REGLERTEKNIK, KTH

REGLERTEKNIK AK EL1000, EL1110 och EL1120

Tentamen 2013–01–10, kl 8:00 – 13:00

Hjälpmedel: Kursboken i Reglerteknik AK
(Glad, Ljung: Reglerteknik eller motsvarande),
räknetabeller, formelsamlingar och räknedosa.
Observera att övningsmaterial (övningsuppgifter, ex-tentor och lösningar) INTE är tillåtna hjälpmedel.

Observandum: Behandla inte mer än en uppgift per blad.
Varje steg i lösningen skall motiveras.
Bristfällig motivering kan ge poängavdrag.
Skriv svar (med enhet i förekommande fall).
Skriv namn och personnummer på varje inlämnat ark.
Skriv endast på en sida per ark.
Fyll i antalet inlämnade ark på omslaget.

Tentamen består av fem uppgifter, som vardera bedöms med 10 poäng. Poängsättningen för deluppgifter har markerats.

Betygsgränser: betyg Fx: ≥ 21
betyg E: ≥ 23
betyg D: ≥ 28
betyg C: ≥ 33
betyg B: ≥ 38
betyg A: ≥ 43

Ansvarig: Bo Wahlberg 08 790 7242

Resultat: Finns på Studerande-expeditionen (STEX) senast 2013-01-31.

Utlämning: Tentamen kan hämtas ut vid Studerande-expeditionen (STEX), plan 3, Osquldas väg 10.

Lycka till!

---

1. (a) Ange överföringsfunktionen för en tillståndsmodell med

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2p)

(b) Är en tillståndsmodell med

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}$$

styrbar? (2p)

(c) Systemet

$$G(s) = \frac{(1+s)}{s(1-s)}$$

återkopplas med en P-regulator, $F(s) = K$. Ange för vilka värden på K ($K > 0$) som motsvarande återkopplade system är stabilt. (2p)

(d) Studera den skalära ($n = 1$) stabila tillståndsmodellen

$$\dot{x}(t) = ax(t) + u(t), \quad x(0) = x_0, \ a < 0$$

Antag insignalen $u(t) = e^{at}$. Bestäm $x(t)$, $t \geq 0$. (2p)

(e) En tidskontinuerlig PI-regulator som approximeras med Tustins formel ges av differensekvationen

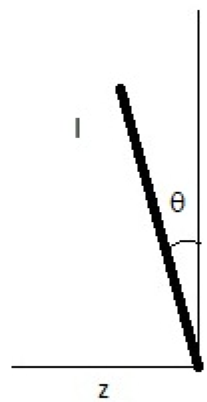
$$u(t) = u(t-0.2) + 10.1e(t) - 9.9e(t-0.2)$$

Ange den motsvarande tidskontinuerliga PI-regulatorn. (2p)

2. En inverterad pendel kan beskrivas av differentialekvationen

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2}\cos[\theta(t)] = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} l - g\sin[\theta(t)] \tag{1}$$

där $z(t)$ är position för pendels pivotpunkt, $\theta(t)$ är dess vinkel enligt Figur 1 nedan, l är dess längd och g är tyngdkraften.



Figur 1: Inverterad pendel

(a) Låt insignal och utsignal vara

$$u(t) = \frac{d^2 z(t)}{dt^2}, \quad y(t) = \theta(t)$$

och ta fram motsvarande linjära model runt $\theta = 0$.
Ange överföringsfunktionen från $u(t)$ till $y(t)$. (3p)

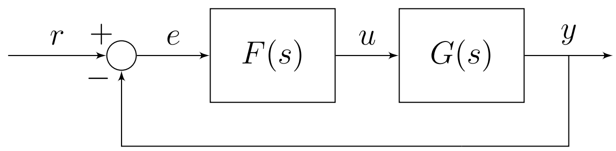
(b) Studera den linjäriserade modellen från Uppgift a) med $l = 1$ m och $g = 10$ m/s^2, och antag att en PD-regulator

$$u(t) = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt}, \quad e(t) = -\theta(t)$$

används för att stabilisera pendeln. Bestäm K_p och K_d så att polerna för motsvarande återkopplade system hamnar i $-1, -1$. (2p)

(c) Använd regulatorinställningen framräknad i Uppgift b), men antag att pendelns längd är okänd, $0 < l < \infty$. Rita rotort för det återkopplade systemets poler som funktion av l och avgör för vilka värden på l som det återkopplade systemet är stabilt. (5p)

