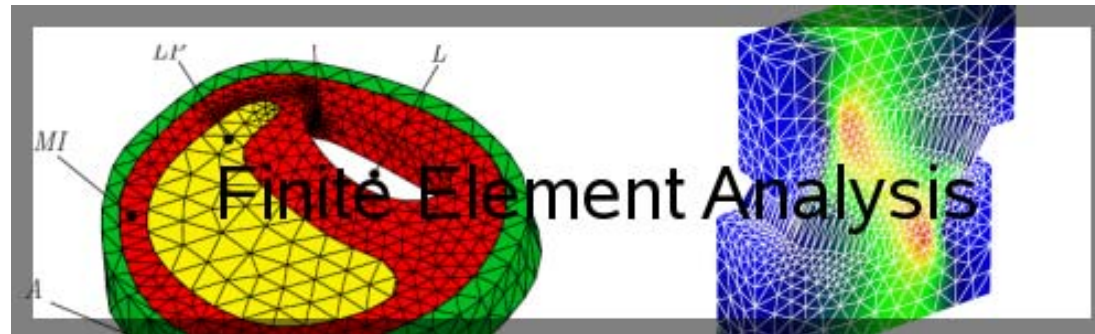


FEM FÖR INGENJÖRSTILLÄMPNINGAR

OH-MATERIAL



Jonas Faleskog, KTH Hållfasthetslära

Januari 2013

SE1025, FEM för ingenjörstillämpningar (6 hp)

— *fortsättningskurs i hållfasthetslära* —

Mål: att lära sig grunderna för *Finita ElementMetoden (FEM)* och att *kunna använda FEM* som ett analysverktyg i ingenjörstillämpningar.

Kursupplägg

17 Föreläsningar (teori, problemlösn. & fallstudier)

Jonas Faleskog (kursansvarig/examinator)

8 Övningar (problemlösning i 3 parallella grupper)

Rickard Shen Rami Mansour Michal Sedlak

2 Obligatoriska datorlaborationer (3+1 tillfällen/lab)

Hui Huang Andrii Grytsan

— problemlösning m.h.a. finita elementprogrammet
ANSYS (studentversion kan erhållas från KTHB)

— hålls i datorsalen Glader, M-byggnaden

— utförs i grupper om 2 till 3 teknologer

3 Hemuppgifter (HEM1, 1.5 hp)

— utförs i grupper om 2 till 3 teknologer

— ger bonuspoäng vid den skriftliga tentamen

— godkänd tentamen ger med automatik G på HEM1

Literatur

- *Grundläggande hållfasthetslära* (2005) av H. Lundh
- *The finite element method—A practical course* (2003)
av G.R. Liu & S.S. Quek (tillgänglig som E-bok via KTHB:s
hemsida, kan köpas via nätet för ca: 662 SEK)
- *Exempelsamling i FEM för ingenjörstillämpn.* (Jan., 2010)
av Jonas Faleskog

=> Ett kurspaket innehållande:

1. *Exempel i FEM för ingenjörstillämpningar*
2. *OH-material till föreläsningarna* (även på kurshemsidan)

kan köpas på hållfasthetsläras expedition, Osquars backe 1
(plan 2), pris: 100 kr. (Må-Fr: 12:30-15:00)

Kurshemsida:

<https://www.kth.se/social/course/SE1025/>

Hemuppgifter

Instruktioner till datorlaborationerna

OH-material till föreläsningarna

Matlabprogram: fjäder/stång strukturer
endimensionella balkstrukturer
Ramverk av balk/stångelement

Gamla tentamina

Finita ElementMetoden (FEM)

- Många fysikaliska fenomen i ingenjör/vetenskapliga sammanhang kan modelleras mha **partiella differentialekvationer (PDE)**. Dessa är i allmänhet omöjliga att lösa mha klassiska analytiska metoder

Stationär värmeledning i 2D (skalärt fältproblem: T)

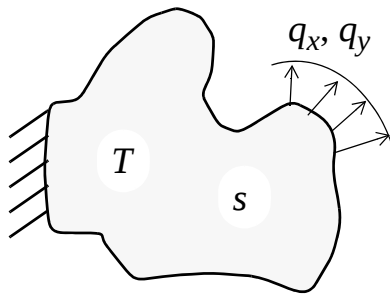


Diagram showing a 2D domain with boundary conditions and heat flux vectors q_x, q_y . The domain is labeled with T and s .

PDE: $\nabla^T (\mathbf{D} \nabla T) + s = 0$

Primär variabel: Temperatur

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix}$$

Linjär elasticitet i 2D (vektor fältproblem: u_x & u_y)

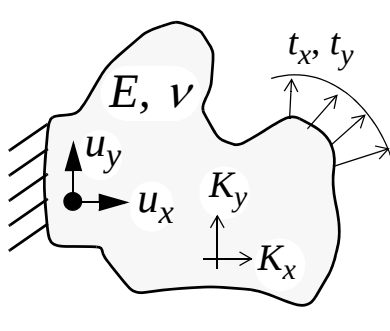


Diagram showing a 2D domain with boundary conditions and displacement vectors u_x, u_y . The domain is labeled with E, ν and K_x, K_y .

PDE: $\nabla_S^T (\mathbf{D} \nabla_S \mathbf{u}) + \mathbf{b} = \mathbf{0}$

Primära variabler: förskjutningar

$$\nabla_S = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \end{bmatrix}$$

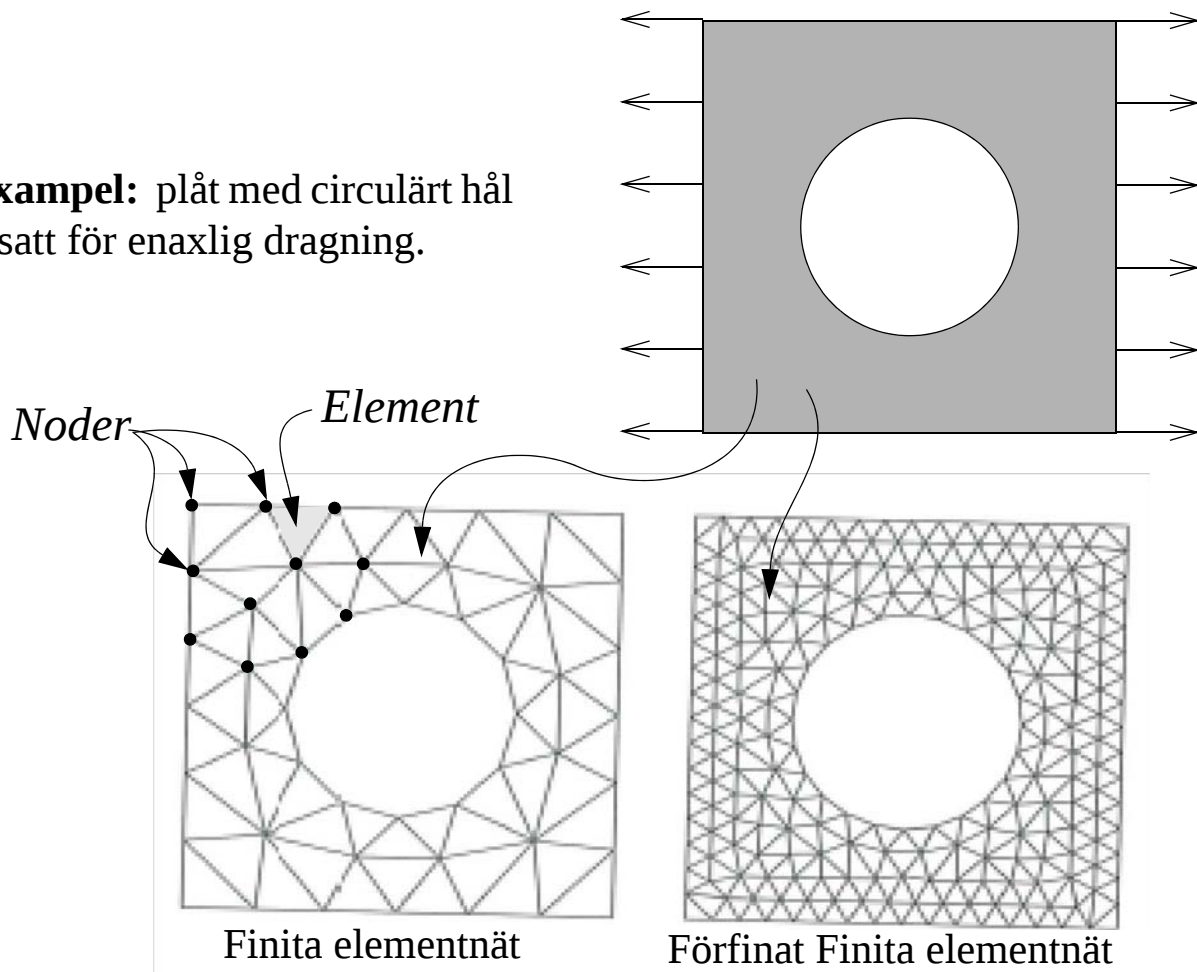
Andra exempel: Diffusion, Strömning, Electromagnetism, etc.

- FEM är en numerisk metod för att approximativt lösa en PDE**, som resulterar i ett linjärt (olinjärt) ekvationssystem med diskreta värden av primära variabler som obekanta, vilket löses numeriskt mha en dator.

FEM—grundläggande idé!

- Soliden/strukturen delas in i sk. **finita element** (diskretisering), kopplade till **noder**. Därefter tas en **approximativ lösning fram för varje element** (ofta baserad på linjära/kvadratiska funktioner).
- Den “diskretiserade soliden/strukturen” bildar ett sk. **finita element-nät (mesh)** och processen att göra nätet kallas **nätgenerering**.

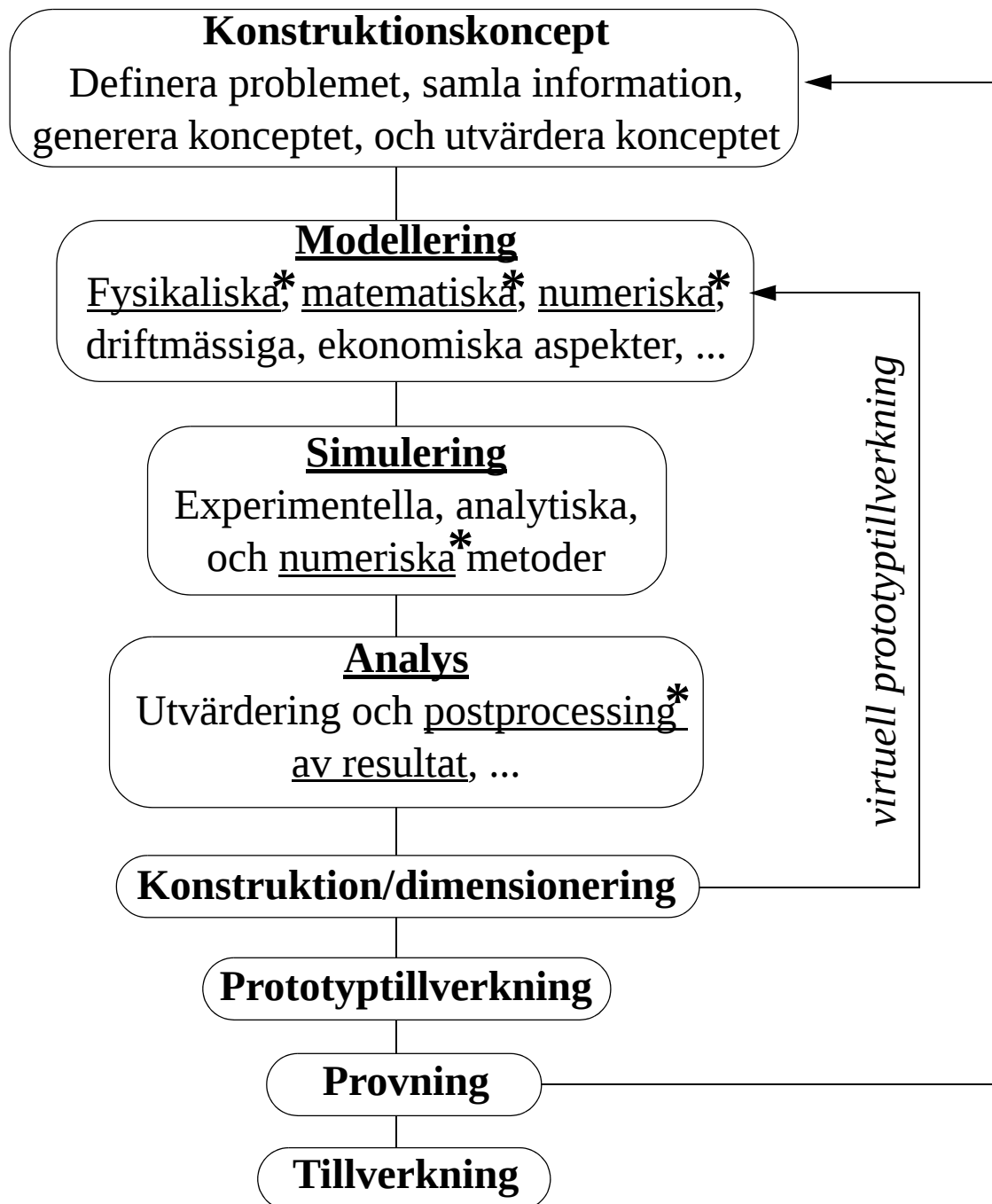
Exempel: plåt med cirkulärt hål utsatt för enaxlig dragning.



- Den approximativa lösningen i varje element uttrycks mha **den/de primära variabelns/variablernas nodvärden**, som erhålls genom lösning av ekvationssystemet. **Noggrannheten beror av elementens storlek och valet av approximationsfunktioner.**
- Ekvationssystemet (FEM-Ekv.) kan formuleras genom att **PDE:n (stark form)** skrivs om på en **integralform (svag form)**.
- För linjärelastiska problem ger **Virtuella arbetets princip** direkt den svaga formen!

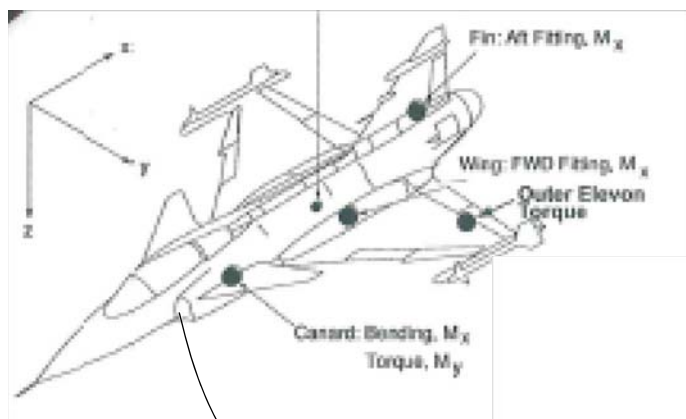
FEM i praktiken

- Används rutinmässigt i industrin för att analysera strukturer, mekaniska, termiska, elektriska och kemiska system osv. med avseende på dimensionering (konstruktion) och prestanda.
- FEM i konstruktionsprocessen för ingenjörssystem:

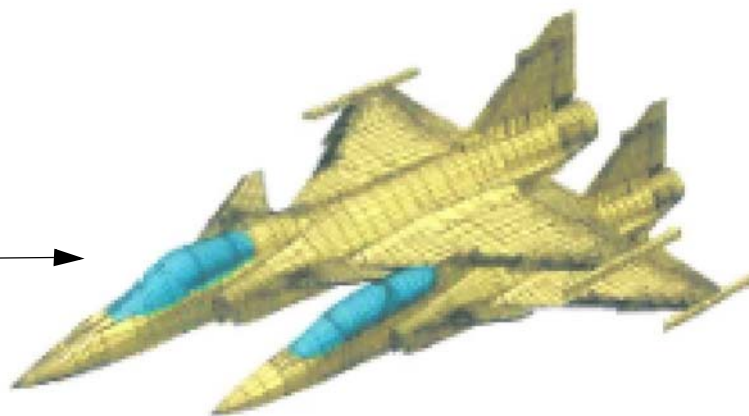


* Välj ett FEM-program, där FEM-Ekv. för det fysikaliska fenomen som skall modelleras finns implementerad. Exempel på kommersiella program: ANSYS, ABAQUS, NASTRAN, ...

