KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2013-01-10

Del A

1. Bestäm en ekvation för tangentplanet i punkten $(1,-1,2)$ till ellipsoiden $2x^2+3y^2+z^2=9$. **(4 p)**

Lösning. Vi uppfattar ytan som nivåytan $F(x,y,z)=9$ till funktionen $F(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2$. En normalvektor till ytan ges av $\nabla F=(4x,6y,2z)$. I punkten $(1,-1,2)$ fås att $\nabla F=(4,-6,4)$. Vi kan välja $(2,-3,2)$ som det sökta planets normalvektor vilket ger att planets ekvation kan skrivas $2x-3y+2z=C$. Insättning av punkten $(1,-1,2)$ ger konstantens värde $C=9$. □

Svar: Exempelvis $2x-3y+2z=9$.

2. a) Bestäm alla stationära punkter till funktionen $f(x, y, z) = x^3 + y^2 - 6xy + z^2 - 2z$. **(2 p)**

   b) Välj *en* av de stationära punkterna från deluppgift a och bestäm punktens karaktär (maximi-, minimi- eller sadelpunkt). **(2 p)**

Lösning. Från

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 6y = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 6x = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z - 2 = 0$$

har vi $0 = 3x^2 - 6y = 3x^2 - 18x$ så $x = 0$ eller $x = 6$. Eftersom $2y - 6x = 0$ är motsvarande $y = 0$ och $y = 18$. Sista ekvationen ger $z = 1$. Det finns alltså två stationära punkter $(0, 0, 1)$ och $(6, 18, 1)$.

Vi bestämmer karaktär (maximi-, minimi eller sadelpunkt) för punkten (0,0,1).

Derivatorna av andra ordningen är

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = -6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} = 0.$$

I punkten $(0, 0, 1)$ har dessa andraderivator värdena

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = -6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} = 0.$$

Vi avgör punktens karaktär med hjälp av Taylorpolynomet av grad 2,

$$f(0 + h, 0 + k, 1 + \ell) = -1 + k^2 - 6hk + \ell^2 + \text{(restterm av ordning 3)},$$

där den kvadratiska formen kan skrivas $k^2 - 6hk + \ell^2 = (k - 3h)^2 - 9h^2 + \ell^2$ och är indefinit (antar både positiva och negativa värden).

Därför är punkten $(0, 0, 1)$ en sadelpunkt.

(Punkten $(6, 18, 1)$ kan analyseras på motsvarande sätt och resultatet är att den är en lokal minimipunkt.) □

Svar:

a) $(0, 0, 1)$ och $(6, 18, 1)$.

b) $(0, 0, 1)$ är en sadelpunkt och $(6, 18, 1)$ är en lokal minimipunkt.

3. Kroppen K begränsas av paraboloidytorna $z = x^2 + y^2$ och $z = 2 - x^2 - y^2$. Beräkna integralen

$$\iiint_K (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz. \qquad \textbf{(4 p)}$$

Lösning. Ytorna $z = x^2+y^2$ och $z = 2-x^2-y^2$ skär varandra då $x^2+y^2 = z = 2-x^2-y^2$, dvs. ovanför cirkeln $x^2 + y^2 = 1$ i xy-planet. Det betyder att kroppen K ligger ovanför cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 1$ och beskrivs av

$$K = \left\{(x, y, z) \colon\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x^2 + y^2\right\}.$$

Vi inför cylindriska koordinater och då beskrivs K av

$$K = \left\{(r, \theta, z) \colon\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq r \leq 1,\ r^2 \leq z \leq 2 - r^2\right\}.$$

Integralen blir

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left(\int_{r^2}^{2-r^2} r^2 \cdot r\,dz\right)dr\right)d\theta &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \big[\,z\,\big]_{z=r^2}^{z=2-r^2} r^3\,dr\right)d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 (2r^3 - 2r^5)\,dr\right)d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[2 \cdot \frac{r^4}{4} - 2 \cdot \frac{r^6}{6}\right]_0^1 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{6}\,d\theta \\
&= \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