3. Ett återkopplat system kan beskrivas med hjälp av blockdiagrammet i Figur 2.



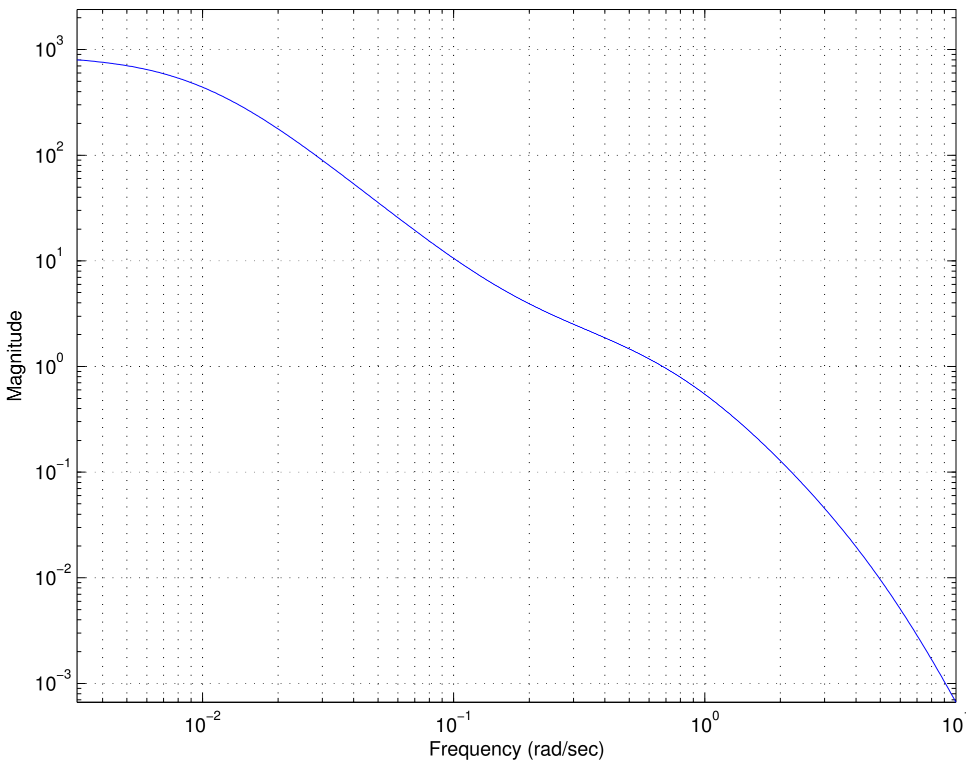
Figur 2: Blockdiagram för det återkopplade systemet.

Frekvenssvaret för $G(s)$ är givet av bodediagrammet i Figur 3 på nästa sida.

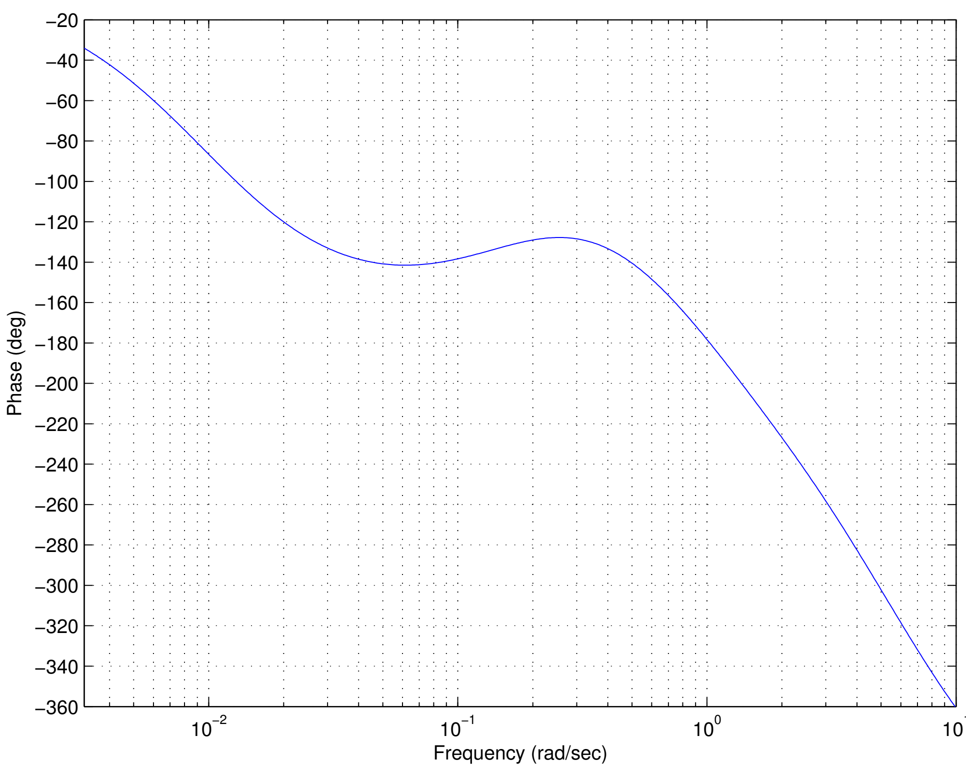
Uppgiften är att konstruera en lead/lag regulator så att det återkopplade systemet uppfyller följande specifikationer:

