Del A

1. a) Om matrisekvationen skrivs

$$AXB = C$$

och matriserna A och B är inverterbara så kan ekvationen lösas genom att båda led vänstermultipliceras med A^{-1} och högermultipliceras med B^{-1},

$$X = A^{-1}CB^{-1}.$$

Matriserna A och B är inverterbara om $\det A \neq 0$ och $\det B \neq 0$, dvs. om

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{och} \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

b) Vi har

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 11 & 11 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 11 & 11 \end{vmatrix} = 55,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -11 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -11 & 8 \end{vmatrix} = 17.$$

c)

```
A = [2 3 -1; -4 1 0; 5 2 3];
B = [2 0 -3; -2 3 5; 3 1 -1];
C = [2 2 -3; -1 1 0; 4 1 1];
X = A\C/B
```

2. a) $\text{proj}_{\boldsymbol{v}}\, \boldsymbol{u} = \dfrac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|^2}\,\boldsymbol{v} = \dfrac{(1,0,7)\cdot(1,1,3)}{|(1,1,3)|^2}\,(1,1,3) = \dfrac{1\cdot 1 + 0\cdot 1 + 7\cdot 3}{1^2+1^2+3^2}\,(1,1,3) = (2,2,6)$

b) $\text{proj}^{\perp}_{\boldsymbol{v}}\, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} - \text{proj}_{\boldsymbol{v}}\, \boldsymbol{u} = (1,0,7) - (2,2,6) = (-1,-2,1)$

3. a) En linje ligger i planet om en punkt på linjen tillhör planet och dess riktning är parallell med planet.

Från planets parameterform kan vi avläsa att en punkt i planet är $P = (1,0,1)$ och en riktning parallell med planet är $\boldsymbol{u} = (2,-2,1)$. Exempelvis ligger alltså linjen

$$(x,y,z) = (1,0,1) + s\,(2,-2,1)$$

i planet.

b) För att bestämma en ekvation för planet behöver vi en punkt P i planet och en normalvektor $\boldsymbol{n}$ till planet.

Från planets parameterform avläser vi att $P = (1,0,1)$ är en punkt i planet och $\boldsymbol{u} = (2,-2,1)$ och $\boldsymbol{v} = (1,1,3)$ är två vektorer parallella med planet. En normal till planet får vi genom att ta kryssprodukten av $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$,

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-7,-5,4).$$

En ekvation för planet är då $\boldsymbol{n}\cdot((x,y,z) - \overrightarrow{OP}) = 0$, dvs.

$$(-7,-5,4)\cdot\big((x,y,z)-(1,0,1)\big) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad -7(x-1) - 5y + 4(z-1) = 0$$

vilket förenkas till $7x + 5y - 4z = 3$.

c) Punkten $(1,-4,-4)$ ligger i planet om den uppfyller planets ekvation. Vi har att

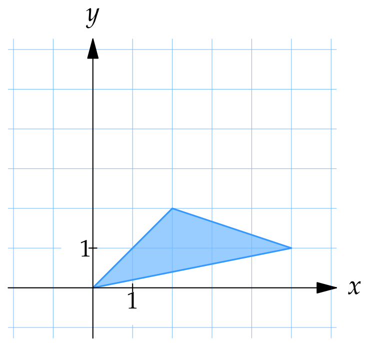
$$7\cdot 1+5\cdot(-4)-4\cdot(-4)=7-20+16=3,$$

vilket visar att punkten ligger i planet.

4. a) Triangeln har hörnpunkter i $(0,0)$, $(0,3)$ och $(4,3)$. Dessa hörnpunkter avbildas till punkterna

$$A\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\qquad A\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix},\qquad A\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix},$$

och den linjära avbildningen kommer avbilda kantlinjerna på kantlinjer mellan hörnpunkternas bildpunkter.



b) När triangeln avbildas med den linjära avbildningen som har matrisen A så kommer arean av bildtriangeln vara lika med arean av den ursprungliga triangeln multiplicerat med $|\det A|$.

