TENTAMEN SF1661 10/1 2013

SVAR och LÖSNINGSFÖRSLAG

(1.)

$m = (2013)_5 = 2\cdot 5^3 + 0\cdot 5^2 + 1\cdot 5^1 + 3\cdot 5^0$

$= 2\cdot 125 + 5 + 3 = 258 = (258)_{10}$

För att uttrycka $n = (2013)_{10}$ i bas 5 bestämmer vi först positionernes värde i bas 5.

$5^0 = 1$, $5^1 = 5$, $5^2 = 25$, $5^3 = 125$, $5^4 = 625$.

Eftersom $5^5 = 5\cdot 625 > 2013 > 5^4$ behöver vi 5 positioner med 5^4 som största platsvärde.
Vi har att

$2013 = 3\cdot 625 + 138 = 3\cdot 625 + 1\cdot 125 + 13$

$= 3\cdot 5^4 + 1\cdot 5^3 + 0\cdot 5^2 + 2\cdot 5^1 + 3\cdot 5^0$

$= (31023)_5$

(Där inget annat anges är talen uttryckta i bas 10)

SVAR: $m = (258)_{10}$

$n = (31023)_5$

(2)

$\binom{101}{99} = \frac{101!}{99!\,2!} = \frac{101\cdot 100}{2} = 101\cdot 50 = 5050$

$\binom{101}{100} = \frac{101!}{100!\,1!} = 101$

$\binom{102}{100} = \binom{101}{99} + \binom{101}{100} = 5050 + 101 = 5151$

tg $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ för alla $n, k \in \mathbb{Z}_+$

(Jfr också med följande del av Pascals triangel

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \binom{101}{99} & & \binom{101}{100} & & \binom{101}{101} & \\ \cdots & & \binom{102}{100} & & \binom{102}{101} & & \binom{102}{102} \end{array}$$

)

Alltså är

$\binom{101}{99} + \binom{101}{100} + \binom{102}{100} = 2\cdot 5151 = 10302$

SVAR: 10 302

(3.) $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 7 = \left\{ \text{"KaG komplettering"} \right\}$

$= (x-2)^3 + 1$

där vi utnyttjar att $(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.

Så den givna ekvationen är ekvivalent med ekvationen

$$(y-1) = (x-2)^3.$$

Inför nya variabler $t = x - 2$, $s = y - 1$.

Ekvationen skrivs då

$$s = t^3$$

SVAR: $a = 1$, $b = 0$, $t = x - 2$ och $s = y - 1$

(4) a) $|x-3| = |x + (-3)| \underset{\text{olikheten}}{\overset{\text{triangel}}{\leq}} |x| + |-3|$

$= |x| + 3$, för alla x.

Alltså saknar $|x-3| > |x| + 3$ lösningar

b) $2 < |x-3| < 4$ uppfylls precis om avståndet mellan x och 3 är strikt större än 2 och strikt mindre än 4.

SVAR: a) Lösning saknas b) $-1 < x < 1$ eller $5 < x < 7$

(5.) $\sin 2x = \cos x$

$\iff 2\sin x \cos x = \cos x$

$\iff \cos x = 0$ eller $\sin x = \frac{1}{2}$

$\iff x = \frac{\pi}{2} + n\cdot\pi$ eller $x = \begin{cases} \pi/6 + n\cdot 2\pi \\ 5\pi/6 + n\cdot 2\pi \end{cases}$

SVAR: $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $x = \frac{\pi}{6} + n\cdot 2\pi$ eller $x = \frac{5\pi}{6} + n\cdot 2\pi$, där n är ett godtyckligt heltal.

(6.) a) $\ln x \cdot \ln y = \ln(x+y)$ $\forall\ x, y > 0$ är ett FALSKT påstående.

T.ex gäller att $x = y = e$ ger

$V.L. = \ln e \cdot \ln e = 1 \cdot 1 = 1$ och

$H.L. = \ln(e+e) = \ln 2e > 1$.

b) $\ln x + \ln y = \ln(x \cdot y)$, $\forall\ x, y > 0$ är ett SANT påstående.

Bevis: Eftersom exponentialfunktionen e^t är inverterbar, räcker det att visa att $e^{V.L.} = e^{H.L.}$

$e^{V.L.} = e^{\ln x + \ln y} = e^{\ln x} \cdot e^{\ln y} = x \cdot y$

$e^{H.L.} = e^{\ln(x\cdot y)} = x \cdot y$. V.S.B

7. Vi vill lösa ekvationen $(z+1)^4 = -4$.
Inför ny variabel $w = z+1$, vi får då ekvationen $w^4 = -4$.

Ansätt $w = r(\cos v + i\sin v)$
då är $w^4 = r^4(\cos 4v + i\sin 4v)$
enligt de Moivres formel.

Vi skriver också -4 på polär form,
$-4 = 4(-1 + 0i) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$.