□

Svar: $\pi/3$

DEL B

4. Bestäm
$$\int_\gamma x^2 y\,dx$$
där γ är ellipsen $9x^2 + y^2 = 1$ moturs orienterad. **(4 p)**

Lösning. Vi ser att γ är randen till ellipsen $E = \{(x,y) : 9x^2 + y^2 \le 1\}$, och använder Green's formel,
$$\int_\gamma x^2 y\,dx = \int_{\partial E} x^2 y\,dx = -\iint_E x^2\,dx\,dy.$$
Eftersom E är en ellips med halvaxlar $\frac{1}{3}$ och 1 i x- respektive y-riktningen gör vi ett elliptiskt polärt variabelbyte enligt
$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$
och i dessa variabler beskrivs ellipsen E av olikheterna $0 \le r \le 1$ och $0 \le \varphi \le 2\pi$. Integrationselementet $dx\,dy$ blir
$$dx\,dy = \left|\begin{matrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{matrix}\right| dr\,d\varphi = \left|\begin{matrix} \frac{1}{3}\cos\varphi & -\frac{1}{3} r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{matrix}\right| dr\,d\varphi = \tfrac{1}{3} r\,dr\,d\varphi.$$
Vi får nu att
$$\begin{aligned} -\iint_E x^2\,dx\,dy &= -\int_0^1 \Big(\int_0^{2\pi} \tfrac{1}{9} r^2 \cos^2\varphi \cdot \tfrac{1}{3} r\,d\varphi \Big)\,dr \\ &= -\frac{1}{27} \Big(\int_0^1 r^3\,dr \Big) \Big(\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,d\varphi \Big) \\ &= -\frac{1}{27} \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi \\ &= -\frac{\pi}{108}. \end{aligned}$$
□

Svar: $-\dfrac{\pi}{108}$

5. Gör ett linjärt variabelbyte för att beräkna

$$\iint_D (x-3y)\sin(x+2y)\,dx\,dy$$

där D bestäms av $2 \le x-3y \le 3$, $0 \le x+2y \le \pi/4$. **(4 p)**

Lösning. Vi gör det linjära variabelbytet

$$\begin{cases} u = x-3y \\ v = x+2y \end{cases}$$

som är en bijektiv avbildning $(x,y) \mapsto (u,v)$ eftersom

$$\det\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right) = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

Området D beskrivs i de nya variablerna av olikheterna $2 \le u \le 3$ och $0 \le v \le \pi/4$.

Integrationselementet $dx\,dy$ blir

$$dx\,dy = \left|\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\right| du\,dv = \left|\det\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1}\right| du\,dv = \tfrac{1}{5}\,du\,dv.$$

Dubbelintegralen blir

$$\begin{aligned}
\iint_D (x-3y)\sin(x+2y)\,dx\,dy &= \iint_D u\sin v\,\tfrac{1}{5}\,du\,dv \\
&= \frac{1}{5}\int_2^3 \left(\int_0^{\pi/4} \sin v\,dv\right) u\,du \\
&= \frac{1}{5}\int_2^3 u\,du \cdot \int_0^{\pi/4} \sin v\,dv \\
&= \frac{1}{5}\left[\frac{u^2}{2}\right]_2^3 \cdot \Big[-\cos v\Big]_0^{\pi/4} \\
&= \frac{2-\sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}$$

□

Svar: $\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$

6. Låt $h(x, y) = xe^{-(x^2+y^2)}$.
   a) Bestäm andra ordningens Taylorpolynom till $h(x, y)$ i punkten $(x, y) = (1, 2)$. **(2 p)**
   b) Använd Taylorutvecklingen i deluppgift a för att bestämma ett approximativt värde till $h(1.1, 1.9)$. Använd att $e^{-5} \approx 6{,}74 \times 10^{-3}$. **(2 p)**

Lösning. a) Vi har att

$$\begin{aligned}
h'_x(x, y) &= e^{-(x^2+y^2)} - 2x^2 e^{-(x^2+y^2)},\\
h'_y(x, y) &= -2xye^{-(x^2+y^2)},\\
h''_{xx}(x, y) &= -2xe^{-(x^2+y^2)} - 4xe^{-(x^2+y^2)} + 4x^3 e^{-(x^2+y^2)},\\
h''_{xy}(x, y) &= -2ye^{-(x^2+y^2)} + 4x^2 ye^{-(x^2+y^2)},\\
h''_{yy}(x, y) &= -2xe^{-(x^2+y^2)} + 4xy^2 e^{-(x^2+y^2)},
\end{aligned}$$

och uträknade i punkten $(x, y) = (1, 2)$ får vi

$$\begin{aligned}
&h(1, 2) = e^{-5}, \quad && h'_x(1, 2) = -e^{-5}, \quad && h'_y(1, 2) = -4e^{-5},\\
&h''_{xx}(1, 2) = -2e^{-5}, \quad && h''_{xy}(1, 2) = 4e^{-5}, \quad && h''_{yy}(1, 2) = 14e^{-5}.
\end{aligned}$$