Ex.: Stora system analyserade med FEM

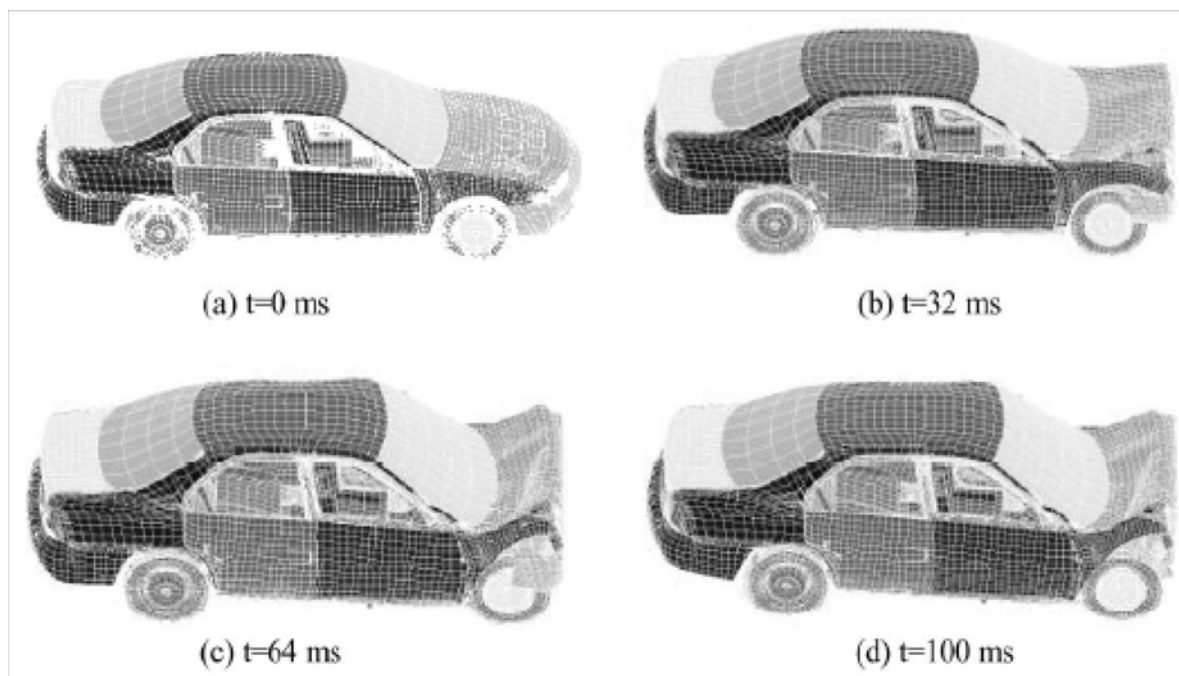


Jas Gripen
militärt flygplan (SAAB)



Av: H. Ansell (1998), *Mekanisten* 1998:3

Krocksimuleringar av en personbil



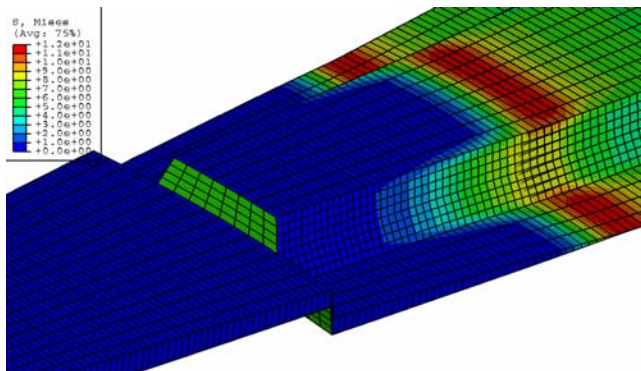
Av: Z.Q. Cheng (2001), *Finite Elem. Anal. Design* 37.

mer exempel — i vetenskap ...

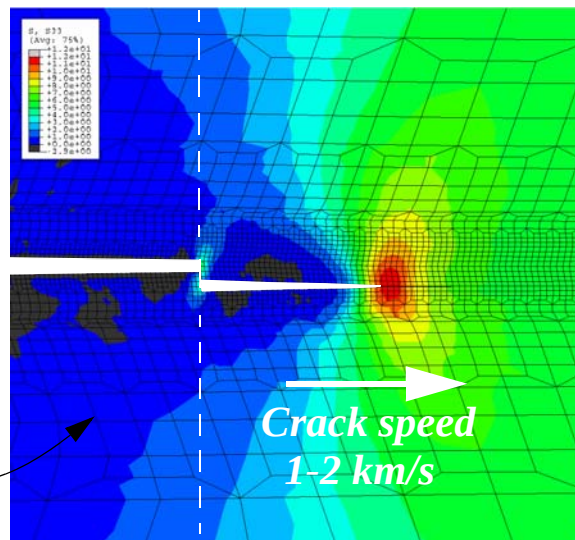
Mikromekanisk 3D FEM analys på mikroskala

— I syfte att utveckla brottmekaniska modeller för stål

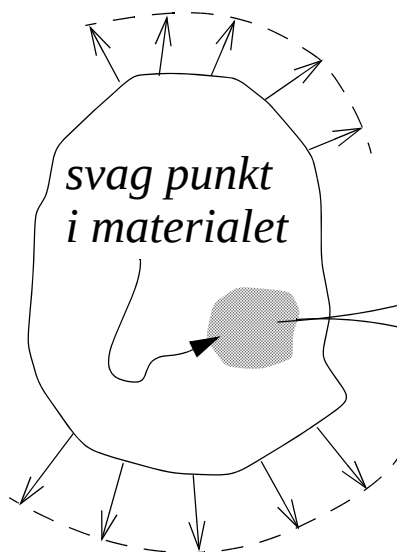
(I. Barsoum, J. Faleskog and M. Stec, KTH Solid Mechanics, 2008)



Deformerat nät av sk. klyvplan



Deformerat nät som visar isokonturer av effektivspänning

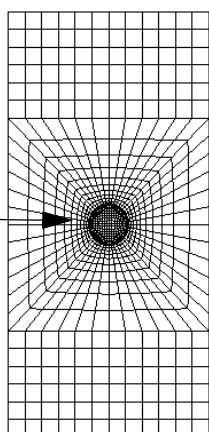


I. Klyvbrott: visar en microspricka som växer över en korngräns

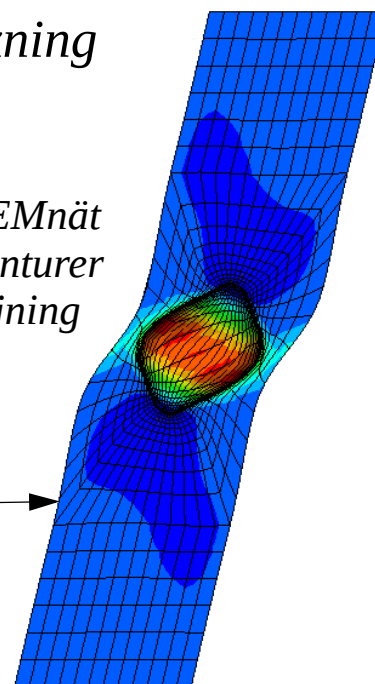
II. Duktilt brott genom tillväxt och sammanväxning av mikrohål

Odeformerat FEMnät

sfäriskt hål



Deformerat FEMnät visande isokonturer av plastisk töjning



FEM—historiskt perspektiv

1943

Tidig variant av metoden formulerades av matematikern Richard Courant, men uppmärksammades aldrig av ingenjörer.

1950-talet

Metoden utvecklas och används praktiskt i datorberäkningar i mitten av 50-talet av flygingenjörer:

M.J. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin, L.J. Topp
(Boing and Bell Aerospace), USA,

och

av J.H. Argyris, S. Kelsey (Rolls Royce), UK.

1960-talet och senare:

Teoretisk grund för FEM tas fram och matematiker börjar studera olika aspekter av FEM, konvergens, noggrannhet, etc.

Utveckling av mjukvara för FEM påbörjas:

E. Wilson (freeware), D. MacNeal at NASA (generellt program känt som NASTRAN), J. Swanson vid Westinghouse (utvecklare av ANSYS), J. Hallquist vid Livermore Nat. Lab. (LS-DYNA), ABAQUS utvecklas av HKS (1978), och många många fler ...

Utveckling & forskning idag:

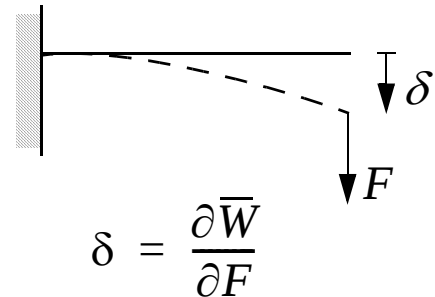
Olika aspekter av olinjära problem, avancerade materialmodeller, modellering av brott, modellering av topologi (automatisk nätgenerering), multi-fysik (koppling av olika fysikaliska fenomen, t.ex. växelverkan strömning/struktur), osv ...

Men, den stora spridningen bland ingenjörer och vetenskapsmän hade aldrig varit möjlig utan den *exponentiella ökningen av datorkraft* och den *ännu större minskningen av kostnaden för datorkraft!*

Kursens innehåll

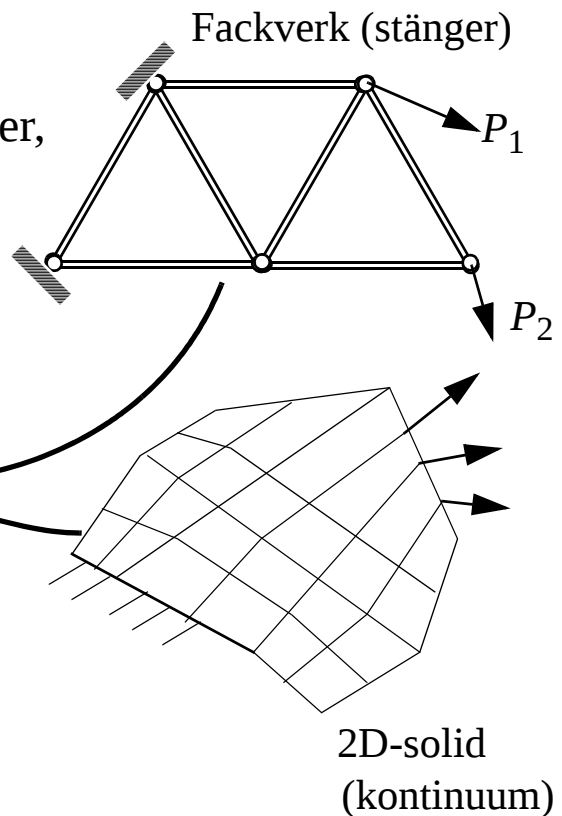
1. Energimetoder (~ 3 Fö., 1 Övn. & HU1)

- Grundläggande koncept
- Analys av statiskt obestämda problem
- Formulering för analys med numeriska metoder



2. Finita ElementMetoden FEM (~ 14 Fö., 7 Övn., 2 lab. & HU2, HU3)

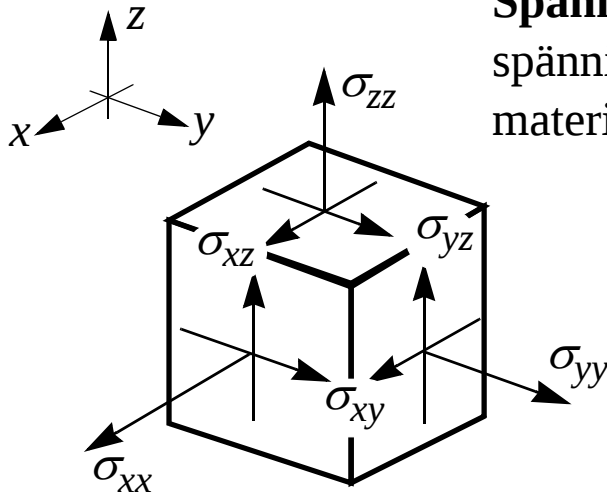
- Formulering av FEM-ekvationer för hållf- och termiska problem
- Approximativa ansatser för stänger, balkar, 2D- och 3D solider
- Matrisformulering—lämplig för datoranalys
- Problemlösning med industriell FEM-programvara



Linjära ekvationssystem

$$\begin{bmatrix} k_{11} & \dots & k_{1n} \\ k_{n1} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{P}$$

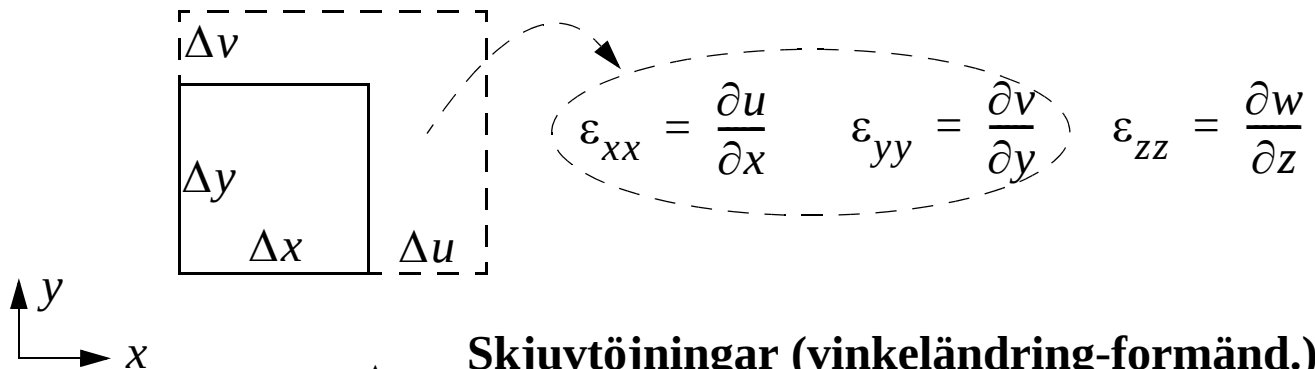
Elastiskt lagrad energi—Fleraxliga tillstånd



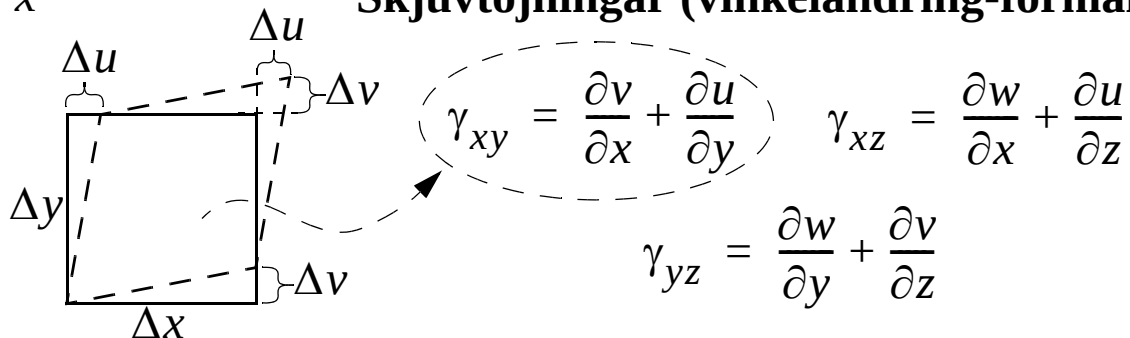
Spänningsmatrisen anger spänningstillståndet i en materiell punkt

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Normaltöjningar (volymändring):



Skjuvtöjningar (vinkeländring-formänd.):



Elastisk töjningsenergi / volymsenhet:

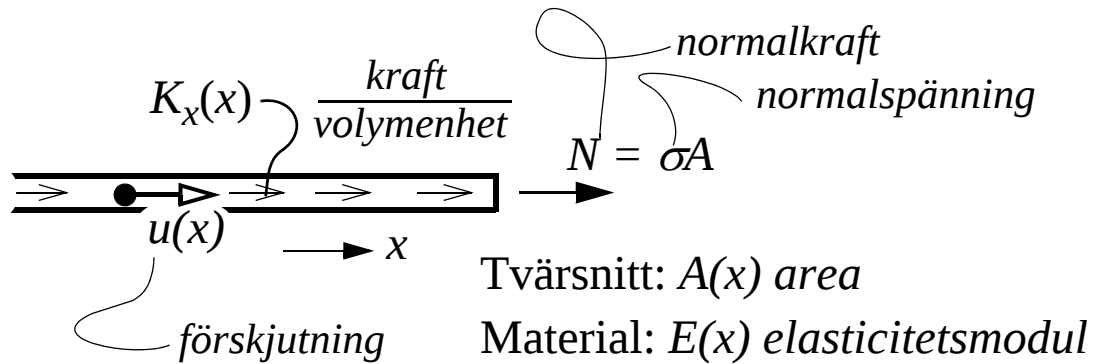
$$W' = \int (\sigma_{xx} d\epsilon_{xx} + \sigma_{yy} d\epsilon_{yy} + \sigma_{zz} d\epsilon_{zz} + \sigma_{xy} d\gamma_{xy} + \sigma_{xz} d\gamma_{xz} + \sigma_{yz} d\gamma_{yz})$$

För ett linjärt elastiskt material gäller att:

