Del A

1. Matlabkörningen visar att matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & 3 & 5 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

radreduceras till

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{array}{ccccc} * & & * & & \end{array} \end{array}$$

där de kolumner som innehåller en ledande etta är markerade med en stjärna.

b) I den radreducerade matrisen kan vi avläsa att alla kolumner kan skrivas som linjärkombinationer av kolumn 1 och 3. Eftersom radoperationerna inte påverkar linjära samband mellan kolumnerna gäller samma linjära samband även kolumnerna i ursprungsmatrisen A. Detta betyder att vektorerna

$$(1,2,1,1) \quad \text{och} \quad (2,-1,3,2)$$

är en bas för kolumnrummet till A.

a) Från deluppgift b ser vi att kolumnrummet har dimension 2.

c) Speciellt ser vi från den radreducerade matrisen att

$$(\text{kolumn } 4) = 2 \cdot (\text{kolumn } 1) + 1 \cdot (\text{kolumn } 3).$$

Översatt till kolumnerna i matrisen A betyder det att

$$(4,3,5,4) = 2 \cdot (1,2,1,1) + 1 \cdot (2,-1,3,2).$$

2. a) Vi har att

$$A\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)\boldsymbol{u},$$

vilket visar att $\boldsymbol{u}$ är en egenvektor till A med egenvärdet -1.

b) Den karakteristiska ekvationen ges av

$$\det(A - \lambda E) = 0,$$

där determinanten i vänsterledet blir

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \{\text{Sarrus regel}\} = -\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3.$$

Alltså är den karakteristiska ekvationen $-\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3 = 0$.

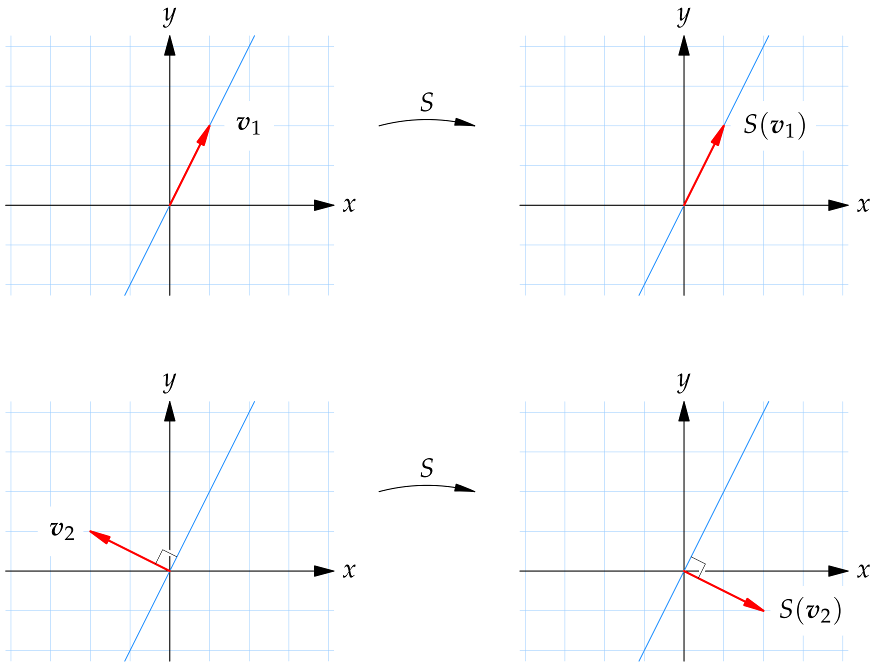
c) Matrisen A är diagonaliserbar om det går att få fram tre linjärt oberoende egenvektorer till A.

Vi vet att egenvektorer som hör till olika egenvärden är linjärt oberoende och uppgiftstexten ger därmed att vi kan hitta två egenvektorer som är linjärt oberoende. För att kunna hitta en tredje egenvektor som inte är en linjärkombination av de två andra är bara möjligt om egenrummet som hör till egenvärdet som är en dubbelrot har dimension 2. Detta går det inte att säga något om bara med informationen i uppgiftstexten.