Andra ordningens Taylorutveckling kring punkten $(1, 2)$ blir därför

$$\begin{aligned}
h(1 + h, 2 + k) &= e^{-5}\big(1 - h - 4k + \tfrac{1}{2}(-2h^2 + 2 \cdot 4hk + 14k^2)\big) + \text{R.T.}\\
&= e^{-5}(1 - h - 4k - h^2 + 4hk + 7k^2) + \text{R.T.}
\end{aligned}$$

och vi kan avläsa att andra ordningens Taylorpolynom är

$$e^{-5}(1 - h - 4k - h^2 + 4hk + 7k^2).$$

b) Med Taylorpolynomet i deluppgift a får vi approximationen

$$\begin{aligned}
h(1.1, 1.9) &= h(1 + 0.1, 2 - 0.1)\\
&\approx e^{-5}(1 - 0.1 + 0.4 - 0.01 - 0.04 + 0.07)\\
&= 1.32\, e^{-5}\\
&\approx 1.32 \cdot 6.74 \times 10^{-3}\\
&\approx 8.9 \times 10^{-3}.
\end{aligned}$$

Detta värde stämmer med det exakta värde till två värdesiffror.

□

Svar:
a) $e^{-5}(1 - h - 4k - h^2 + 4hk + 7k^2)$
b) $1.32\, e^{-5} \approx 8.9 \times 10^{-3}$

DEL C

7. Låt S vara cylinderytan $\{(x, y, z)\colon x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$ och låt $\boldsymbol{N}$ vara den yttre normalen. Visa att
$$\iint_S \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{N}\, dS = 0$$
om $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ är ett C^2 vektorfält där v_1 och v_2 är oberoende av z. **(4 p)**

Lösning. METOD 1 (Gauss sats)

Låt Ω vara cylindern $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$. Enligt Gauss sats är
$$\iint_{\partial\Omega} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{N}\, dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\operatorname{rot} \boldsymbol{v})\, dV = 0,$$
ty $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \boldsymbol{v}) = 0$.

Låt D_a vara cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = a$. Eftersom $\partial\Omega = S + D_0 + D_1$ räcker det att visa att
$$\iint_{D_0} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{N}\, dS + \iint_{D_1} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{N}\, dS = 0. \qquad (*)$$
Vi ser att
$$\begin{aligned}
\iint_{D_0} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{N}\, dS &= -\iint_{D_0} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) dS,\\
\iint_{D_1} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{N}\, dS &= \iint_{D_1} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) dS.
\end{aligned}$$
Eftersom v_1 och v_2 ej beror på z är de båda integralerna i de högra leden lika och $(*)$ följer.

METOD 2 (Stokes sats)

Enligt Stokes sats är
$$\iint_S \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{N}\, dS = \int_{\partial S} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r},$$
där randen ∂S till cylindern S består av de två cirklarna
$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \{x^2 + y^2 = 1, z = 0\},\\
\gamma_1 &= \{x^2 + y^2 = 1, z = 1\}
\end{aligned}$$
med motsatta orienteringar. Kurvintegralen över ∂S blir därför summan av följande två integraler
$$\int_{\gamma_0} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\gamma_0} v_1\, dx + v_2\, dy \quad \text{och} \quad \int_{\gamma_1} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\gamma_1} v_1\, dx + v_2\, dy$$
som har samma värde men motsatta tecken eftersom v_1 och v_2 är oberoende av z och kurvorna γ_0 och γ_1 har motsatt orientering. Alltså blir integralen i uppgiftstexten lika med 0. □

Svar: –

8. Arean av ellipsen som ges av $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ är πab. Använd Lagranges metod för att bestämma den ellips $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ som innehåller rektangeln $[-1, 1] \times [-2, 2]$ och har den minsta arean. **(4 p)**

   Lösning. Punkterna $(\pm 1, \pm 2)$ måste ligga på ellipsen, vilket betyder att $1/a^2 + 4/b^2 = 1$. Problemet kan därför formuleras som

$$\begin{aligned} &\min\ \pi ab, \\ &\text{där } 1/a^2 + 4/b^2 = 1. \end{aligned}$$

   Detta är ett optimeringsproblem med ett bivillkor som vi löser med Lagranges multiplikatormetod. Inför Lagrangefunktionen

$$L(a, b, \lambda) = \pi ab - \lambda(1/a^2 + 4/b^2 - 1).$$

   Minimum antas då i en punkt där

$$\frac{\partial L}{\partial a} = \pi b + 2\lambda/a^3 = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = \pi a + 8\lambda/b^3 = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -1/a^2 - 4/b^2 + 1 = 0. \tag{3}$$

   Från (1) och (2) får vi att $4\pi a^3 b = -8\lambda = \pi ab^3$, vilket ger att $4a^2 = b^2$. Alltså är $b = 2a$ (eftersom både a och b är positiva). Detta insatt i bivillkoret (3) ger $2/a^2 = 1$, dvs. $a = \sqrt{2}$. Minimal area är därmed $\pi \cdot \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 4\pi$.