- Fem gånger snabbare och samma översläng som med en P-regulator med förstärkning $F(s) = 0.25$.
- Stationära felet när referensignalen är en *enhetsramp*, $r(t) = t,\ t \geq 0$, skall vara mindre än 0.05.

Bestäm en regulator $F(s)$ så att dessa krav uppfylls. (10p)



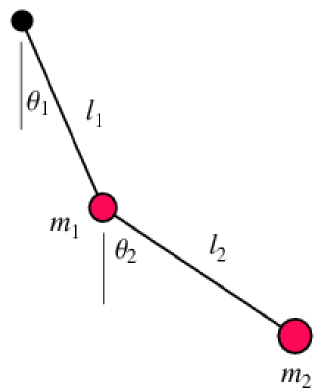
(a) Amplitudkurva



(b) Faskurva

Figur 3: Bodediagram för $G(s)$ i Uppgift 3.

4. Betrakta en dubbelpendel enligt Figur 4.



Figur 4: Dubbelpendel

Styrsignalen är vinkelaccelerationen

$$u(t) = \ddot{\theta}_1(t)$$

och vi antar att $m_1 = m_2 = l_1 = l_2 = 1$. Inför tillståndsvektorn

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \dot{\theta}_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \end{bmatrix}$$

Motsvarande linjära model runt jämviktspunkten

$$x_0 = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \\ \pi \\ 0 \end{bmatrix},$$

ges då av

$$\frac{d}{dt}\Delta x(t) = A\Delta x(t) + B\Delta u(t)$$

där

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(a) Antag att vi endast kan mäta vinkeln θ_1, dvs $y(t) = (\theta_1(t) - \pi)$. Motsvarande linjära system är dock inte observerbart. Bestäm det icke-observerbara underrummet och ge en fysikalisk tolkning. (2p)

(b) Antag att vi endast kan mäta vinkeln θ_2, dvs $y(t) = (\theta_2(t) - \pi)$. Motsvarande linjära system är dock inte observerbart. Bestäm det icke-observerbara underrummet och ge en fysikalisk tolkning. (2p)

(c) Antag att vi kan mäta både vinkeln θ_1 och θ_2, dvs vi har två mätsignaler

$$\begin{aligned} y_1(t) &= (\theta_1(t) - \pi) = C_1 \Delta x(t) \\ y_2(t) &= (\theta_2(t) - \pi) = C_2 \Delta x(t) \end{aligned}$$

Är det möjligt att konstruera en observatör

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K_1(y_1(t) - C_1\hat{x}(t)) + K_2(y_2(t) - C_2\hat{x}(t))$$

så att $\hat{x}(t)$ konvergerar mot $\Delta x(t)$ godtyckligt snabbt?

Ledning: Pröva med att ansätta

$$K_1 = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_{23} \\ k_{24} \end{bmatrix}$$

(6p)

5. Bodes integral (Resultat 6.1 på sidan 124 i kursboken) för reglering av ett system med minst relativt gradtal 2 och med en instabil pol i $s = p > 0$ ges av

$$\int_0^\infty \log |S(i\omega)| d\omega = \pi p$$

där $S(s)$ är känslighetsfunktionen.

Låt oss göra följande approximation av känslighetsfunktionen

$$|S(i\omega)| = \begin{cases} M_s \frac{\omega}{\omega_1}, & 0 \le \omega \le \omega_1 \\ M_s, & \omega_1 \le \omega \le \omega_2 \\ 1, & \omega_2 < \omega \end{cases}$$

(a) Räkna ut Bodes integral och härled följande relation för ovanstående approximation av känslighetsfunktionen:

$$M_s = e^{(\pi p + \omega_1)/\omega_2}$$

(7p)

(b) Antag att $p = 6$, $\omega_1 = 3$ rad/s och $\omega_2 = 40$ rad/s (taget från stridsflygplanet X-29). Uppskatta hur mycket störningar (som vind) med frekvens mellan ω_1 och ω_2 förstärks. (3p)