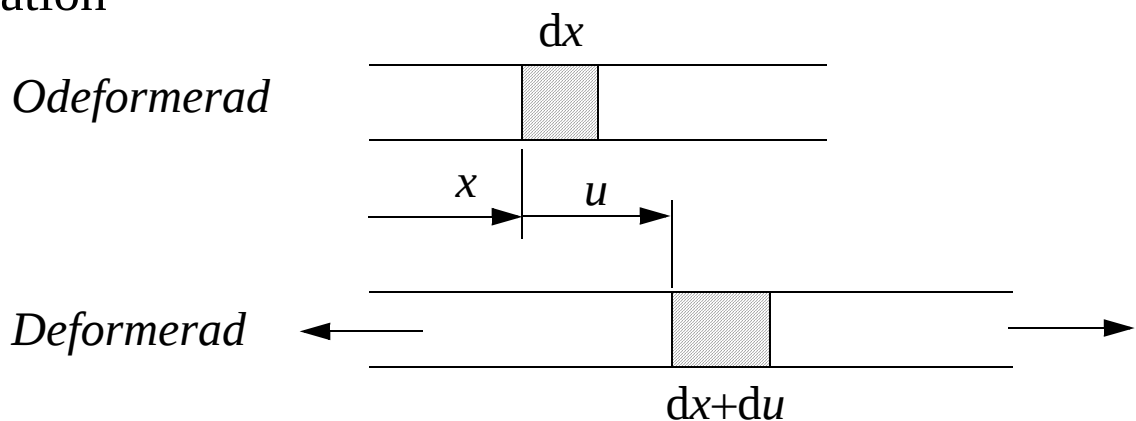
$$W' = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} \epsilon_{xx} + \sigma_{yy} \epsilon_{yy} + \sigma_{zz} \epsilon_{zz} + \sigma_{xy} \gamma_{xy} + \sigma_{xz} \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \gamma_{yz}) = \bar{W}'$$

Deformation av en Stång

Laster & snittstorheter



Deformation



Töjning: (Kompatibilitet)
$$\varepsilon = \frac{(dx + du) - dx}{dx} = \frac{du}{dx} = u' \quad (1)$$

Konstitutiv Ekv.: (Hookes lag)
$$N = \sigma A = \left\{ \begin{array}{l} \text{Hooke} \\ \sigma = E\varepsilon \end{array} \right\} = EA\varepsilon = EAu' \quad (2)$$

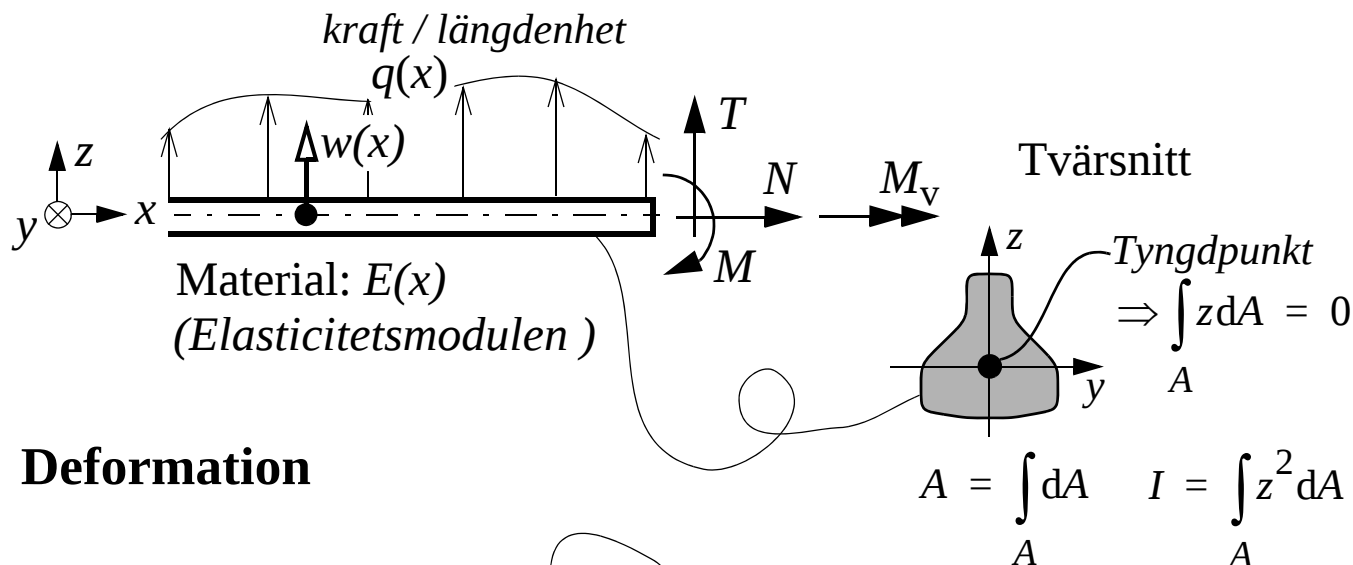
Jämvikt:
$$\frac{dN}{dx} + AK_x = 0 \quad (3)$$

Ekv. (2) & (3) ger stångekvationen:
$$\frac{d}{dx} EA \frac{du}{dx} + AK_x = 0$$

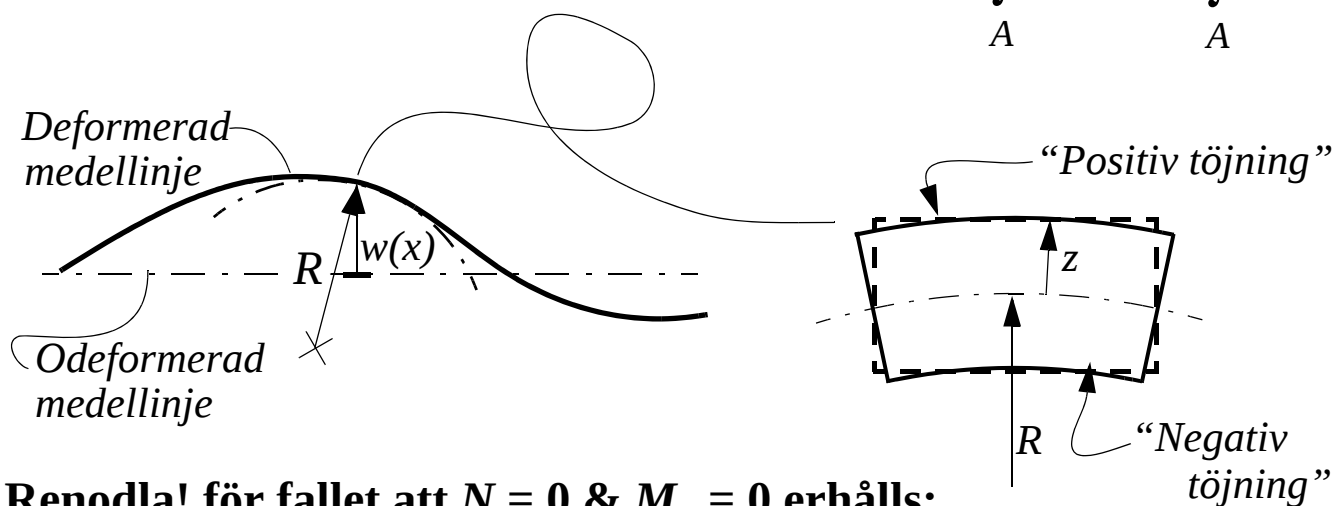
=> lösningen till diff. ekv. ger $u(x)$

Deformation av en Balk

Laster & snittstorheter



Deformation



Renodla! för fallet att $N = 0$ & $M_v = 0$ erhålls:

Töjning:

(Kompatibilitet)

$$\varepsilon = \frac{z}{R} = \left(\frac{-w''}{(1 + (w')^2)^{3/2}} \right) \cdot z \approx -w'' z \quad (1)$$

Konstitutiv Ekv.:

(Hookes lag)

$$M = \int_A z \sigma dA = \int_A z E (-w'' z) dA = -EI w'' \quad (2)$$

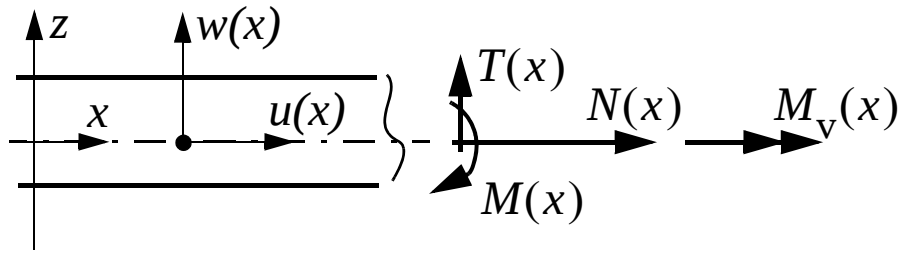
Jämvikt:

$$\frac{dT}{dx} = T, \quad \frac{dT}{dx} = -q \quad (3)$$

Ekv. (2) & (3) ger elastiska linjens ekv. $\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - q = 0$

$\Rightarrow$ lösningen till diff. ekv. ger $w(x)$

Elastisk energi lagrad i en stång/balk



Om bara normaltöjningar beaktas (normalkraft & moment):

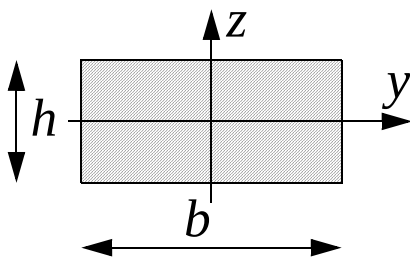
Konstitutiva samband: $N = EAu'$

$$M = -EIw''$$

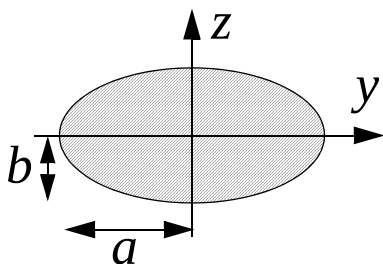
$$W = \int_L \left(\frac{EA}{2} (u')^2 + \frac{EI}{2} (w'')^2 \right) dx = \int_L \left(\frac{N^2}{2EA} + \frac{M^2}{2EI} \right) dx = \bar{W}$$

Om även skjuvtöjningar beaktas (tvärkraft & vridmoment):

$$W = \bar{W} = \int_L \left[\frac{N^2}{2EA} + \frac{M^2}{2EI} + \beta \frac{T^2}{2GA} + \frac{M_v^2}{2GK} \right] dx$$



$$I_y = \frac{bh^3}{12} \quad \beta = 1.2 \quad K = \frac{bh^3}{3} f\left(\frac{b}{h}\right)$$



$$I_y = \frac{\pi ab^3}{4} \quad \beta = \frac{10}{9} \quad K = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

Föreläsning 2

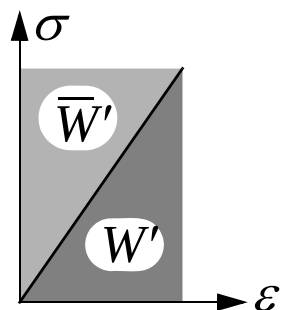
Rep. Deformationsarbete–Elastisk Energi

“När en elastisk solid deformeras av yttre krafter utförs ett visst arbete. Detta arbete lagras i materialet i form av elastisk energi”

Exempel: linjärt elastiskt material

I en materiell punkt:

Enaxligt, $\sigma = E\varepsilon$



$$W' = \int \sigma d\varepsilon = \frac{E\varepsilon^2}{2}$$

$$\bar{W}' = \int \varepsilon d\sigma = \frac{\sigma^2}{2E}$$

$$\text{här är } W' = \bar{W}' = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon$$

Fleraxligt, $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$

$$W' = \bar{W}' = \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz})$$

För elastiska material gäller generellt i en punkt:

$$\text{Enaxligt: } \sigma = \frac{dW'}{d\varepsilon} \quad \varepsilon = \frac{d\bar{W}'}{d\sigma}$$

$$\text{Fleraxligt: } \sigma_{ij} = \frac{\partial W'}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial \bar{W}'}{\partial \sigma_{ij}}$$

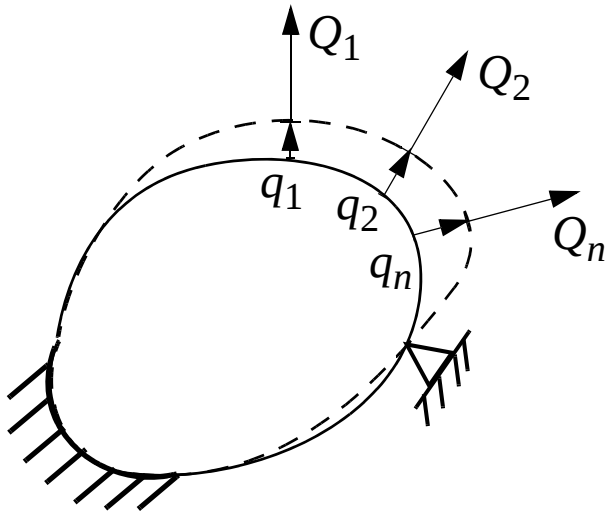
Hela soliden:

$$\text{Elastisk energi: } W = \int W' dV$$

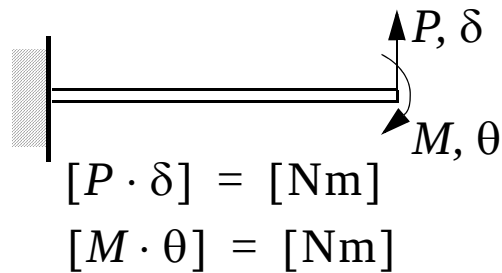
$$\text{Komplementär Elastisk Energi: } \bar{W} = \int_V \bar{W}' dV$$

Summerring—Diskreta system

System med diskreta frihetsgrader



$$\text{Arbete} = \sum_{i=1}^n Q_i q_i$$



Linjärt elastiska material

$$\text{Flexibilitetsform: } q_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} Q_j$$

$$\text{Styvhetsform: } Q_i = \sum_{j=1}^n k_{ij} q_j$$

Maxwells reciprocitetssats: $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ och $k_{ij} = k_{ji}$

(α_{ij} och k_{ij} är alltså koefficienter i **symmetriska** matriser!)

Elastisk energi:

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j q_i k_{ij} q_j$$

Castiglianos 1:a sats:

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = Q_i$$

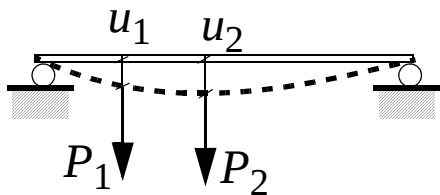
Komplementär elastisk energi: $\bar{W} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j Q_i \alpha_{ij} Q_j$

Castiglianos 2:a sats:

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial Q_i} = q_i$$

FYSIKALISK TOLKNING AV MAXWELL'S RECIPROCITETSSATS

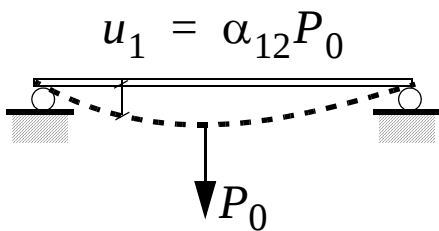
$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \quad k_{ij} = k_{ji}$$



$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

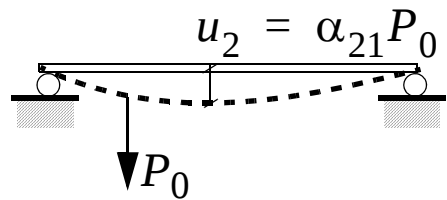
Studera de två fallen:

$$P_1 = 0 \text{ \& } P_2 = P_0$$



$$u_1 = u_2 \\ \text{eftersom} \\ \alpha_{12} = \alpha_{21}$$

$$P_1 = P_0 \text{ \& } P_2 = 0$$



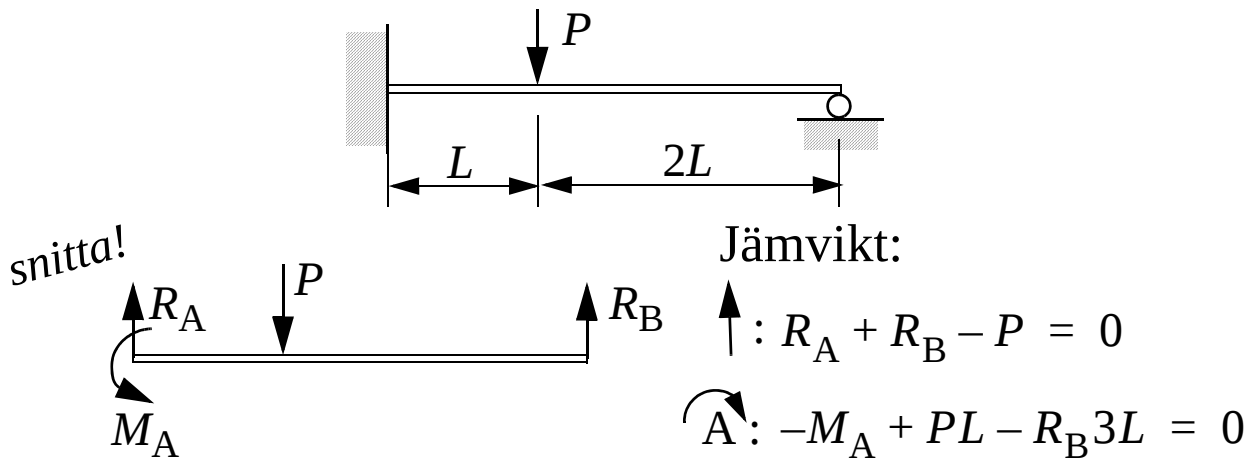
OBS! koefficienten α_{ij} bestämmer kraften P_j :s
influens (inverkan) på förskjutningen u_i

