $\boldsymbol{u}_2$ ges enligt figuren.

a) Bestäm basbytesmatriserna $P_{E \leftarrow B}$ och $P_{B \leftarrow E}$ där E betecknar standardbasen. (2 p)

b) Vektorn $\boldsymbol{v}$ är enligt figuren. Vilka koordinater har $\boldsymbol{v}$ i standardbasen? Vilka koordinater har $\boldsymbol{v}$ i basen B? (2 p)



6. Bestäm en ON-bas för $\operatorname{span}\{(1,7,1,7),\ (0,7,2,7),\ (1,8,1,6)\}$. (4 p)

7. En linjär avbildning i rummet $\mathbf{R}^3$ har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestäm alla vektorer $\boldsymbol{v}$ sådana att $\boldsymbol{v}$ och bildvektorn $A\boldsymbol{v}$ är vinkelräta. (4 p)

8. Två vattenbehållare A och B innehåller saltvatten och står i förbindelse med varandra genom att vatten pumpas mellan behållarna. Om vi inför beteckningarna

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \text{mängden salt i behållare A vid tidpunkten } t, \\ x_2(t) &= \text{mängden salt i behållare B vid tidpunkten } t, \end{aligned}$$

kan mängden salt i behållarna modelleras med ett system av ordinära differentialekvationer,

$$\begin{cases} x_1'(t) = -4x_1(t) + x_2(t), \\ x_2'(t) = 4x_1(t) - 4x_2(t), \end{cases} \qquad (*)$$

med begynnelsevillkoren $x_1(0) = 1$ och $x_2(0) = 0$ (mängden salt vid tidpunkten $t = 0$). Detta system kan också skrivas i matrisform som

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

a) Diagonalisera matrisen $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$. (2 p)

b) Byt variabler till

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},$$

där P är den basbytesmatris som diagonaliserar A. Uttryck systemet $(*)$ och begynnelsevillkoren i variablerna $y_1(t)$ och $y_2(t)$. (1 p)

c) Lös differentialekvationerna du får i deluppgift b. Bestäm därefter $x_1(t)$ och $x_2(t)$. (1 p)