3. a) Geometriskt ser vi att två egenvektorer är

- en vektor $\boldsymbol{v}_1$ parallell med linjen,
- en vektor $\boldsymbol{v}_2$ vinkelrät mot linjen.

Under speglingen kommer nämligen dessa vektorer att avbildas på $\boldsymbol{v}_1$ respektive $-\boldsymbol{v}_2$, dvs. de är egenvektorer med egenvärde 1 respektive -1.



Vi kan t.ex. välja $\boldsymbol{v}_1 = (1,2)$ och $\boldsymbol{v}_2 = (-2,1)$. Eftersom $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$ hör till olika egenrum är $X = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ en samling linjärt oberoende vektorer och därför en bas för $\mathbf{R}^2$.

b) Vi vet att $S(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{v}_1$ och $S(\boldsymbol{v}_2) = -\boldsymbol{v}_2$. Matrisen för S i basen X är därför

$$\begin{pmatrix} | & | \\ S(\boldsymbol{v}_1)_X & S(\boldsymbol{v}_2)_X \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Ekvationerna kan enkelt skrivas om i huvudaxelform

a) $$\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + y^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1\,,$$

b) $$x^2 = y^2 + \left(\frac{z}{1/\sqrt{2}}\right)^2,$$

c) $$x^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1\,,$$

d) $$z = \left(\frac{y}{1/\sqrt{2}}\right)^2,$$

och från detta kan vi identifiera vilken typ av yta respektive ekvation svarar mot:

a) ellipsoid,

b) elliptisk dubbelkon,

c) elliptisk cylinder,

d) parabolisk cylinder.

Del B

5. a) Från figuren avläser vi att vektorerna $\boldsymbol{u}_1$ och $\boldsymbol{u}_2$ har koordinaterna $(1, 2)$ respektive $(-2, 2)$ i standardbasen.
De sökta basbytesmatriserna är därmed

$$P_{E\leftarrow B} = \begin{pmatrix} | & | \\ (\boldsymbol{u}_1)_E & (\boldsymbol{u}_2)_E \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$P_{B\leftarrow E} = \big(P_{E\leftarrow B}\big)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) I standardbasen avläser vi att $\boldsymbol{v}$ har koordinaterna $(-4, 1)$ och med hjälp av basbytesmatriserna i deluppgift a får vi fram vektorns koordinater i basen B,

$$(\boldsymbol{v})_B = P_{B\leftarrow E}(\boldsymbol{v})_E = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

6. Vi döper vektorerna till

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= (1, 7, 1, 7), \\ \boldsymbol{u}_2 &= (0, 7, 2, 7), \\ \boldsymbol{u}_3 &= (1, 8, 1, 6). \end{aligned}$$

Med Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess får vi fram en ON-bas $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ för det linjära höljet.

Vektorn $\boldsymbol{v}_1$ har samma riktning som $\boldsymbol{u}_1$,

$$\boldsymbol{v}_1 := \boldsymbol{u}_1 = (1, 7, 1, 7)$$

men normerad så att den har belopp 1,

$$\boldsymbol{v}_1 := \frac{(1,7,1,7)}{|(1,7,1,7)|} = \frac{(1,7,1,7)}{\sqrt{1^2+7^2+1^2+7^2}} = \frac{1}{10}(1,7,1,7).$$

Riktningen hos nästa vektor $\boldsymbol{v}_2$ får vi genom att ta $\boldsymbol{u}_2$ och dra ifrån $\boldsymbol{u}_2$:s komposant i $\boldsymbol{v}_1$-riktningen,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_2 &:= \boldsymbol{u}_2 - [\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{v}_1]\,\boldsymbol{v}_1 \\ &= (0,7,2,7) - \Big[(0,7,2,7)\cdot \tfrac{1}{10}(1,7,1,7)\Big]\,\tfrac{1}{10}(1,7,1,7) \\ &= (0,7,2,7) - \tfrac{1}{100}\Big[0+49+2+49\Big]\,(1,7,1,7) \\ &= (0,7,2,7) - (1,7,1,7) \\ &= (-1,0,1,0), \end{aligned}$$

och därefter normerar vi $\boldsymbol{v}_2$, ,

$$\boldsymbol{v}_2 := \frac{(-1,0,1,0)}{|(-1,0,1,0)|} = \frac{(-1,0,1,0)}{\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2+0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1,0).$$