Alternativt

Flexibiliteten i förskjutningen u_i :s riktning
för en kraft P_j bestäms av koefficienten α_{ij}

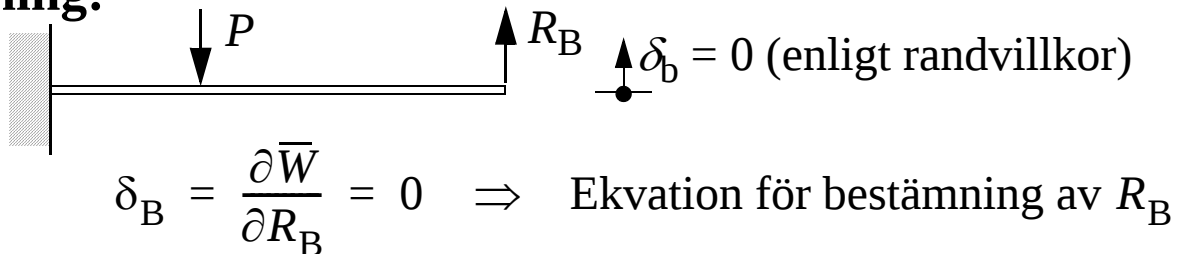
α_{ij} kallas både *influenstkoefficient*
och *flexibilitetskoefficient*

Statiskt obestämda problem (minsta arbetets princip)



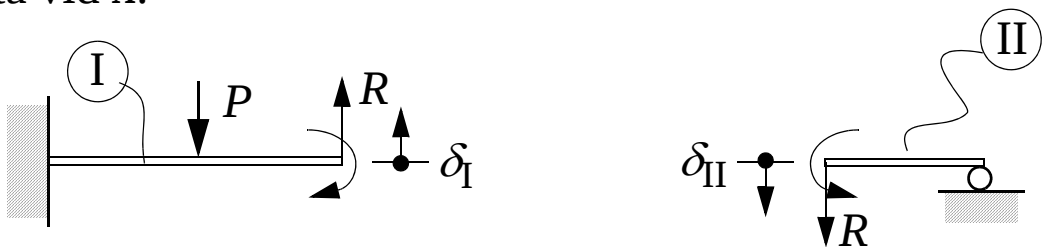
$\Rightarrow$ 3 obekanta – 2 jmv. Ekv. = 1 statiskt obestämd, t.ex R_B

Lösning:



Generalisering—godtycklig inre snittstorhet!

snitta vid x:



$$\bar{W}_I(P, R) \Rightarrow \delta_I = \frac{\partial \bar{W}_I}{\partial R}$$

$$\bar{W}_{II}(P, R) \Rightarrow \delta_{II} = \frac{\partial \bar{W}_{II}}{\partial R}$$

men kompatibilitet kräver att $\delta_I = -\delta_{II} \Leftrightarrow \delta_I + \delta_{II} = 0$

$$\Rightarrow \delta_I + \delta_{II} = \frac{\partial \bar{W}_I}{\partial R} + \frac{\partial \bar{W}_{II}}{\partial R} = \frac{\partial}{\partial R}(\bar{W}_I + \bar{W}_{II}) = \frac{\partial}{\partial R} \bar{W} = 0$$

Alltså: $\frac{\partial \bar{W}}{\partial R} = 0 \Rightarrow$ Ekvation för bestämning av R

Minsta arbetets princip generellt

Låt $Q_1, \dots, Q_n$ vara n st. yttre krafter och

$R_1, \dots, R_m$ vara m st. statiskt obestämda storheter.

$$\Rightarrow \bar{W} = \bar{W}(Q_1, \dots, Q_n; R_1, \dots, R_m)$$

då gäller

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial R_k} = 0, \quad k = 1, \dots, m \quad \Rightarrow \quad m \text{ st. Ekv. för de} \\ \text{obekanta } R_1, \dots, R_m$$

Lösningen erhålls på formen: $R_k = R_k(Q_1, \dots, Q_n)$

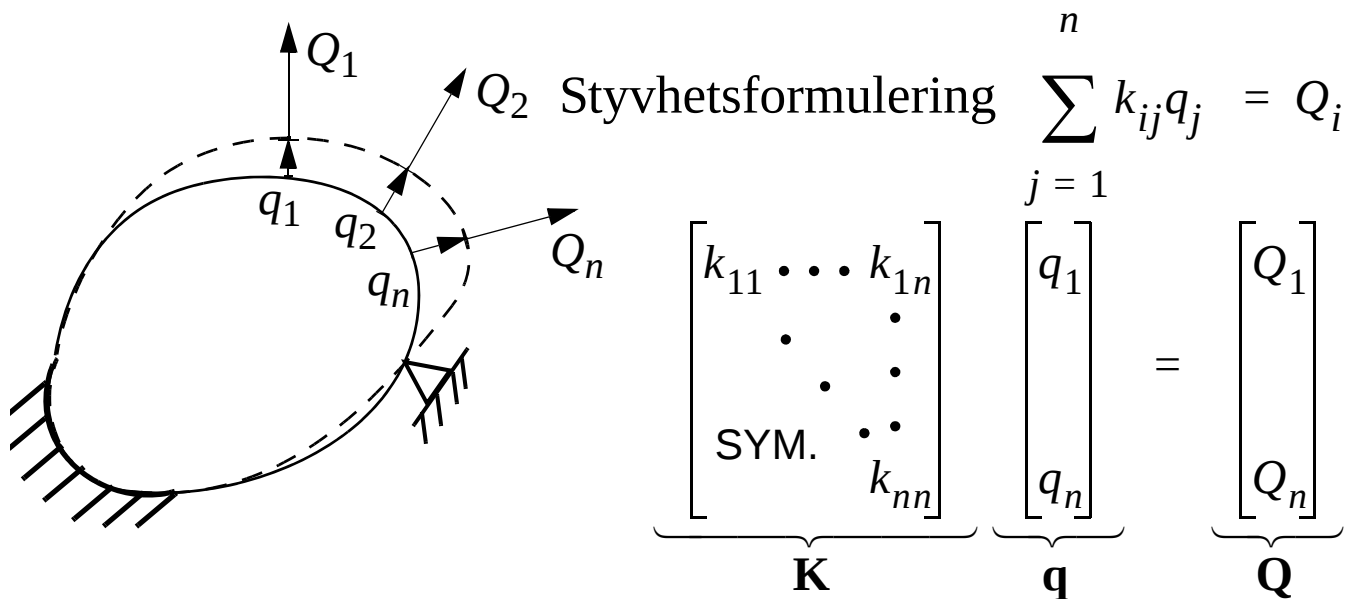
Tillämpning av Castiglianos 2:a sats ger sedan:

$$q_k = \frac{\partial \bar{W}}{\partial Q_k} = \sum_{l=1}^m \cancel{\frac{\partial \bar{W}}{\partial R_l}} \frac{\partial R_l}{\partial Q_k} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial Q_k} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial Q_k} \Big|_{R_l = \text{konstant}}$$

$\nearrow$ 0
 $\swarrow$

Föreläsning 3 & 4

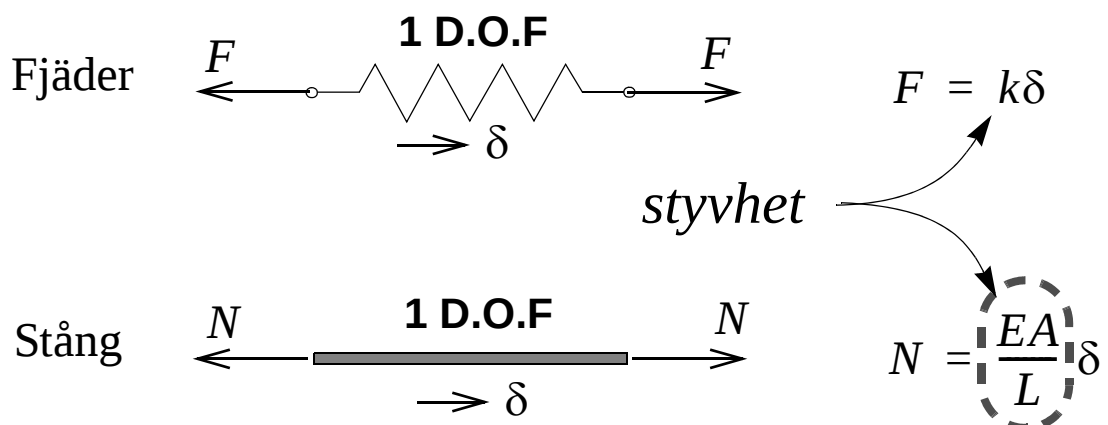
Matrisformulerad Solidmekanik



Hur väljs antalet förskjutningsfrihetsgrader ($q_1, \dots, q_n$) och hur bestäms styvhetsmatrisen $\mathbf{K}$?

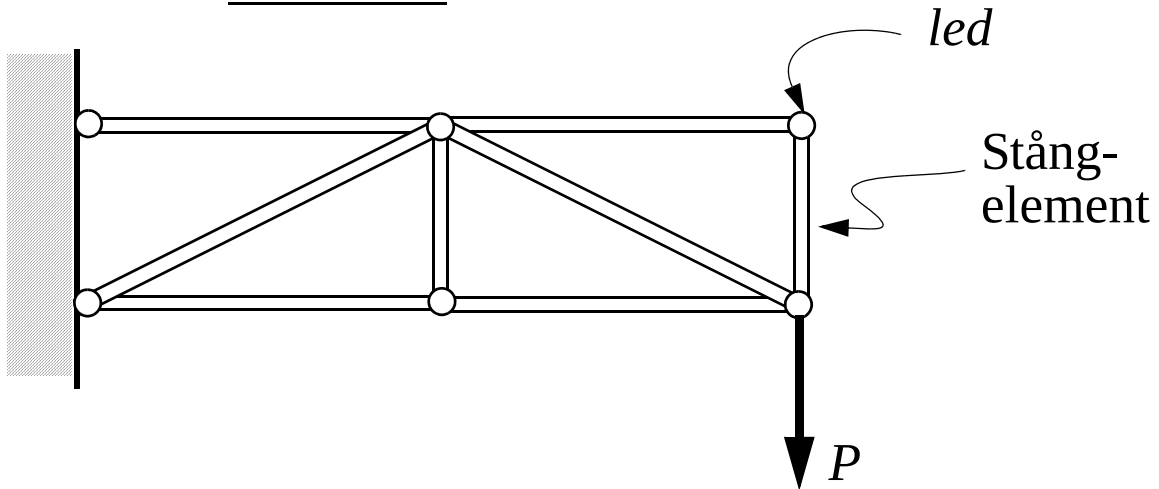
1. Dela in strukturen i element
2. Använd exakta eller approximativa metoder för att beskriva tillståndet i ett element
3. Tillståndet i ett element kan beskrivas med ett fåtal förskjutningsparametrar (frihetsgrader, D.O.F.)

Exempel:

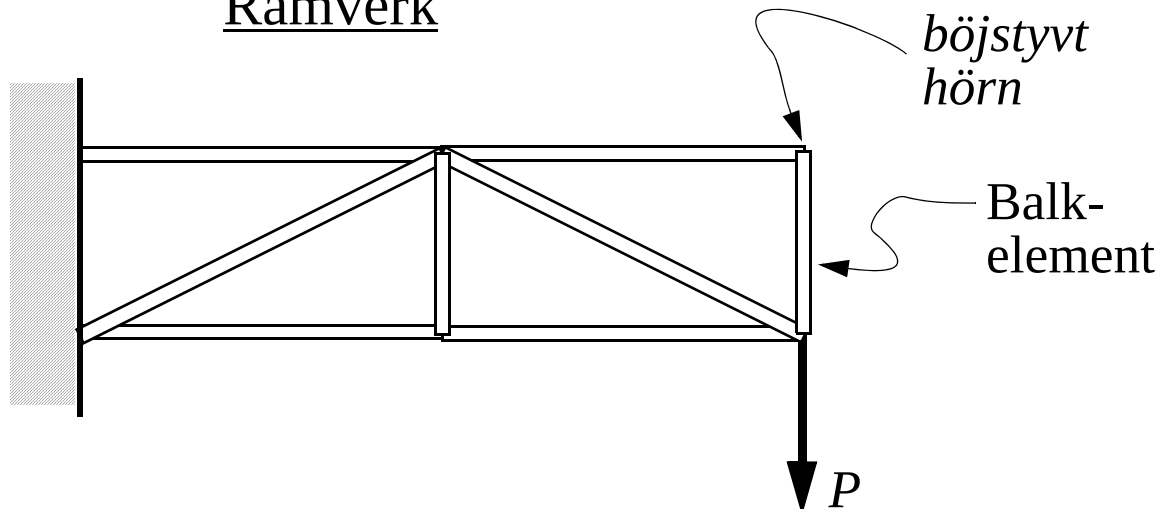


Solider — Strukturer

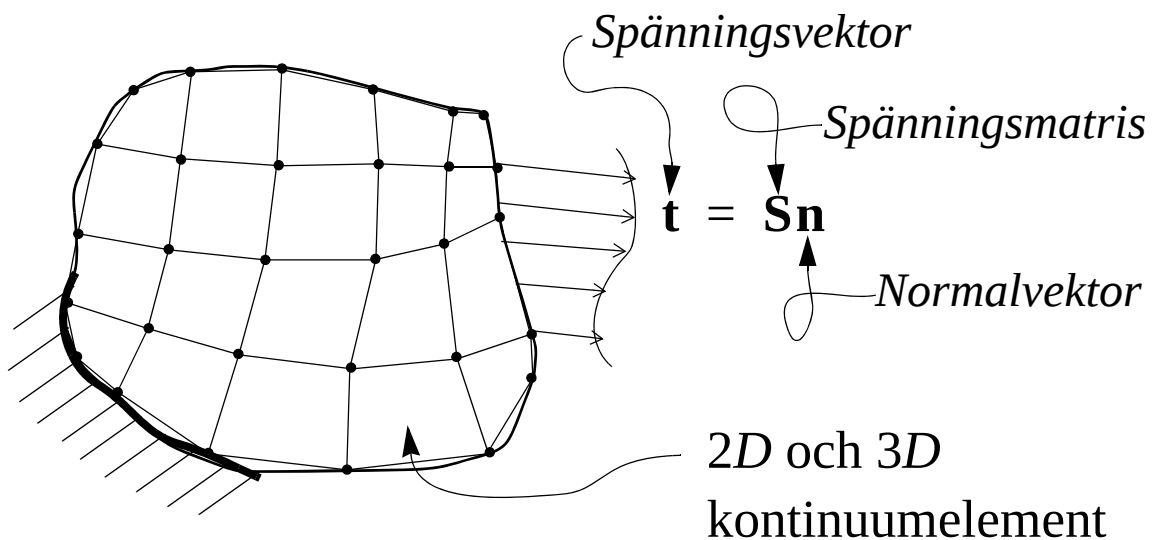
Fackverk



Ramverk

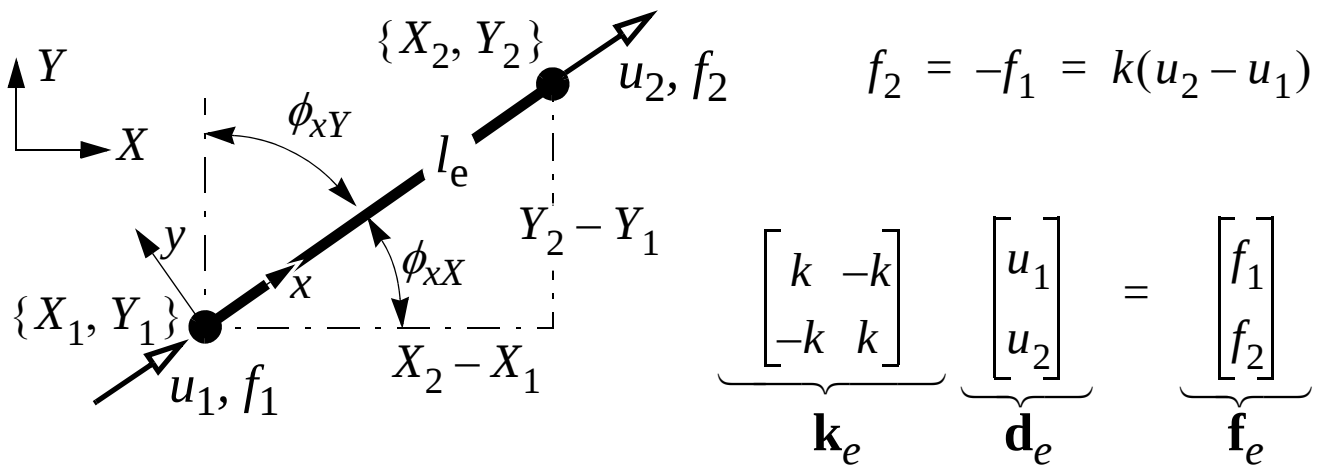


2- och 3-dimensionella solider

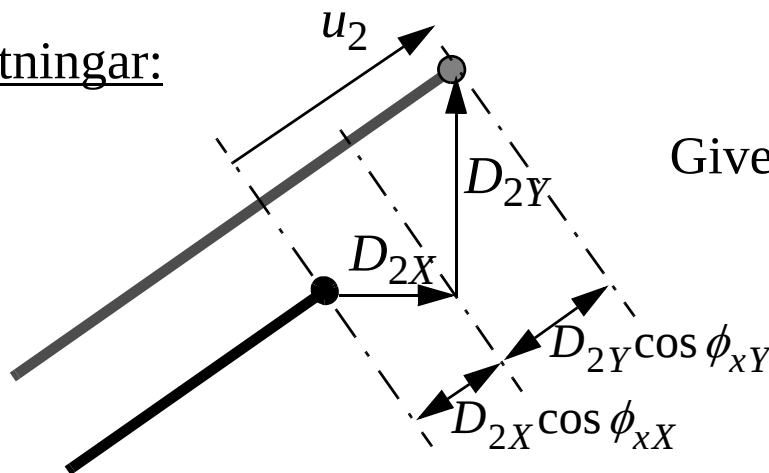


Ett element i planet (2D)

Lokalt koordinatsyst. $\{x,y\} \longrightarrow$ Globalt koordinatsyst. $\{X,Y\}$



Förskjutningar:



$$\Rightarrow u_2 = D_{2X} \cos \phi_{xX} + D_{2Y} \cos \phi_{xY}$$

u_1 bestäms på samma sätt!