Arean av triangeln är

$$\text{Area}=\tfrac{1}{2}\cdot(\text{basen})\cdot(\text{höjden})=\tfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 4=6\text{ a.e.}$$

och arean av bildtriangeln är därför

$$\begin{vmatrix}\frac{3}{4} & \frac{2}{3}\\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3}\end{vmatrix}\cdot 6=\left(\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{2}{3}-\left(-\tfrac{1}{4}\right)\cdot\tfrac{2}{3}\right)\cdot 6=4\text{ a.e.}$$

Del B

5. Det linjära ekvationssystemet har exakt en lösning om och endast om determinanten av vänsterledets koefficientmatris är nollskild. Eftersom

$$\begin{vmatrix}1&1&2\\1&2&a\\3&4&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&0\\1&2&a-2\\3&4&0\end{vmatrix}=-(a-2)\begin{vmatrix}1&1\\3&4\end{vmatrix}=-(a-2)$$

$$-2$$

har alltså systemet exakt en lösning när $a\neq 2$.

När $a=2$ har vi det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases}x+\ \ y+2z=0\\ x+2y+2z=1\\ 3x+4y+6z=b\end{cases}$$

som vi löser med gausseliminering,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 6 & b \end{array}\right) \begin{array}{c} - \quad -3 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & b \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ - \quad - \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array}\right).$$

Om $b-1 \neq 0$, dvs. $b \neq 1$, så saknar systemet lösning.

Om $b-1 = 0$, dvs. $b = 1$, så avläser vi parameterlösningen

$$\begin{cases} x = -1-2t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} \qquad (t \text{ parameter}).$$

6. a) Om mätvärdena sätts in i de två modellerna får vi de överbestämda linjära ekvationssystemen

$$\begin{cases} 1 = 0 \cdot R \\ 7 = 2 \cdot R \\ 8 = 4 \cdot R \\ 10 = 6 \cdot R \end{cases} \quad \text{resp.} \quad \begin{cases} 1 = 0 \cdot R + U_0 \\ 7 = 2 \cdot R + U_0 \\ 8 = 4 \cdot R + U_0 \\ 10 = 6 \cdot R + U_0 \end{cases}$$

eller i matrisform

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ U_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Motsvarande normalekvationer får vi genom att vänstermultiplicera båda led med transponatet av vänsterledets koefficientmatris.

- Det första systemets normalekvation blir

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

vilket ger ekvationen $56R = 106$.

- Det andra systemets normalekvation blir

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ U_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

vilket ger ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} 56 & 12 \\ 12 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ U_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 106 \\ 26 \end{pmatrix}$$

b) Löser vi normalekvationerna får vi lösningarna

$$R = \tfrac{53}{28} \approx 1{,}9 \qquad \text{resp.} \qquad \begin{cases} R = \tfrac{7}{5} = 1{,}2 \\ U_0 = \tfrac{23}{10} = 2{,}3 \end{cases}$$

Ett sätt att mäta hur väl lösningarna anpassar till mätvärdena är att stoppa in dem i det ursprungliga ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1{,}9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \text{resp.} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ 2{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

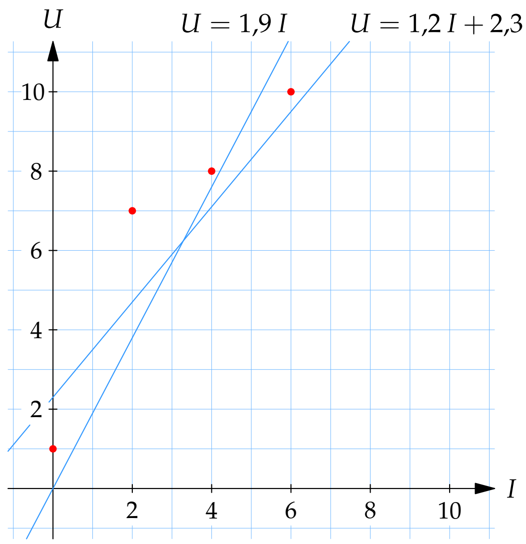
flytta över allt i vänsterledet,

$$\begin{pmatrix} -1{,}0 \\ -3{,}2 \\ -0{,}4 \\ 1{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{resp.} \qquad \begin{pmatrix} 1{,}3 \\ -2{,}3 \\ -0{,}9 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

