KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Tentamen
Torsdagen den 10 januari, 2013

Skrivtid: 08:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Mattias Dahl

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. De tre första uppgifterna, som utgör del A, kan ersättas med resultat från den löpande examinationen. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning ger 4 poäng. Varje godkänt seminarium ger 1 poäng på uppgift 3. Det är maximum mellan resultatet från den löpande examinationen och resultatet på motsvarande uppgift på tentamen som räknas. Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid två tentamenstillfällen under läsåret.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som är främst till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. Bestäm en ekvation för tangentplanet i punkten $(1, -1, 2)$ till ellipsoiden $2x^2+3y^2+z^2 = 9$. **(4 p)**

2. a) Bestäm alla stationära punkter till funktionen $f(x, y, z) = x^3 + y^2 - 6xy + z^2 - 2z$. **(2 p)**

   b) Välj *en* av de stationära punkterna från deluppgift a och bestäm punktens karaktär (maximi-, minimi- eller sadelpunkt). **(2 p)**

3. Kroppen K begränsas av paraboloidytorna $z = x^2 + y^2$ och $z = 2 - x^2 - y^2$. Beräkna integralen

$$\iiint_K (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz.$$

(4 p)

Del B

4. Bestäm
$$\int_\gamma x^2 y\, dx$$
där γ är ellipsen $9x^2 + y^2 = 1$ moturs orienterad. **(4 p)**

5. Gör ett linjärt variabelbyte för att beräkna
$$\iint_D (x - 3y)\sin(x + 2y)\, dx\, dy$$
där D bestäms av $2 \le x - 3y \le 3$, $0 \le x + 2y \le \pi/4$. **(4 p)**

6. Låt $h(x, y) = xe^{-(x^2+y^2)}$.
   a) Bestäm andra ordningens Taylorpolynom till $h(x, y)$ i punkten $(x, y) = (1, 2)$. **(2 p)**
   b) Använd Taylorutvecklingen i deluppgift a för att bestämma ett approximativt värde till $h(1.1, 1.9)$. Använd att $e^{-5} \approx 6{,}74 \times 10^{-3}$. **(2 p)**

Var god vänd!

DEL C

7. Låt S vara cylinderytan $\{(x, y, z)\colon x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$ och låt $\boldsymbol{N}$ vara den yttre normalen. Visa att
$$\iint_S \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{N}\, dS = 0$$
om $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ är ett C^2 vektorfält där v_1 och v_2 är oberoende av z. **(4 p)**

8. Arean av ellipsen som ges av $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ är πab. Använd Lagranges metod för att bestämma den ellips $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ som innehåller rektangeln $[-1, 1] \times [-2, 2]$ och har den minsta arean. **(4 p)**

9. a) Beräkna integralerna
$$\iint_{D_1} \frac{dx\, dy}{(x^2 + y^2)^{1/7}} \quad \text{och} \quad \iint_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$
där $D_1 = \{(x, y)\colon x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ och $D_2 = \{(x, y)\colon x^2 + y^2 \geq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$. **(2 p)**

   b) Bestäm om integralen
$$\iint_D \frac{e^{-(x^2+y^2)}}{(x^2 + y^2)^{1/7}}\, dx\, dy,$$
där $D = \{(x, y)\colon x \geq 0, y \geq 0\}$, konvergerar eller divergerar. Motivera ditt svar. **(2 p)**