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1 = D_{1X} \cos \phi_{xX} + D_{1Y} \cos \phi_{xY} \\ u_2 = D_{2X} \cos \phi_{xX} + D_{2Y} \cos \phi_{xY} \end{cases} \quad \text{“Riktningsvinklar”}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \phi_{xX} &= (X_2 - X_1)/l_e = l_{12} \\ \cos \phi_{xY} &= (Y_2 - Y_1)/l_e = m_{12} \end{aligned} \right\} \quad \text{“Riktningscosiner”} \quad \text{där } l_{12}^2 + m_{12}^2 = 1$$

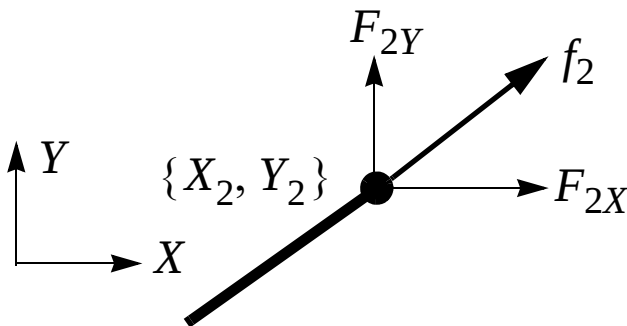
$$l_e = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

Matrisform:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}_e} = \underbrace{\begin{bmatrix} l_{12} & m_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_{12} & m_{12} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \underbrace{\begin{bmatrix} D_{1X} \\ D_{1Y} \\ D_{2X} \\ D_{2Y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_e}$$

*Transformations-
matrix*

4 D.O.F.

Nodkrafter:

Uttryck elementets axialkraft f_2 i komponenter i det globala koordinatsystemet (projicera f_2 på koordinataxlarna).

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{2X} = f_2 \cos \phi_{xX} = f_2 l_{12} \\ F_{2Y} = f_2 \cos \phi_{xY} = f_2 m_{12} \end{cases}$$

Matrisform:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ F_{2X} \\ F_{2Y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_e} = \underbrace{\begin{bmatrix} l_{12} & 0 \\ m_{12} & 0 \\ 0 & l_{12} \\ 0 & m_{12} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}_e}$$

Sammanfattning: lokal → global transformation

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{d}_e &= \mathbf{T} \mathbf{D}_e \\ \mathbf{f}_e &= \mathbf{k}_e \mathbf{d}_e \\ \mathbf{F}_e &= \mathbf{T}^T \mathbf{f}_e \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{f}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{T} \mathbf{D}_e \Rightarrow \mathbf{F}_e = \underbrace{\mathbf{T}^T \mathbf{k}_e \mathbf{T}}_{\mathbf{K}_e} \mathbf{D}_e$$

*Elementstyvhetsmatris i
lokalt koordinatsystem*
*Elementstyvhetsmatris i
globalt koordinatsystem*

 $\Rightarrow$

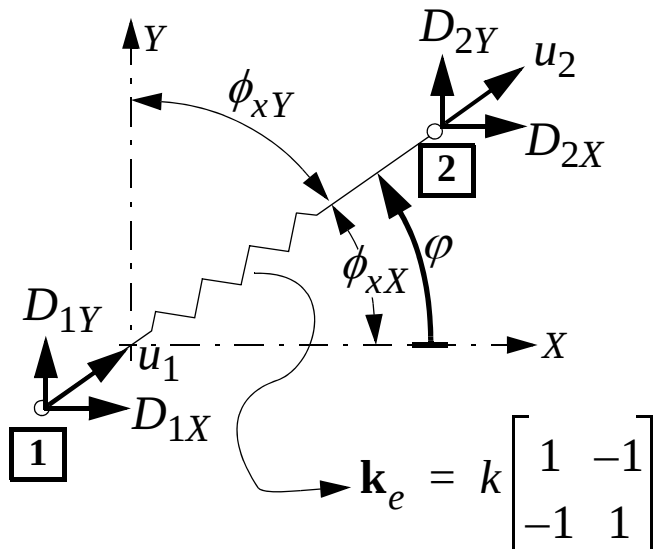
$$\mathbf{F}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{D}_e$$

där $\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} l_{12} & 0 \\ m_{12} & 0 \\ 0 & l_{12} \\ 0 & m_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{12} & m_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_{12} & m_{12} \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \mathbf{K}_e = k \begin{bmatrix} \mathbf{a} & -\mathbf{a} \\ -\mathbf{a} & \mathbf{a} \end{bmatrix} \quad \text{där} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} l_{12}^2 & l_{12} m_{12} \\ l_{12} m_{12} & m_{12}^2 \end{bmatrix}$$

*symmetrisk
matris!*

Alternativ form för plant problem (2D)



$$l_{12} = \cos \phi_{xX} = \cos \varphi = c$$

$$m_{12} = \cos \phi_{xY} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin \varphi = s$$

$$\Rightarrow T = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix}$$

Global elementstyvhetmatris i planet:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{T}^T \mathbf{k}_e \mathbf{T} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ s & 0 \\ 0 & c \\ 0 & s \end{bmatrix} k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

Global elementstyvhetmatris kan även härledas med energimetod

Elastisk energi:

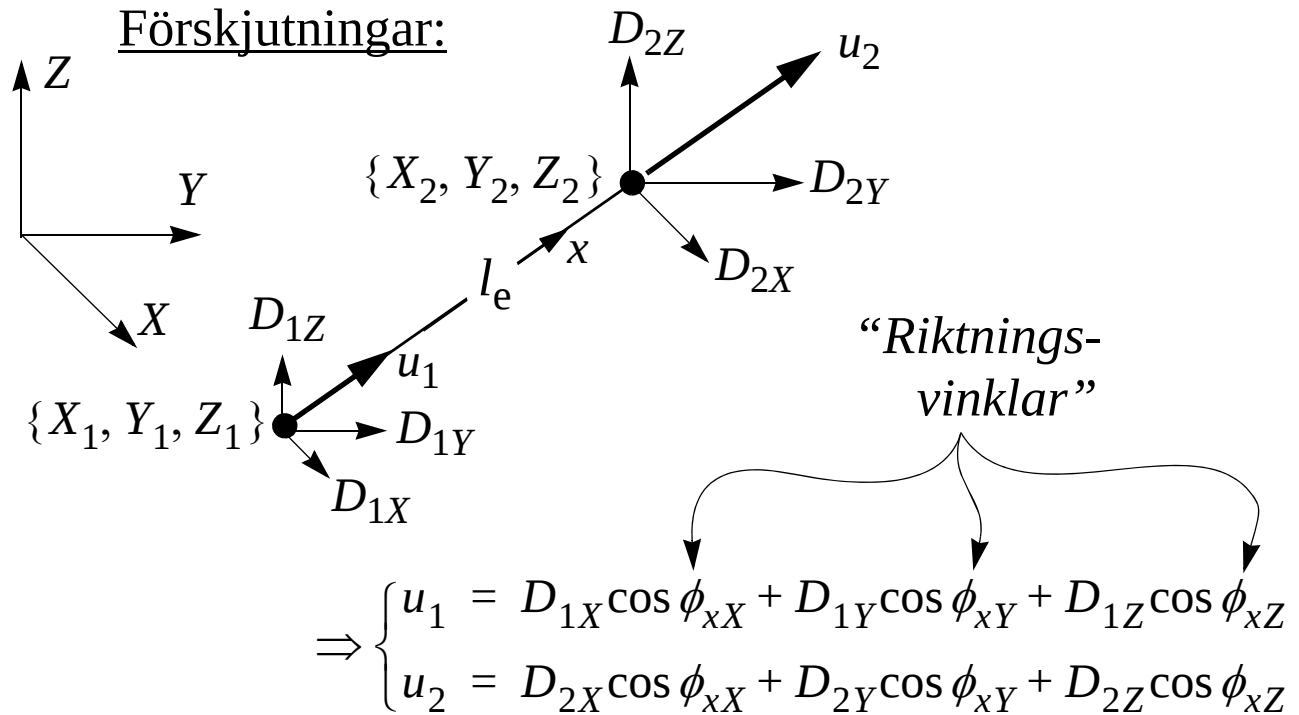
$$W = \frac{k}{2}(u_2 - u_1)^2 = \frac{k}{2} \left[\underbrace{(cD_{2X} + sD_{2Y})}_{u_2} - \underbrace{(cD_{1X} + sD_{1Y})}_{u_1} \right]^2$$

Castiglianos 1:a sats ger nodernas kraftkomponenter enligt:

$$\left. \begin{aligned} F_{1X} &= \partial W / \partial D_{1X} \\ F_{1Y} &= \partial W / \partial D_{1Y} \\ F_{2X} &= \partial W / \partial D_{2X} \\ F_{2Y} &= \partial W / \partial D_{2Y} \end{aligned} \right\} \Rightarrow k \underbrace{\begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} D_{1X} \\ D_{1Y} \\ D_{2X} \\ D_{2Y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_e} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ F_{2X} \\ F_{2Y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_e}$$

Ett element i rymden (3D)

Lokalt koordinatsyst. $\{x,y,z\} \rightarrow$ Globalt koordinatsyst. $\{X,Y,Z\}$



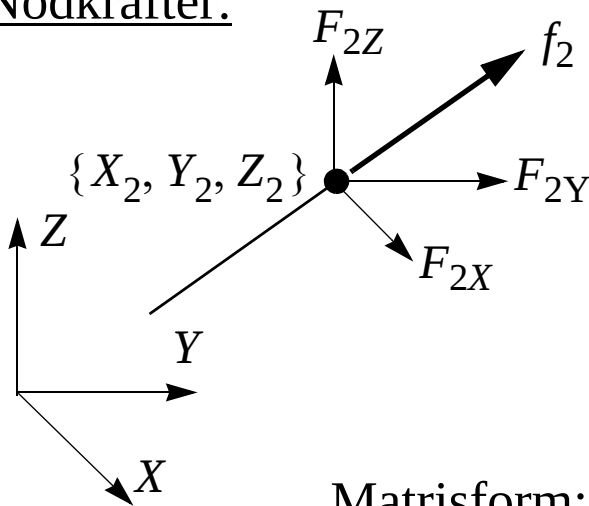
där $\cos \phi_{xX} = (X_2 - X_1)/l_e = l_{12}$
 $\cos \phi_{xY} = (Y_2 - Y_1)/l_e = m_{12}$
 $\cos \phi_{xZ} = (Z_2 - Z_1)/l_e = n_{12}$ } “Riktningscosiner”
där $l_{12}^2 + m_{12}^2 + n_{12}^2 = 1$

$$l_e = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}$$

Matrisform:
$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}_e} = \underbrace{\begin{bmatrix} l_{12} & m_{12} & n_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{12} & m_{12} & n_{12} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \underbrace{\begin{bmatrix} D_{1X} \\ D_{1Y} \\ D_{1Z} \\ D_{2X} \\ D_{2Y} \\ D_{2Z} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_e}$$

Transformations-
matrix

6 D.O.F.

Nodkrafter:

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{2X} = f_2 \cos \phi_{xX} = f_2 l_{12} \\ F_{2Y} = f_2 \cos \phi_{xY} = f_2 m_{12} \\ F_{2Z} = f_2 \cos \phi_{xZ} = f_2 n_{12} \end{cases}$$

Matrisform:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ F_{1Z} \\ F_{2X} \\ F_{2Y} \\ F_{2Z} \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_e} = \underbrace{\begin{bmatrix} l_{12} & 0 \\ m_{12} & 0 \\ n_{12} & 0 \\ 0 & l_{12} \\ 0 & m_{12} \\ 0 & n_{12} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}_e}$$

Sammanfattning: lokal → global transformation i 3D

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{d}_e &= \mathbf{T} \mathbf{D}_e \\ \mathbf{f}_e &= \mathbf{k}_e \mathbf{d}_e \\ \mathbf{F}_e &= \mathbf{T}^T \mathbf{f}_e \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{f}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{T} \mathbf{D}_e \Rightarrow \mathbf{F}_e = \underbrace{\mathbf{T}^T \mathbf{k}_e \mathbf{T}}_{\mathbf{K}_e} \mathbf{D}_e$$

Elementstyvhetismatris i lokalt koordinatsystem
Elementstyvhetismatris i globalt koordinatsystem

 $\Rightarrow$

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{D}_e$$

Där

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{T}^T \mathbf{k}_e \mathbf{T} = k \begin{bmatrix} \mathbf{a} & -\mathbf{a} \\ -\mathbf{a} & \mathbf{a} \end{bmatrix} \quad \text{där } \mathbf{a} = \begin{bmatrix} l_{12}^2 & l_{12}m_{12} & l_{12}n_{12} \\ l_{12}m_{12} & m_{12}^2 & m_{12}n_{12} \\ l_{12}n_{12} & m_{12}n_{12} & n_{12}^2 \end{bmatrix}$$

symmetrisk matris!

Ekvationsnumrering

- Totala antalet ekvationer (= frihetsgrader) är lika med

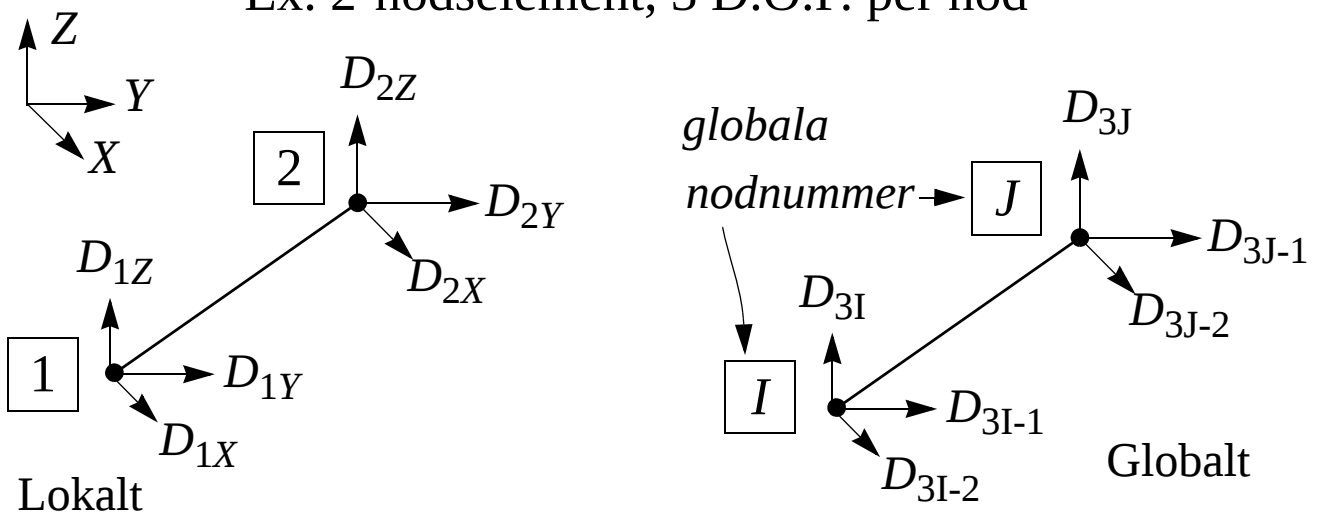
$$[\text{D.O.F. per nod}] \times N$$

*totala antalet noder
i modellen*

- Numerisk analys kräver systematisk numrering av Ekv. (t.ex. för hantering randvillkor osv.)
- Assemblering av styvhetsmatrisen och lastvektor kräver dessutom samband mellan lokal och global numrering av frihetsgraderna

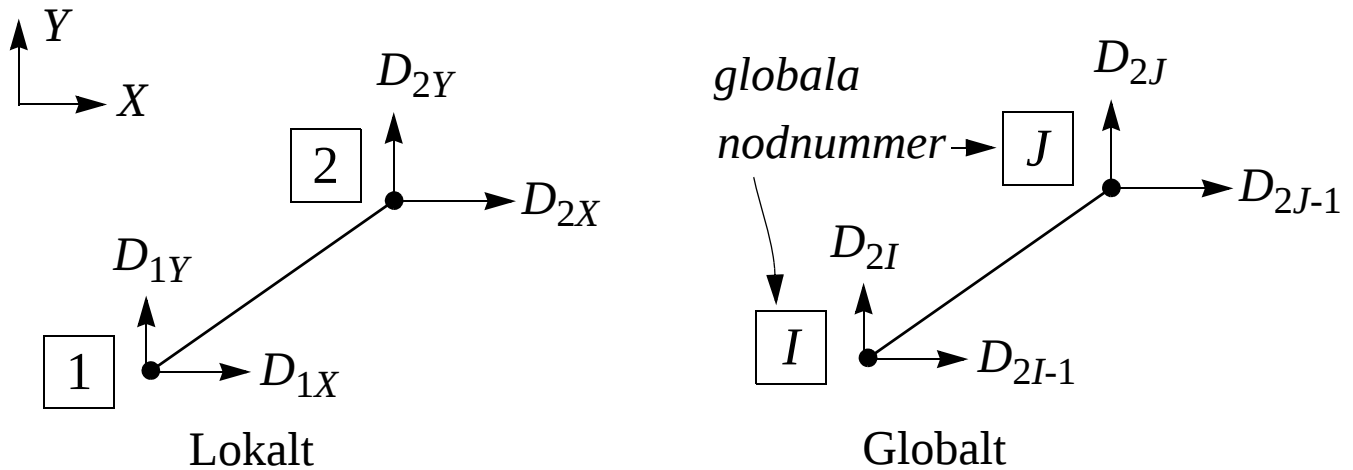
⇒ Bokföringsproblem!