Den sista vektorn $\boldsymbol{v}_3$:s riktning väljs som $\boldsymbol{u}_3$ minus $\boldsymbol{u}_3$:s komposanter i $\boldsymbol{v}_1$- och $\boldsymbol{v}_2$-riktningarna,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_3 &:= \boldsymbol{u}_3 - [\boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{v}_1]\,\boldsymbol{v}_1 - [\boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{v}_2]\,\boldsymbol{v}_2 \\ &= (1,8,1,6) - \Big[(1,8,1,6)\cdot \tfrac{1}{10}(1,7,1,7)\Big]\,\tfrac{1}{10}(1,7,1,7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&- \Big[(1,8,1,6)\cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1,0)\Big]\tfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1,0)\\
&= (1,8,1,6) - \tfrac{1}{100}\Big[1+56+1+42\Big](1,7,1,7) - \tfrac{1}{2}\Big[-1+0+1+0\Big](-1,0,1,0)\\
&= (1,8,1,6) - (1,7,1,7)\\
&= (0,1,0,-1),
\end{aligned}$$

följt av en normering,

$$v_3 := \frac{(0,1,0,-1)}{|(0,1,0,-1)|} = \frac{(0,1,0,-1)}{\sqrt{0^2+1^2+0^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,-1).$$

En ON-bas är alltså

$$\Big\{\frac{1}{10}(1,7,1,7),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1,0),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,-1)\Big\}.$$

7. Om vi sätter $v=(x,y,z)$ så blir bildvektorn

$$Av = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y\\ 3x+4y+2z\\ 2y+2z\end{pmatrix}.$$

Villkoret att v och Av ska vara vinkelräta kan formuleras som att $v\cdot Av = 0$, där vänsterledet är

$$\begin{aligned}
v\cdot Av &= (x,y,z)\cdot(2x+y, 3x+4y+2z, 2y+2z)\\
&= x(2x+y) + y(3x+4y+2z) + z(2y+2z)\\
&= 2x^2+4xy+4y^2+4yz+2z^2.
\end{aligned}$$

Vi ska alltså bestämma för vilka (x,y,z) som ovanstående kvadratiska form antar värdet 0. För att göra detta börjar vi med att skriva den kvadratiska formen i matrisform

$$\begin{pmatrix} x & y & z\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0\\ 2 & 4 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}.$$

Matrisen

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0\\ 2 & 4 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

har den karakteristiska ekvationen $\det(B-\lambda E)=0$, där determinanten beräknas till

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0\\ 2 & 4-\lambda & 2\\ 0 & 2 & 2-\lambda\end{vmatrix}
&\begin{matrix} \\ - \\ + \end{matrix}
= \begin{vmatrix} -\lambda & \lambda & -\lambda\\ 2 & 4-\lambda & 2\\ 0 & 2 & 2-\lambda\end{vmatrix}
= \lambda\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1\\ 2 & 4-\lambda & 2\\ 0 & 2 & 2-\lambda\end{vmatrix}
\begin{matrix} 2 \\ \\ \\ \end{matrix}\\
&= \lambda\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1\\ 0 & 6-\lambda & 0\\ 0 & 2 & 2-\lambda\end{vmatrix} = \{\,\text{Kofaktorutveckling}\,\}\\
&= \lambda(6-\lambda)\begin{vmatrix} -1 & -1\\ 0 & 2-\lambda\end{vmatrix} = -\lambda(6-\lambda)(2-\lambda).
\end{aligned}$$