och bestämma längden av vänsterledet,

$$\begin{aligned} \sqrt{(-1{,}0)^2 + (-3{,}2)^2 + (-0{,}4)^2 + (1{,}4)^2} &= \sqrt{8{,}41}, \\ \sqrt{(1{,}3)^2 + (-2{,}3)^2 + (-0{,}9)^2 + (0{,}5)^2} &= \sqrt{8{,}04}. \end{aligned}$$

Eftersom dessa storheter är ungefär lika stora är det svårt att dra någon slutsats om vilken modell som är lämpligast.



c) Modellen $U = RI$ är ett specialfall av modellen $U = RI + U_0$. Det betyder att alla anpassningar av modellen $U = RI$ till mätvärdena duger också som en anpassning av modellen $U = RI + U_0$ till mätvärdena genom att helt enkelt välja samma R och $U_0 = 0$. Den bästa möjliga anpassningen av modellen $U = RI + U_0$ till mätvärdena måste alltså vara minst lika bra som den bästa anpassningen av modellen $U = RI$ till mätvärdena.

7. a) Antag att ett plan som varken skär ℓ eller m har ekvationen

$$ax + by + cz = d$$

där a, b, c och d är konstanter.
Eftersom linjen ℓ inte ska skära planet så ska ingen punkt på ℓ uppfylla planets ekvation, dvs.

$$a(1 + 2t) + b(0 + t) + c(1 - t) \neq d$$

oavsett värdet på t. Vi kan skriva denna olikhet som

$$(a + c - d) + t\,(2a + b - c) \neq 0$$

och om detta ska vara uppfyllt för alla t så måste

$$a + c - d \neq 0, \qquad (1)$$
$$2a + b - c = 0. \qquad (2)$$

Samma sak gäller planet m : Ingen punkt på linjen m ska uppfylla planets ekvation, dvs.

$$a(0 + t) + b(1 + 2t) + c(2 + t) \neq d$$

oavsett värdet på t . Vi skriver om olikheten som

$$(b + 2c - d) + t\,(a + 2b + c) \neq 0.$$

Denna olikhet är uppfylld för alla t om

$$b + 2c - d \neq 0, \qquad (3)$$
$$a + 2b + c = 0. \qquad (4)$$

Sambanden (2) och (4) ger ett linjärt ekvationssystem i a , b och c som vi löser med gausseliminering,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) -2 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right) -\tfrac{1}{3} \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) -2 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Vi avläser lösningarna till

$$(a, b, c) = s\,(1, -1, 1), \qquad (s \text{ parameter}).$$

Alla plan som varken skär ℓ eller m har alltså en normalvektor (a, b, c) som är parallell med vektorn $(1, -1, 1)$.

b) Antag att det sökta planet har ekvationen

$$x - y + z = d,$$

där d är en konstant.

Eftersom linjen ℓ är parallell med det sökta planet ges det kortaste avståndet av

$$d_1 = \left|\operatorname{proj}_{\boldsymbol{n}} \overrightarrow{PQ}\right|,$$

där P är en punkt på planet, Q en punkt på linjen ℓ och $\boldsymbol{n} = (1, -1, 1)$ är planets normalvektor. Väljer vi t.ex.

$$P = (d, 0, 0) \quad \text{och} \quad Q = (1, 0, 1)$$

så får vi

$$d_1 = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|} = \frac{|(1 - d) \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|\,d - 2\,|}{\sqrt{3}}.$$

På samma sätt ges det kortaste avståndet mellan m och planet av

$$d_2 = \left|\operatorname{proj}_{\boldsymbol{n}} \overrightarrow{PR}\right|,$$

där R är en punkt på linjen m , t.ex. $R = (0, 1, 2)$. Vi får att

$$d_2 = \frac{|\overrightarrow{PR} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|} = \frac{|(-d) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|\,d - 1\,|}{\sqrt{3}}.$$