Ex. 2-nodselement, 3 D.O.F. per nod

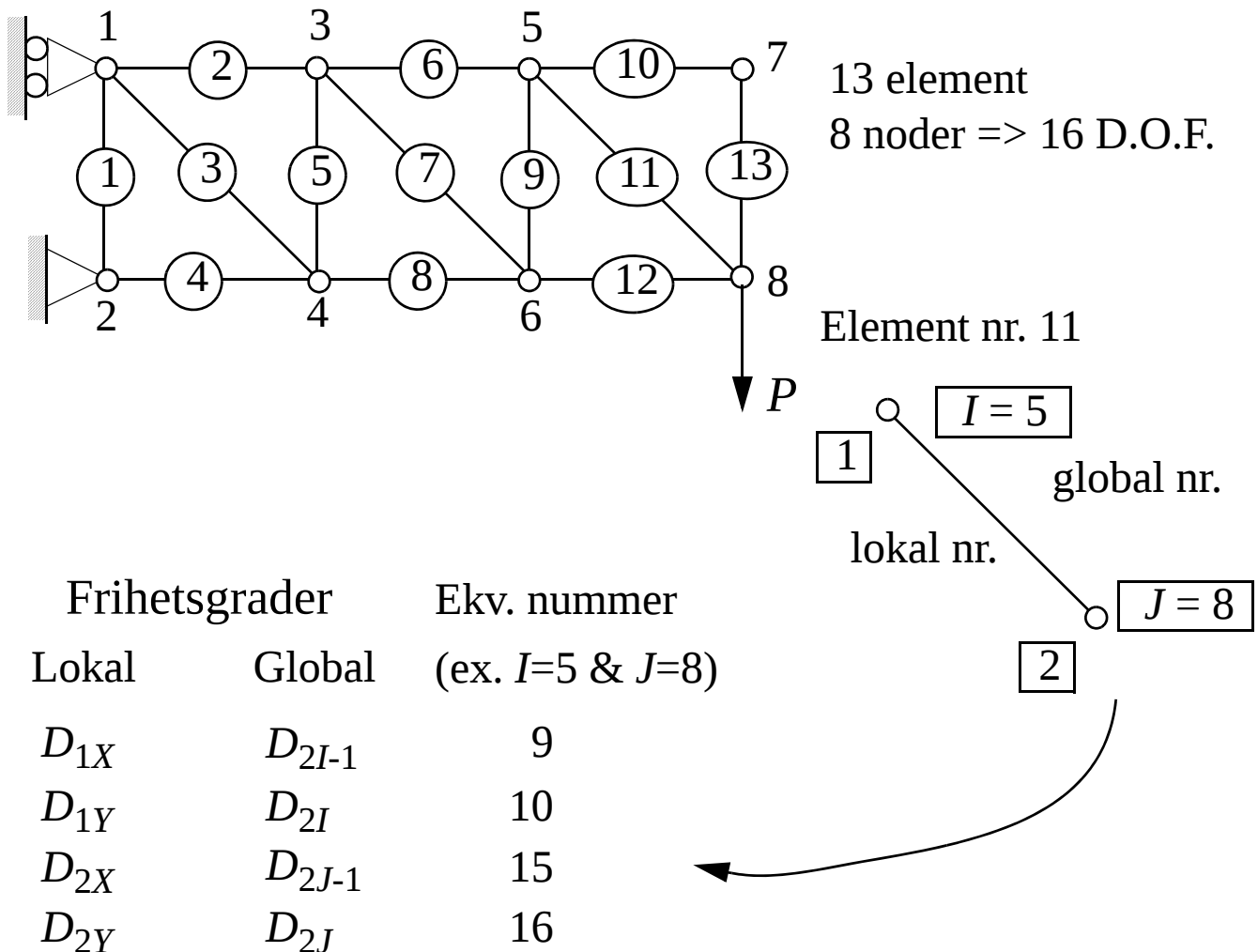


Frihetsgrader		Ekv. nummer
Lokal	Global	(ex. $I=1$ & $J=8$)
D_{1X}	D_{3I-2}	1
D_{1Y}	D_{3I-1}	2
D_{1Z}	D_{3I}	3
D_{2X}	D_{3J-2}	22
D_{2Y}	D_{3J-1}	23
D_{2Z}	D_{3J}	24

Ex. 2-nodselement, 2 D.O.F. per nod



Ex.: plant fackverk (stång alternativt fjäderelement)

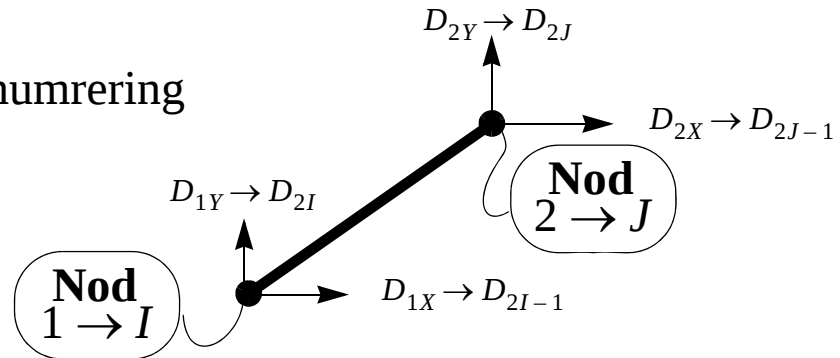


Randvillkor: $D_1 = D_3 = D_4 = 0$ (F_1, F_3 och F_4 reaktionskrafter)

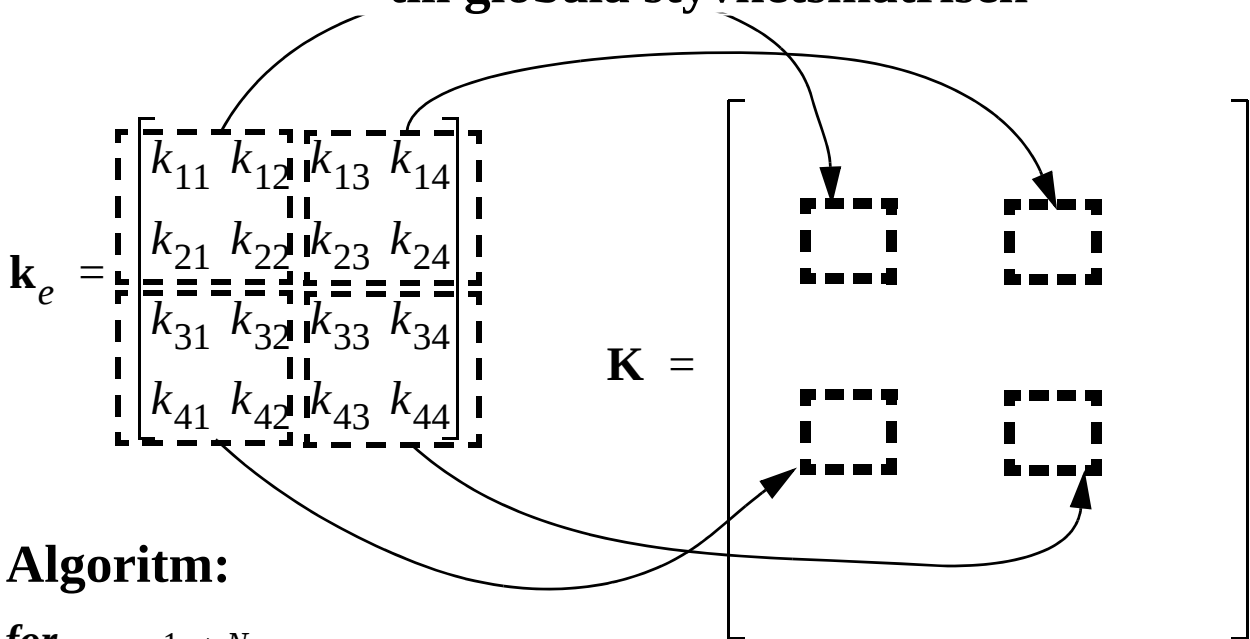
$$F_2 = F_5 = F_6 = \dots = F_{15} = 0, \quad F_{16} = -P$$

Assembleringsalgoritm

Lokal → Global numrering



Assemblering: elementstyvhetsmatriserna adderas till globala styvhetsmatrisen



Algoritm:

for $e = 1 \rightarrow N_{el}$

Beräkna elementstyvhetsmatrisen k_e

$$Ekv(1) = 2I - 1$$

$$Ekv(2) = 2I$$

$$Ekv(3) = 2J - 1$$

$$Ekv(4) = 2J$$

Ekvationsnummer bestäms av elementens nodnummer

for $i = 1 \rightarrow 4$

for $j = 1 \rightarrow 4$

$$K(Ekv(i), Ekv(j)) = K(Ekv(i), Ekv(j)) + k_e(i, j)$$

addera k_e till K

end

end

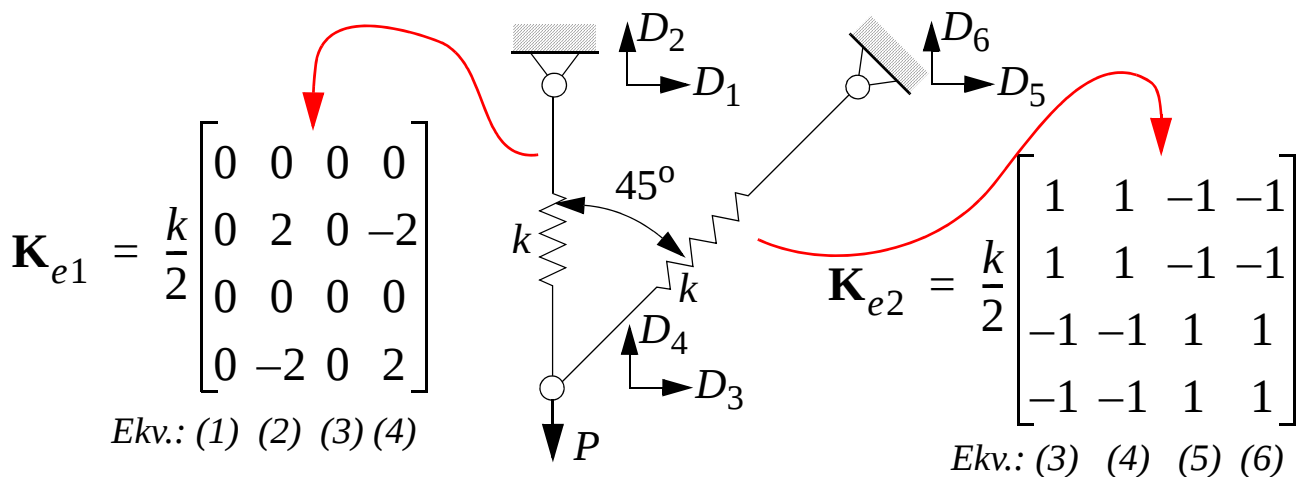
end

rad

kolumn

Se Matlabprogrammen: **spring2D** & **truss2D** under kurshemsidan!

Sammanfattning: fackverksexempel



Randvillkor: $D_1=D_2=D_5=D_6=0$; $F_3=0$, $F_4=-P$

Ekvations system

$$\frac{k}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ 0 \\ -P \\ R_5 \\ R_6 \end{bmatrix}$$

The matrix is partitioned into known and unknown degrees of freedom. The right-hand side is partitioned into known and unknown reaction forces.

Beräkningssteg:

1. Beräkna *elementstyvhetsmatriser* och **assemblera den globala styvhetsmatrisen**
2. Lös ut de okända **förskjutningarna** (Ekv. 3, 4) $\Rightarrow D_3, D_4$

$$\frac{k}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_3 \\ D_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -P \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} D_3 \\ D_4 \end{bmatrix} = \frac{P}{k} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3. Beräkna de okända **reaktionskrafterna** (Ekv. 1, 2, 5, 6)

$$\text{Ekv. (2): } R_2 = k/2(2D_2 - 2D_4) = P$$

$$\text{Ekv. (5): } R_5 = k/2(-D_3 - D_4 + D_5 + D_6) = 0$$

$$\text{Ekv. (6): } \Rightarrow R_6 = 0$$

Föreläsning 5, 6 & 7

Introduktion till *approximativa* lösningsmetoder inom solidmekaniken

1. Virtuella arbetets princip (VAP)
2. Approximativa metoder baserade på VAP
3. Generell metod för härledning av ***FEM-Ek.*** baserad på ***svag form*** (en generalisering av VAP, som kan tillämpas på PDE i allmänhet)
4. Procedur för FEM-analys applicerad på enaxliga problem (stänger och plana fackverk)

Virtuella arbetets princip

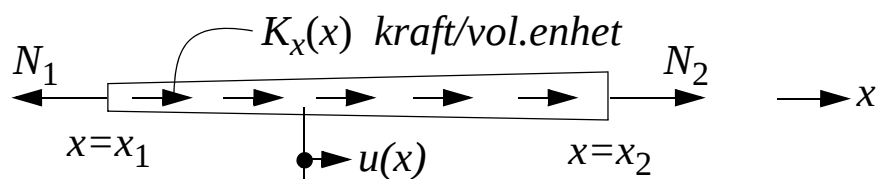
vid jämvikt gäller att $\delta A^{(e)} = \delta A^{(i)}$

yttre krafter
virtuella arbete

inre krafter
virtuella arbete

“Nödvändigt och tillräckligt villkor för jämvikt”

Enaxlig tillämpning (stång):



Jämvikt: $\frac{dN}{dx} + AK_x = 0$ Kompatibilitet: $\varepsilon = \frac{du}{dx}$

Inför en **godtycklig förskjutningsändring** $\delta u(x)$ från jämviktsläget
med den **kompatibla töjningsändringen** $\delta \varepsilon = d\delta u / dx$

$u(x) + \delta u(x)$ måste uppfylla **geometriska randvillkor och tvång**,
alltså måste $\delta u(x) = 0$ där $u(x)$ är föreskriven

Yttre krafter $\{N_1, N_2 \text{ \& } K_x\}$ utför då arbetet $\delta A^{(e)}$ enligt

$$\delta A^{(e)} = \underbrace{N_2 \delta u(x_2) + N_1 (-\delta u(x_1))}_{[N \delta u]_{x_1}^{x_2}} + \int_{x_1}^{x_2} \delta u K_x A dx$$

$$\Rightarrow [N \delta u]_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} [N \delta u] dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{dN}{dx} \delta u + N \frac{d\delta u}{dx} \right] dx$$

$$\Rightarrow \delta A^{(e)} = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\left(\frac{dN}{dx} + K_x A \right)}_{= 0 \text{ ty jämvikt!}} \delta u dx + \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{N}_{\sigma A} \delta \varepsilon dx$$

$\delta \varepsilon$

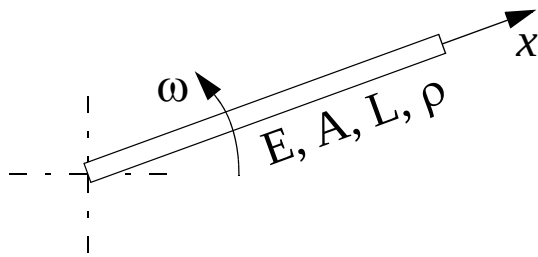
$$\text{Alltså: } \delta A^{(e)} = \int_{x_1}^{x_2} \sigma \delta \varepsilon A dx = \int_V \underbrace{\sigma \delta \varepsilon}_{\text{inre virtuellt arbete}} dV = \delta A^{(i)}$$

volymsenhet

OBS! inga antaganden för materialet har gjorts!

