Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning 1, 2013-01-07, kl. 08.00 – 13.00.

SF1663 Tillämpad linjär algebra med numeriska metoder, för CFATE.

Examinator: Lars Filipsson

Inga hjälpmedel!

Varje uppgift i del A bedöms antingen som godkänd eller underkänd. Varje uppgift i del B ger maximalt 4 poäng. För godkänt krävs att alla uppgifter på del A är godkända och minst 6 poäng på del B.

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa.

Ett resultat på 7 poäng eller mer på kontrollskrivning 1 ger 4 poäng på uppgift 5 på del B, som därmed inte behöver lösas.

Del A

1. Betrakta matrisekvationen

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

där matrisen X är obekant.

a) Vilka två av determinanterna

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

räcker det att visa är nollskilda för att kunna dra slutsatsen att matrisekvationen har exakt en lösning X?

b) Beräkna de två determinanterna från deluppgift a.

c) Skriv ett Matlab-program som löser matrisekvationen.

2. Givet vektorerna $\boldsymbol{u} = (1, 0, 7)$ och $\boldsymbol{v} = (1, 1, 3)$.

a) Bestäm projektionen av $\boldsymbol{u}$ på $\boldsymbol{v}$.

b) Bestäm projektionen av $\boldsymbol{u}$ vinkelrätt mot $\boldsymbol{v}$.

V.g. vänd!

3. Ett plan är givet i parameterformen

$$(x, y, z) = (1, 0, 1) + s\,(2, -2, 1) + t\,(1, 1, 3),$$

där s och t är parametrar.

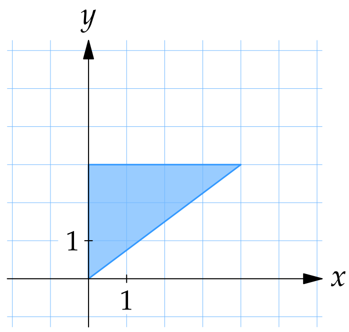
a) Bestäm en linje (i parameterform) som ligger i planet.

b) Bestäm en ekvation för planet.

c) Ligger punkten $(1, -4, -4)$ i planet?

4. En linjär avbildning T i planet $\mathbf{R}^2$ har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$



a) Rita ut hur triangeln i figuren till höger avbildas med T.

b) Bestäm arean av triangeln efter att den avbildats med T.

Del B

5. Betrakta det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + az = 1 \\ 3x + 4y + 6z = b \end{cases}$$

i de tre obekanta x, y och z.

a) Undersök för vilka värden på konstanterna a, b som ekvationssystemet har precis en lösning, oändligt många lösningar, respektive ingen lösning. (2 p)

b) Bestäm alla lösningar till systemet i de fall det har oändligt många lösningar. (2 p)

6. Vid en mätning av två storheter har vi fått följande mätvärden

I [mA]	0	2	4	6
U [mV]	1	7	8	10

Två forskare tvistar om det finns ett linjärt samband $U = RI$, eller om det krävs en konstantterm för att förklara sambandet, $U = RI + U_0$.

a) Ställ upp de två minsta-kvadratproblem som fås från de givna mätdata för att bestämma de okända parametrarna i de två modellerna. (2 p)

b) Lös minsta-kvadratproblemen och formulera adekvata slutsatser. (1 p)

c) Förklara varför minsta-kvadratavvikelserna säkerligen är mindre i det andra fallet. (1 p)

7. Låt ℓ vara linjen $(1,0,1) + t\,(2,1,-1)$ och m vara linjen $(0,1,2) + t\,(1,2,1)$.

a) Det finns många plan i $\mathbf{R}^3$ som varken skär ℓ eller m. Alla dessa är parallella. Bestäm en normalvektor till dem. (2 p)

b) Bestäm en ekvation för det plan i $\mathbf{R}^3$ som varken skär ℓ eller m och som har samma avstånd till ℓ som till m. (2 p)

8. På cirkeln med medelpunkt i origo och radie 1 är punkterna $P_1, \ldots, P_{24}$ utplacerade så att de delar upp cirkeln i lika stora delar enligt figuren. Inuti cirkeln finns punkten $Q = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. Beräkna vektorsumman

$$\boldsymbol{u} = \overrightarrow{QP_1} + \cdots + \overrightarrow{QP_{24}}. \qquad (4\,\text{p})$$