Alltså gäller att

$$w^4 = -4$$

$$\Leftrightarrow \quad r^4(\cos 4v + i\sin 4v) = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} r^4 = 4 \\ 4v = \pi + n\cdot 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ v = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Detta ger fyra distinkta rötter w, svarande mot $n = 0, 1, 2, 3$, som i sin tur ger fyra rötter $z = w - 1$ $(z+1)^4 = -4$

$$w_0 = \sqrt{2}\left(\cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4}\right) = 1 + i \quad \mapsto \quad z_0 = i$$

$$w_1 = \sqrt{2}\left(\cos\tfrac{3\pi}{4} + i\sin\tfrac{3\pi}{4}\right) = -1 + i \quad \mapsto \quad z_1 = -2 + i$$

$$w_2 = \sqrt{2}\left(\cos\tfrac{5\pi}{4} + i\sin\tfrac{5\pi}{4}\right) = -1 - i \quad \mapsto \quad z_2 = -2 - i$$

$$w_3 = \sqrt{2}\left(\cos\tfrac{7\pi}{4} + i\sin\tfrac{7\pi}{4}\right) = 1 - i \quad \mapsto \quad z_3 = -i$$

<u>SVAR:</u> $z_0 = i$, $z_1 = -2 + i$, $z_2 = -2 - i$, $z_3 = -i$

8.

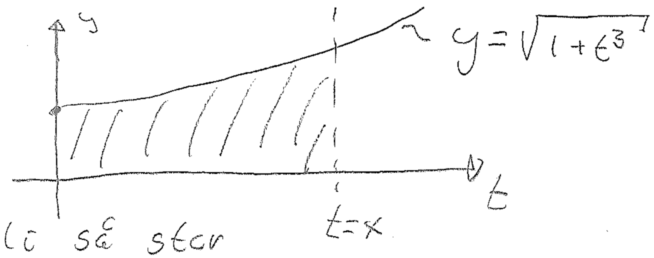
a) För att visa att f är inverterbar räcker det att visa att f är strängt växande, som följer av att $f'(x) > 0$ för alla $x \geq 0$.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x \sqrt{1+t^3}\, dt \underset{\text{Enligt huvudsatsen}}{=} \sqrt{1+x^3} > 0 \quad \text{för } x \geq 0.$$

b) Det är klart att

$$f(0) = \int_0^0 \sqrt{1+t^3}\, dt = 0.$$

$f(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^3}\, dt$ kan tolkas som arean av det område i ty-planet som begränsas av t-axeln, kurvan $y = \sqrt{1+t^3}$, linjen $t=0$ (dvs y-axeln) och linjen $t=x$.



Eftersom $\sqrt{1+t^3} \geq 1 \quad \forall t$ är det klart att denna area kan bli så stor vi önskar genom att välja x tillräckligt stort.

8 b) (forts.)

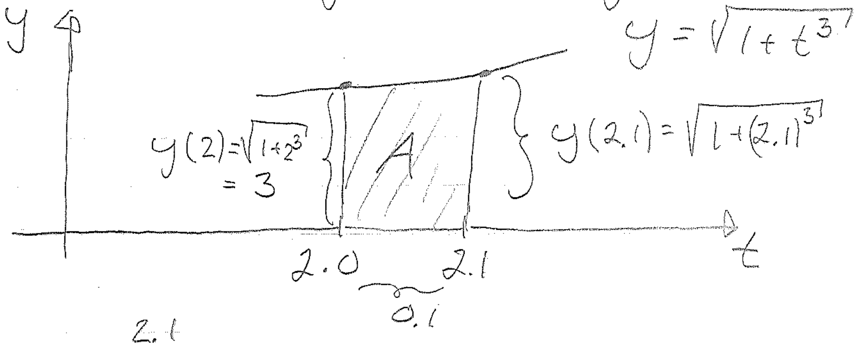
Intuitivt är det också klart $f(x)$ (arean) varierar kontinuerligt med x.

Alltså kan $f(x)$ anta alla värden ≥ 0,

SVAR: $V_f = [0, \infty)$

8 c)

Betrakta följande figur



$$A = \int_{2.0}^{2.1} \sqrt{1+t^3}\, dt$$

Av figuren framgår att

$$0.3 = 3 \cdot 0.1 < A < \sqrt{1+(2.1)^3} \cdot (0.1) = \tfrac{1}{10} \cdot \sqrt{10.261} < 0.33$$

Vi kan t.ex välja approximationen

SVAR: $\int_{2.0}^{2.1} \sqrt{1+t^3}\, dt \approx 0.3$

9.

a) För heltal p, n, m, $p \neq 0$, $n \neq 0$ gäller att $\frac{m}{n} = \frac{p \cdot m}{p \cdot n}$.

Om vi vill behålla mots egenskap för rationella tal skulle vi få

$$\frac{\frac{p}{q}}{\frac{r}{s}} = \frac{\frac{s}{r} \cdot \frac{p}{q}}{\frac{\cancel{s}}{\cancel{r}} \cdot \frac{\cancel{r}}{\cancel{s}}} = \frac{\frac{s}{r} \cdot \frac{p}{q}}{1} = \frac{s}{r} \cdot \frac{p}{q} = \frac{sp}{rq}$$

b) Påstående: Kvoten mellan ett rationellt tal $\frac{p}{q}$ och ett irrationellt tal t, är alltid ett irrationellt tal.

Bevis: Antag motsatsen, dvs antag att $\frac{\frac{p}{q}}{t} = \frac{m}{n}$ för något rationellt tal $\frac{m}{n}$.

Då följer att $\frac{p}{q} = t \cdot \frac{m}{n} \Leftrightarrow t = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{m}{n}} = \frac{pn}{qm}$,

$\Rightarrow$ t är rationellt, vilket är en motsägelse.

Alltså är kvoten $\frac{p}{q}/t$ irrationell.

V.S.B