Illustration av virtuell förskjutning i VAP

Exempel: Stång som rotaterar med en konstant vinkelhastighet ω



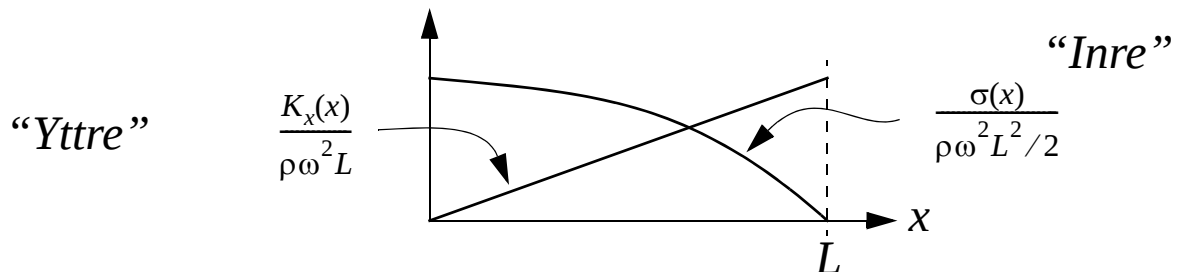
Lasten (centrifugalkraft) modelleras som en volymkraft

$$K_x = \rho \omega^2 x$$

Jämvikt: $\frac{d}{dx}(\sigma A) + K_x A = 0$

R.V.: $\sigma(x=L) = 0$

$$\Rightarrow \sigma(x) = \frac{\rho \omega^2 L^2}{2} \left(1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right)$$



Kompatibilitet: $\frac{du}{dx} = \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$

R.V.: $u(x=0) = 0$

$$\Rightarrow u(x) = \frac{\rho \omega^2 L^3}{6E} \frac{x}{L} \left(3 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right)$$

Studera förskjutningsvariation $\delta u(x)$ (virtuell förskjutning),

kring $u(x)$, given som $\delta u = \alpha \sin(\beta \pi x/L)$, $\alpha, \beta > 0$

$$\Rightarrow \delta \varepsilon = \frac{\alpha \beta \pi}{L} \cos(\beta \pi x/L)$$

Inre virtuellt arbete:

$$\delta A^{(i)} = \int_0^L \delta \varepsilon(x) \sigma(x) A dx = \dots = AL^2 \rho \omega^2 \alpha \frac{(\sin \beta \pi - \beta \pi \cos \beta \pi)}{\beta^2 \pi}$$

Yttre (externt) virtuellt arbete:

$$\delta A^{(e)} = \int_0^L \delta u(x) K_x(x) A dx = \dots = AL^2 \rho \omega^2 \alpha \frac{(\sin \beta \pi - \beta \pi \cos \beta \pi)}{\beta^2 \pi}$$

Alltså, $\delta A^{(i)} = \delta A^{(e)}$, oberoende av α och β i enlighet med **VAP**

Approximativ lösningsmetod

baserad på Virtuella Arbetets Princip

Allmänna egenskaper för lösningar:

- (i) **Kompatibilitet och material samband** kommer att uppfyllas i varje materiell punkt!
- (ii) **Jämvikt** kommer inte att uppfyllas i varje materiell punkt, utan i “medeltal”!

Beräkningssteg (stångexempel):

- Välj en **approximativ ansats** (trial function), $\tilde{u}(x)$, för förskjutningen.

Krav: $\tilde{u}(x)$ måste uppfylla **kinematiska (geometriska) randvillkor & tvång**.

En relativt allmän ansats är:

$$\tilde{u}(x) = \phi_0(x) + \sum_{j=1}^n \alpha_j \phi_j(x)$$

Uppfyller kinematiska R.V. & tvång

Okända koefficienter som skall bestämmas

“Basfunktioner” som antar värdet noll vid ränder med förskjutnings-R.V.

- Bestäm α_i m.h.a. Virtuella Arbetets Princip (VAP). Ett lämpligt val av **virtuell förskjutning** (test function) $\delta u(x)$ är därför:

$$\delta u(x) = \sum_{i=1}^n \beta_i \phi_i(x) \quad , \quad \beta_i \text{ godtyckliga koefficienter}$$

$$\Rightarrow \delta \varepsilon(x) = \frac{du}{dx} = \sum_{i=1}^n \beta_i \phi'_i(x) \quad (\text{kompatibel virtuell töjning})$$

Inre virtuellt arbete

$$\begin{aligned}\delta A^{(i)} &= \int_{x_1}^{x_2} \delta \varepsilon(x) \tilde{\sigma}(x) A dx = \left\{ \tilde{\sigma} = E \frac{d\tilde{u}}{dx} \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^n \beta_i \left[\int_{x_1}^{x_2} \phi'_i EA \left(\phi'_0(x) + \sum_{j=1}^n \alpha_j \phi'_j(x) \right) dx \right]\end{aligned}$$

Yttre (externt) virtuellt arbete

$$\begin{aligned}\delta A^{(e)} &= [\delta u(x) N]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \delta u(x) K_x(x) A dx = \\ &= \sum_{i=1}^n \beta_i \left[[\phi_i N]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \phi_i K_x(x) A dx \right]\end{aligned}$$

Tillämpa VAP, d.v.s. att $\delta A^{(i)} = \delta A^{(e)}$ skall vara uppfyllt för ett godtyckligt val av β_i . Detta ger oss ett system av n ekvationer för de n obekanta koefficienterna α_j .

$$\int_{x_1}^{x_2} \phi'_i EA \left(\phi'_0(x) + \sum_{j=1}^n \alpha_j \phi'_j(x) \right) dx = [\phi_i N]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \phi_i K_x(x) A dx$$

$i = 1, \dots, n$

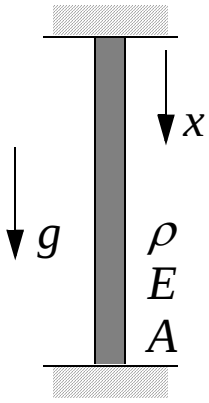
Omskrivet på **matrisform**

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \Rightarrow \text{lös m.a.p. } \alpha$$

$\int_{x_1}^{x_2} \phi'_n EA \phi'_1 dx$

$[\phi_n N]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \phi_n K_x A dx - \int_{x_1}^{x_2} \phi'_n EA \phi'_0 dx$

Enaxligt exempel: axialbelastad stång



En linjärelastisk stång (E) belastas av egentyngden $K_x = \rho g$. Bestäm förskjutningen i stången med approximativ metod baserad på virtuella arbetets princip (V.A.P.)

Randvillkor: $u(x=0) = 0$ & $u(x=L) = 0$

$$\text{V.A.P.:} \quad \delta A^{(i)} = \int_{x_1}^{x_2} \delta \varepsilon \sigma A dx = [N \delta u]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \delta u K_x A dx = \delta A^{(e)}$$

$$\text{Approximativ ansats: } \tilde{u}(x) = c_0 + c_1 \frac{x}{L} + c_2 \left(\frac{x}{L}\right)^2$$

$$\text{R.V.: } u(0) = u(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_0 = 0, c_2 = -c_1$$

$$\text{Alltså: } \tilde{u}(x) = c_1 \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad \Rightarrow \quad \tilde{\varepsilon}(x) = \frac{d\tilde{u}}{dx} = \frac{c_1}{L} \left(1 - 2\frac{x}{L}\right)$$

Val av funktion för variationen δu (måste satisfiera kinematiska R.V.):

$$(i) \delta u = d\frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \Rightarrow \delta \varepsilon = \frac{d\delta u}{dx} = \frac{d}{dx} \left(1 - 2\frac{x}{L}\right)$$

Hookes lag: $\sigma = E \tilde{\varepsilon}(x) = E \frac{d\tilde{u}(x)}{dx}$ OBS! ansatsen kommer in här!

Lösning:

$$\delta A^{(i)} = \int_{x_1}^{x_2} \delta \varepsilon \sigma A dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(1 - 2\frac{x}{L}\right) E \frac{c_1}{L} \left(1 - 2\frac{x}{L}\right) A dx = d \frac{EA}{3L} c_1$$

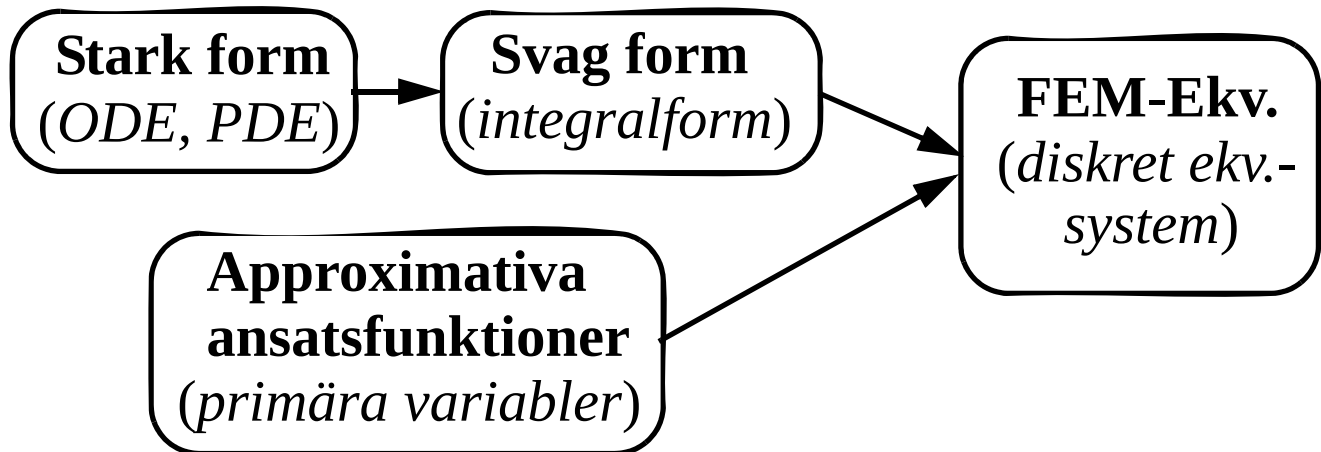
$$\delta A^{(e)} = 0 + \int_{x_1}^{x_2} d\frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \rho g A dx = d \frac{\rho g AL}{6}$$

$$\delta A^{(i)} = \delta A^{(e)} \Rightarrow d \left(\frac{EA}{3L} c_1 - \frac{\rho g AL}{6} \right) = 0 \Rightarrow c_1 = \frac{\rho g L^2}{2E}$$

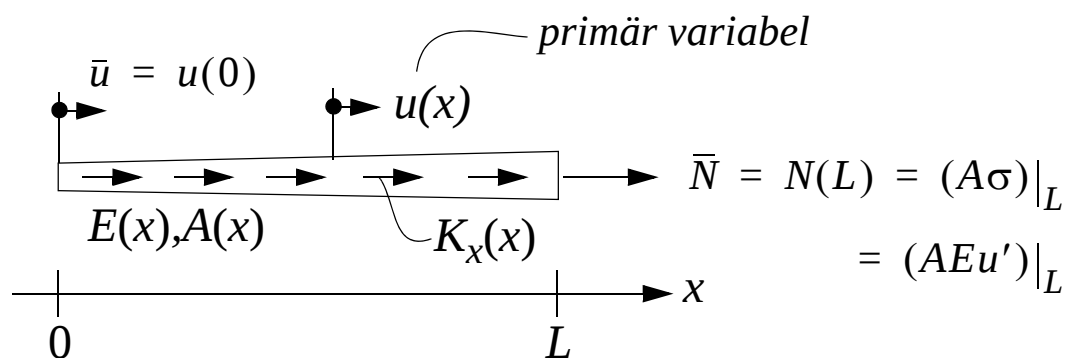
$$\Rightarrow \tilde{u}(x) = \frac{\rho g L^2}{2E} \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad \text{Exakt lösning i detta fall!}$$

Härledning av FEM-Ekvationer

— Generell metod för fysikaliska problem som kan beskrivas m.h.a. PDE



Exempel: Stång (1D)



Stark form:

O.D.E.:
$$\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) + K_x A = 0 \quad \text{för } 0 < x < L$$

Randvillkor:

$x = 0:$	$u = \bar{u}$	(väsentligt)
$x = L:$	$AEu' = \bar{N}$	(naturligt)

Svag form (integralform, även variationsform):

1. Multiplicera **O.D.E.** och **R.V.** med en **godtycklig viktfunktion**, $v(x)$, och integrera över stångens längd:

$$\Rightarrow \left\{ \int_0^L v(x) \left[\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) + K_x A \right] dx = 0 \right. \quad (1a)$$

$$\left. \begin{aligned} & [v(x)(\bar{N} - EAu')] \Big|_{x=L} = 0 \end{aligned} \right. \quad (1b)$$

$$\left. \begin{aligned} & \text{Lämplig restriktion på } v(x) \text{ välj } v(0) = 0 \end{aligned} \right. \quad (1c)$$

2. Partialintegrera 1:a termen i (1a), d.v.s. sänk u'' till u' :

$$\Rightarrow \int_0^L v(x) \left[\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) \right] dx = \left[v(x) EA \frac{du}{dx} \right]_0^L - \int_0^L \frac{dv}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) dx$$

insatt i (1a) ger

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{dv}{dx} EA \frac{du}{dx} dx &= \underbrace{v(EAu')}_{= \bar{N} \text{ (1b)}} \Big|_{x=L} - \underbrace{v(EAu')}_{= 0 \text{ (1c)}} \Big|_{x=0} + \int_0^L v K_x A dx \\ &= \bar{N} \quad (1b) \qquad \qquad \qquad = 0 \quad (1c) \end{aligned}$$

Svag form, definition: Finn $u(x)$ bland alla tillåtna funktioner som satisfierar $u(0) = \bar{u}$, så att

$$\int_0^L \frac{dv}{dx} EA \frac{du}{dx} dx - \left[(v\bar{N}) \Big|_{x=L} + \int_0^L v K_x A dx \right] = 0 \quad \text{för godtyckligt } v(x) \text{ med } v(0) = 0$$

SVAG FORM $\Leftrightarrow$ STARK FORM

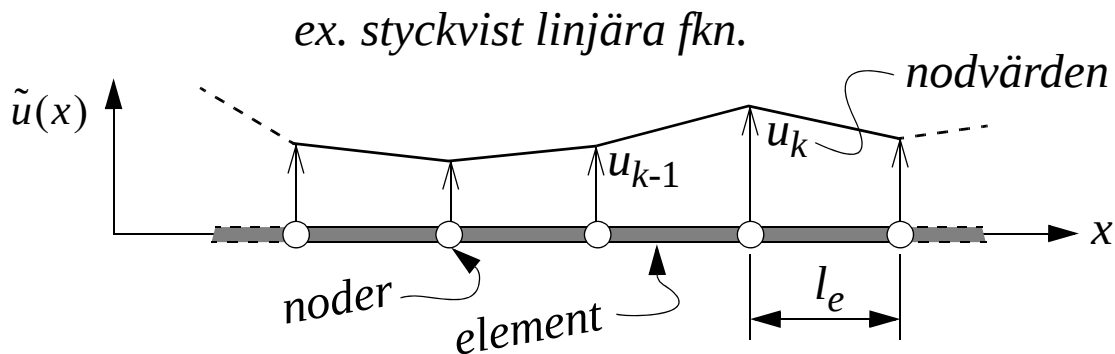
FYSIKALISK TOLKNING = VIRTUELLA ARBETETS PRINCIP

FEM - Approximativ lösning av svag form

Det diskreta FEM-ekvationssystemet resulterar efter val av

- **Approximativ lösningsansats** $\tilde{u}(x)$ (trial functions)
- **Viktfunktion** $v(x)$ (test functions)

I FEM används **styckvisa funktioner**, giltiga i respektive “subdomän”, kallad **element**, som är ihopkopplade via **noder**.



$\tilde{u}(x)$ och $v(x)$ måste uppfylla kraven:

- Kontinuitet** över elementgränser,
- Fullständighet (completeness)**, d.v.s. funktionerna själva samt dess derivator upp till den högsta ordning som uppträder i den svaga formen måste kunna anta konstanta och nollskilda värden.