   □

   Svar: 4π

9. a) Beräkna integralerna

$$\iint_{D_1} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^{1/7}} \quad \text{och} \quad \iint_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

där $D_1 = \{(x,y)\colon x^2+y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$ och $D_2 = \{(x,y)\colon x^2+y^2 \ge 1, x \ge 0, y \ge 0\}$. **(2 p)**

b) Bestäm om integralen

$$\iint_{D} \frac{e^{-(x^2+y^2)}}{(x^2+y^2)^{1/7}}\,dx\,dy,$$

där $D = \{(x,y)\colon x \ge 0, y \ge 0\}$, konvergerar eller divergerar. Motivera ditt svar. **(2 p)**

Lösning. a) Integralerna beräknar vi med polära koordinater,

$$\iint_{D_1} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^{1/7}} = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \frac{r\,dr}{r^{2/7}} = \frac{\pi}{2}\int_0^1 r^{5/7}\,dr = \frac{\pi}{2}\left[\frac{r^{12/7}}{12/7}\right]_0^1 = \frac{7\pi}{24},$$

$$\iint_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_1^{\infty} e^{-r^2} r\,dr = \frac{\pi}{2}\left[-\tfrac{1}{2}e^{-r^2}\right]_1^{\infty} = \frac{\pi}{4}\,e^{-1}.$$

b) Integralen är generaliserad eftersom både integrationsområdet D är obegränsat och integranden är obegränsad nära $(x,y) = (0,0)$. Därför skriver vi integralen som

$$\iint_{D} \frac{e^{-(x^2+y^2)}}{(x^2+y^2)^{1/7}}\,dx\,dy = \iint_{D_1} \frac{e^{-(x^2+y^2)}}{(x^2+y^2)^{1/7}}\,dx\,dy + \iint_{D_2} \frac{e^{-(x^2+y^2)}}{(x^2+y^2)^{1/7}}\,dx\,dy \qquad (*)$$

där integrationsområdet D_1 för den första integralen i högerledet innehåller integrandens singularitet medan den andra integralen har ett obegränsat integrationsområde D_2.

I området D_1 gäller att $e^{-x^2-y^2}$ antar sitt största värde i $(0,0)$, dvs. $e^{-x^2-y^2} \le e^{-0^2-0^2} = 1$ och vi har därför att

$$\frac{e^{-x^2-y^2}}{(x^2+y^2)^{1/7}} \le \frac{1}{(x^2+y^2)^{1/7}}.$$

Eftersom integralen

$$\iint_{D_1} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^{1/7}}$$

är konvergent enligt deluppgift a så ger jämförelsekriteriet att integralen

$$\iint_{D_1} \frac{e^{-(x^2+y^2)}}{(x^2+y^2)^{1/7}}\,dx\,dy$$

är konvergent.

På området D_2 antar $1/(x^2+y^2)^{1/7}$ sitt största värde på kvartscirkeln där $x^2+y^2=1$, dvs. $1/(x^2+y^2)^{1/7} \leq 1/1^{1/7} = 1$. Vi har därmed att

$$\frac{e^{-x^2-y^2}}{(x^2+y^2)^{1/7}} \leq e^{-x^2-y^2}$$

och eftersom integralen

$$\iint_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

är konvergent enligt deluppgift a visar jämförelsekriteriet att integralen

$$\iint_{D_2} \frac{e^{-(x^2+y^2)}}{(x^2+y^2)^{1/7}}\,dx\,dy$$

också är konvergent.

Vi har nu visat att båda integralerna i högerledet av $(*)$ är konvergenta och detta visar att även

$$\iint_{D} \frac{e^{-(x^2+y^2)}}{(x^2+y^2)^{1/7}}\,dx\,dy$$

är konvergent.

$\square$

Svar:

a) $7\pi/24$ respektive $(\pi/4)e^{-1}$

b) konvergent