Avstånden d_1 och d_2 är lika när $d = \frac{3}{2}$. Det sökta planet är alltså

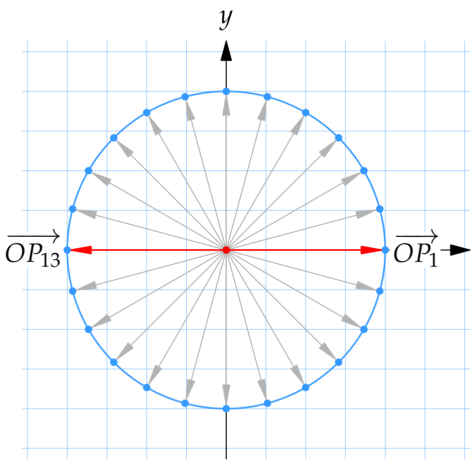
$$x - y + z = \tfrac{3}{2}.$$

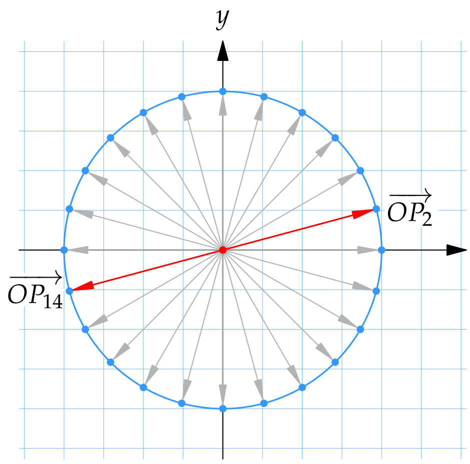
8. Vi börjar med att betrakta vektorsumman

$$\overrightarrow{OP_1} + \cdots + \overrightarrow{OP_{24}},$$

där $O = (0,0)$. Vektorerna i denna summa kan delas upp i par av vektorer som är lika långa men har motsatt riktning:

$$\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_{13}}, \quad \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_{14}}, \quad \ldots, \quad \overrightarrow{OP_{12}}, \overrightarrow{OP_{24}}.$$



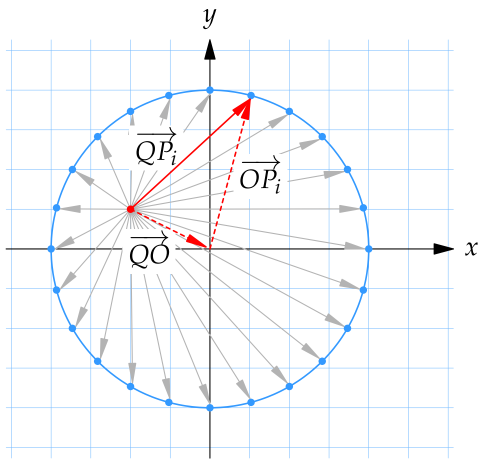


Därmed är

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP_1} + \cdots + \overrightarrow{OP_{24}} &= (\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_{13}}) + (\overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_{14}}) + \cdots + (\overrightarrow{OP_{12}} + \overrightarrow{OP_{24}}) \\ &= \mathbf{0} + \mathbf{0} + \cdots + \mathbf{0} \\ &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Varje vektor $\overrightarrow{QP_i}$ kan skrivas som en summa av två vektorer genom att gå via origo,

$$\overrightarrow{QP_i} = \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OP_i} = -\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OP_i}$$



Därmed blir

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QP_1} + \cdots + \overrightarrow{QP_{24}} &= (-\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OP_1}) + (-\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OP_2}) + \cdots + (-\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OP_{24}}) \\ &= -24\,\overrightarrow{OQ} + (\overrightarrow{OP_1} + \cdots + \overrightarrow{OP_{24}}) \\ &= -24\,\overrightarrow{OQ} + \mathbf{0} \\ &= -24\,(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}) \\ &= (12, -6).\end{aligned}$$