Från detta ser vi att den karakteristiska ekvationen har lösningar $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ och $\lambda_3 = 6$. Detta betyder att den kvadratiska formens huvudaxelform är

$$0\cdot(x')^2 + 2\cdot(y')^2 + 6\cdot(z')^2,$$

dvs. den kvadratiska formen är positivt semidefinit. De vektorer $v = (x, y, z)$ för vilken formen antar värdet noll är egenrummet till B som svarar mot egenvärdet 0 och består av alla vektorer v som uppfyller $Bv = \mathbf{0}$. Detta är ett linjärt ekvationssystem som vi löser med gausseliminering,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} -\ \tfrac{1}{2} \\ \\ \end{array} \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -\ -\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2} \\ \end{array} \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Svaret är alltså vektorerna

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \text{ parameter}).$$

8. a) För att diagonalisera A bestämmer vi egenvärden och motsvarande egenvektorer till A. Den karakteristiska ekvationen är

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & 1 \\ 4 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (-4-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 + 8\lambda + 12 = 0$$

och vi kvadratkompletterar vänsterledet

$$(\lambda+4)^2 - 16 + 12 = (\lambda+4)^2 - 4.$$

Ekvationen har därför lösningarna $\lambda_{1,2} = -4 \pm \sqrt{4}$, dvs. $\lambda_1 = -6$ och $\lambda_2 = -2$. Motsvarande egenvektorer får vi fram genom att lösa egenvektorekvationen $(A - \lambda E)v = \mathbf{0}$ i respektive fall.

- $\lambda = -6$: Egenvektorekvationen $(A + 6E)v = \mathbf{0}$ blir

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} -2\ \tfrac{1}{2} \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \tfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

och lösningarna är

$$v = \begin{pmatrix} -t \\ 2t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (t \text{ parameter}).$$

- $\lambda = -2$: Egenvektorekvationen $(A + 2E)v = \mathbf{0}$ blir

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} 2\ -\tfrac{1}{2} \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\tfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

och lösningarna är

$$v = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (t \text{ parameter}).$$

Som basvektorer för egenvektorbasen X väljer vi vektorerna $\boldsymbol{v}_1 = (-1, 2)$ och $\boldsymbol{v}_2 = (1, 2)$ (som är linjärt oberoende eftersom de tillhör olika egenrum).
Basbytesmatrisen från egenvektorbasen till standardbasen blir

$$P = P_{E \leftarrow X} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

och en diagonalisering av A är alltså

$$A = PDP^{-1},$$

där

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

b) Inför vi vektorbeteckningarna

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

så kan sambandet mellan variablerna skrivas $\boldsymbol{y}(t) = P^{-1}\boldsymbol{x}(t)$ och systemet av ordinära differentialekvationer som

$$\boldsymbol{x}'(t) = A\,\boldsymbol{x}(t).$$

Genom att ersätta A med sin diagonalisering kan systemet skrivas som

$$\boldsymbol{x}'(t) = PDP^{-1}\,\boldsymbol{x}(t) \quad \Leftrightarrow \quad P^{-1}\boldsymbol{x}'(t) = DP^{-1}\,\boldsymbol{x}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{y}'(t) = D\,\boldsymbol{y}(t).$$

I variablerna $\boldsymbol{y}(t) = (y_1(t), y_2(t))$ blir alltså systemet

$$\begin{cases} y_1'(t) = -6\,y_1(t), \\ y_2'(t) = -2\,y_2(t). \end{cases}$$

Begynnelsevillkoren blir

$$\boldsymbol{y}(0) = P^{-1}\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

c) Från deluppgift b har vi två ordinära differentialekvationer

- $y_1'(t) = -6\,y_1(t)$, där $y_1(0) = -\frac{1}{2}$,
- $y_2'(t) = -2\,y_2(t)$, där $y_2(0) = \frac{1}{2}$.

Dessa ekvationer har lösningarna

- $y_1(t) = -\frac{1}{2}\,e^{-6t}$,
- $y_2(t) = \frac{1}{2}\,e^{-2t}$.

Uttryckt i de ursprungliga variablerna får vi

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}(t) = P\,\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\,e^{-6t} \\ \frac{1}{2}\,e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,e^{-6t} + \frac{1}{2}\,e^{-2t} \\ -e^{-6t} + e^{-2t} \end{pmatrix}.$$