Kraven (i) och (ii) är nödvändiga villkor för konvergens, d.v.s. att

$$\tilde{u}(x) \rightarrow u(x) \quad \text{då} \quad l_e \rightarrow 0$$

Exempel på giltiga/inte giltiga ansatser i stångexemplet ovan:

$$\tilde{u} = c_0 + c_1 x \Rightarrow \tilde{u}' = c_1 = \text{konst.}, \text{ d.v.s. OK!}$$

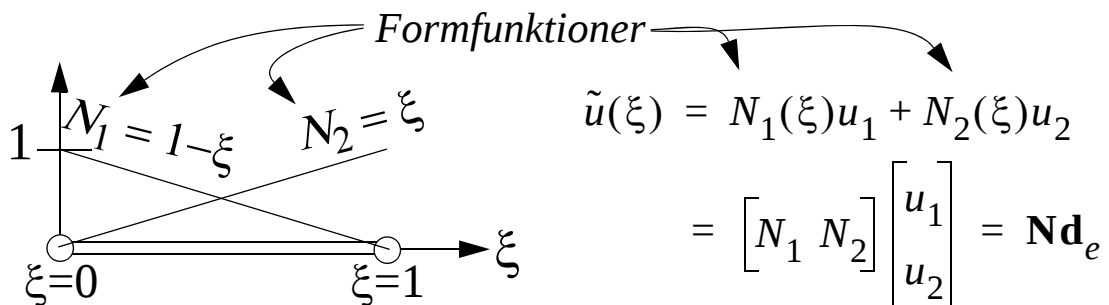
$$\tilde{u} = c_0 + c_2 x^2 \Rightarrow \tilde{u}' = c_2 x = \text{inte konst.}, \text{ d.v.s. INTE OK!}$$

Approximativa ansatsfunktioner

Formuleras m.h.a. **formfunktioner**, N_I , och **nodvärden** för den/de primär/a variabeln/lerna.

En **formfunktion**, vanligtvis ett **polynom**, är en funktion av dimensionslös/a naturlig/a koordinat/er inom varje element.

Ex. enaxligt problem med linjär ansats



För ett element med en ansatsfkn. av ett polynom av gradtal n , behövs $n + 1$ noder, d.v.s. en nod för varje koefficient i polynomet,

vilket ger interpolationen:

$$\tilde{u}(\xi) = \sum_{I=1}^n N_I u_I = \mathbf{N}\mathbf{d}_e$$

Egenskaper hos formfunktioner:

- (i) $N_I(\xi_J) = \delta_{IJ} = \begin{cases} 1 & \text{om } I = J \\ 0 & \text{om } I \neq J \end{cases}$ (gäller ej problem med rotationsfrihetsgrader, t.ex. balkar)
- (ii) $\sum_{I=1}^n N_I = 1$

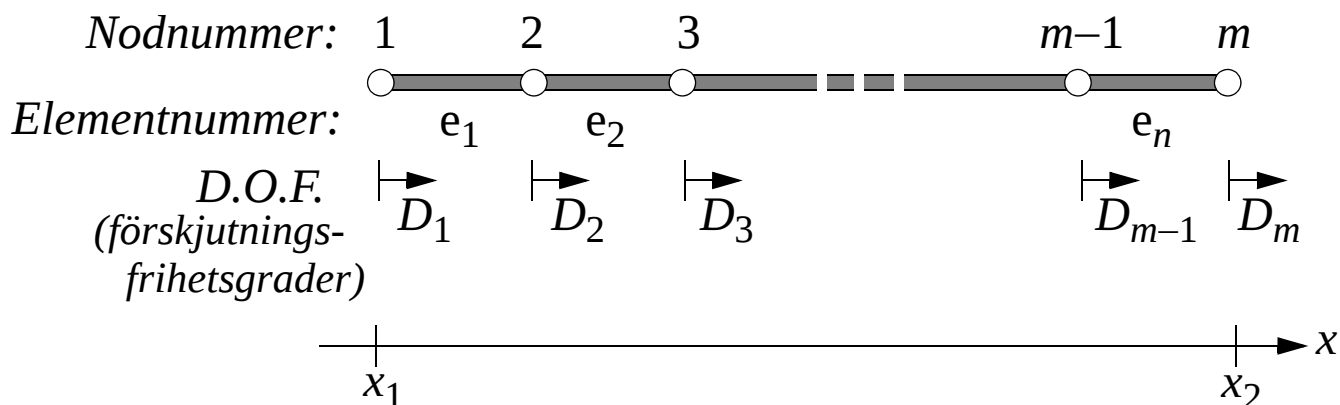
Viktfunktioner $v(x)$:

Välj styckvisa fkn. med samma elementvisa interpolation som för $\tilde{u}$ (**Galerkins metod**).

Ex. enaxligt problem med linjär ansats

$$v(\xi) = N_1(\xi)\beta_1 + N_2(\xi)\beta_2 = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \mathbf{N}\boldsymbol{\beta}_e$$

Globalt—Assemblering av alla n element



Ansatsfkn. & viktfn.

$$\tilde{u} = \mathbf{N}_G \mathbf{D}$$

$$v = \mathbf{N}_G \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{N}_G^T$$

OBS! innehåller formfkn.
för alla element!

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ \vdots \\ D_{m-1} \\ D_m \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_{m-1} \\ \beta_m \end{bmatrix} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\beta}$$

godtyckliga
koefficienter

Derivator: $\frac{d\tilde{u}}{dx} = \frac{d\mathbf{N}_G}{dx} \mathbf{D} = \mathbf{B}_G \mathbf{D} \quad \frac{dv}{dx} = \boldsymbol{\beta}^T \frac{d\mathbf{N}_G^T}{dx} = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{B}_G^T$

Insatt i den svaga formen ger **FEM-ekvationen**

$$\boldsymbol{\beta}^T \left\{ \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{B}_G^T E \mathbf{B}_G A dx \right\} \mathbf{D} - \left\{ [\mathbf{N}_G^T \bar{\mathbf{N}}]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{N}_G^T K_x A dx \right\} = 0$$

$\mathbf{K}$ $\mathbf{F}$

styvhetsmatrix extern lastvektor

Global förskjutningsvektor

Detta kan uttryckas som

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{ekv. 1} \\ \text{ekv. 2} \\ \vdots \\ \text{ekv. } m \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{array}{l} m \text{ st. ekvationer} \\ \text{för } m \text{ st. obekanta!} \end{array}$$

Då β_i är godtyckliga, måste alla ekvationer vara lika med noll, alltså:

$$[\mathbf{KD} - \mathbf{F}] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{KD} = \mathbf{F}$$

I praktiken räknas $\mathbf{K}$ och $\mathbf{F}$ ut genom *elementvis integration*, d.v.s.

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_{x_1^1}^{x_2^1} \mathbf{B}^T E A B dx + \dots + \int_{x_1^n}^{x_2^n} \mathbf{B}^T E A B dx = \\ &= \sum_{e=1}^n \left[\int_0^1 \mathbf{B}^T E A B l_e d\xi \right]_e = \sum_{e=1}^n \mathbf{K}_e \\ \mathbf{F} &= \sum_{e=1}^n \left[\int_0^1 \mathbf{N}^T K_x A l_e d\xi \right]_e + \mathbf{F}_s = \sum_{e=1}^n [\mathbf{F}_b]_e + \mathbf{F}_s \end{aligned}$$

Volymkrafter

Punktkrafter verkande
i noder införs här!

Alltså,

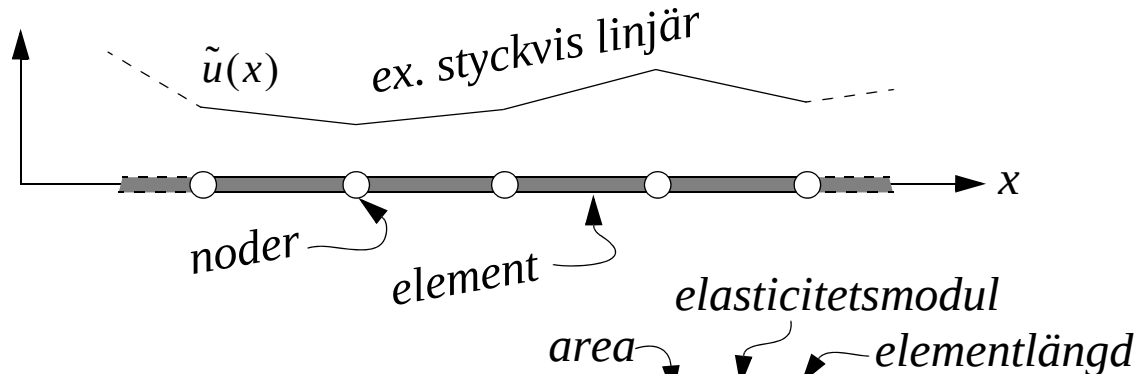
$\mathbf{K}$ erhålls genom summering av alla elementstyvhetmatriser

$\mathbf{F}$ erhålls genom summering av elementlaster plus punktkrafter som angriper direkt i noderna.

Denna summeringsprocedur kallas *assemblering*.

Summaring: FEM-analys av stång (1D)

1. Diskretisering: dela in stången i element & noder och ansätt enkel förskjutningsapproximation i varje element!



2. Ta fram elementmatriser, givet A, E, l_e (konstanter):

Diagram illustrating the element matrix derivation. The element is defined by nodes at $\xi=0$ and $\xi=1$. The shape functions are $N_1 = 1 - \xi$ and $N_2 = \xi$. The displacement $\tilde{u}(x)$ is approximated as $\tilde{u}(x) = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{d}_e$. The strain $\tilde{\epsilon}(x)$ is $\tilde{\epsilon}(x) = \frac{d\tilde{u}}{dx} = \frac{d}{dx} \mathbf{N} \mathbf{d}_e = \underbrace{\begin{bmatrix} -1/l_e & 1/l_e \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \mathbf{d}_e$. The element stiffness matrix $\mathbf{k}_e$ is $\mathbf{k}_e = \int_0^{l_e} \mathbf{B}^T E \mathbf{B} A_e d\xi = \frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. The element load vector $\mathbf{f}_b$ is $\mathbf{f}_b = \int_0^{l_e} \mathbf{N}^T K_x A_e d\xi = \left\{ \begin{array}{l} \text{Exempel:} \\ K_x = q_0 + q_1 \xi \end{array} \right\} = \frac{Al_e}{2} \begin{bmatrix} q_0 + q_1/3 \\ q_0 + 2q_1/3 \end{bmatrix}$.

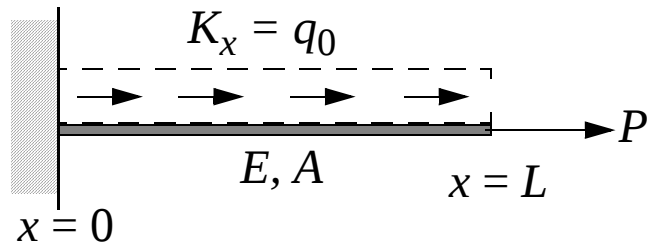
3. Assemblering: Styvhetsmatris & lastvektor

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{K}_e \quad \mathbf{F} = \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_s$$

Punktkrafter verkande i noder

4. Lös Ekv. Systemet: $\mathbf{K} \mathbf{D} = \mathbf{F}$ (inför R.V.)

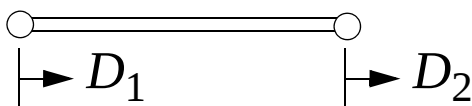
5. Utvärdera resultatet (postprocessing): (t.ex. spänningar)

Exempel:

Exakt lösning:
$$u(x) = \frac{PL}{EA} \cdot \frac{x}{L} + \frac{q_0 L^2}{E} \left(\frac{x}{L} - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right)$$

$$\sigma(x) = E \frac{du}{dx} = \frac{P}{A} + q_0 L \left(1 - \frac{x}{L} \right)$$

FEM lösning (ett linjärt element):



$$\mathbf{K} = \mathbf{k}_e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_b = \frac{ALq_0}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_s = \begin{bmatrix} R \\ P \end{bmatrix}$$

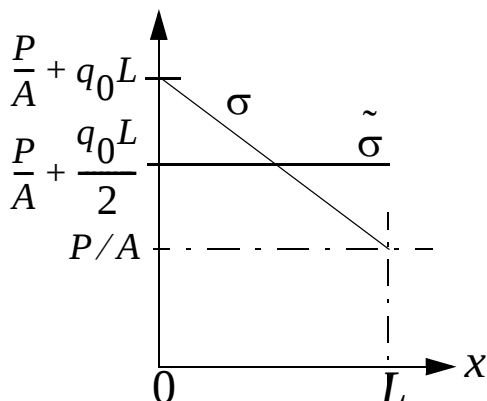
Reaktions-
kraftEkv. system ($D_1 = 0$)

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R + ALq_0/2 \\ P + ALq_0/2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} D_2 \end{bmatrix} = \frac{PL}{EA} + \frac{q_0 L^2}{2E}$$

Ekv. (1)
$$R = \frac{EA}{L}(-D_2) - \frac{ALq_0}{2} = -P - ALq_0$$

Utvärdera resultatet!

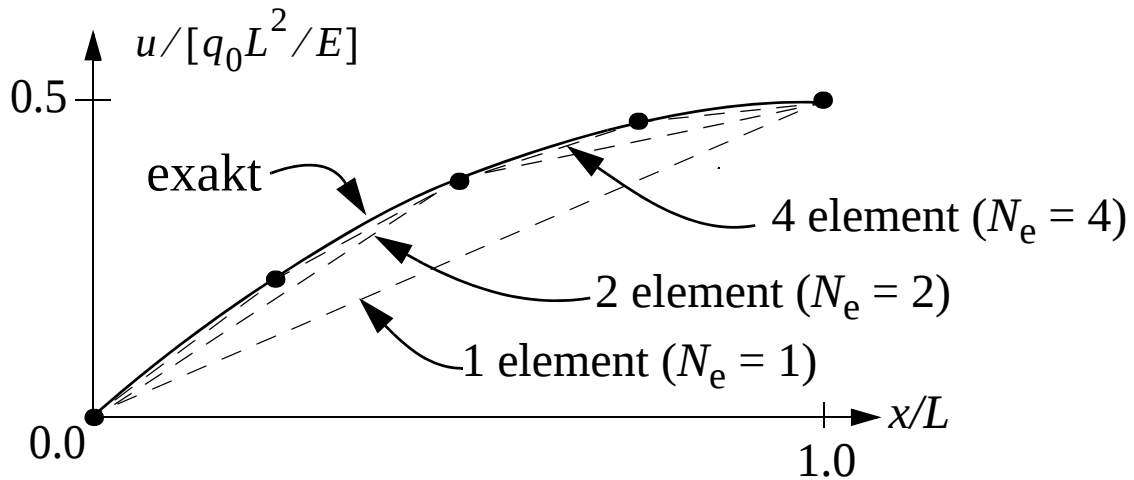
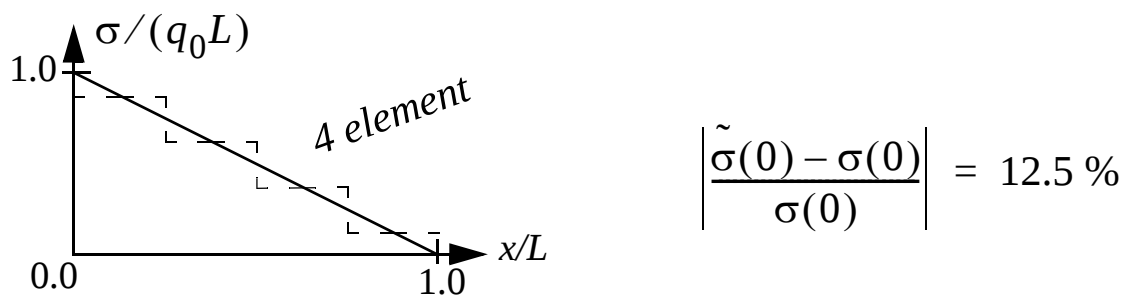
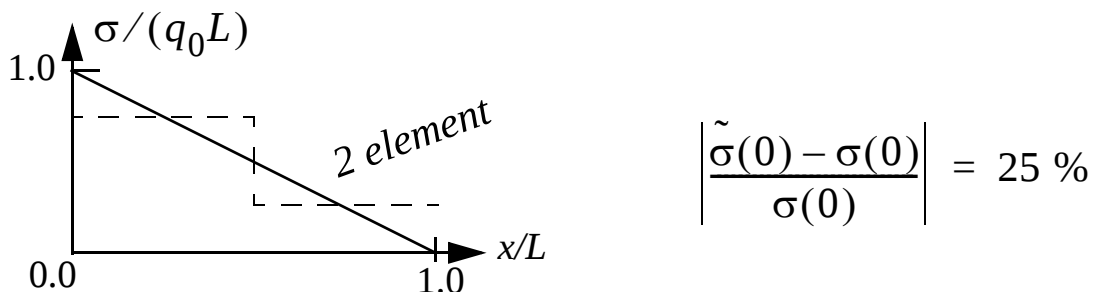
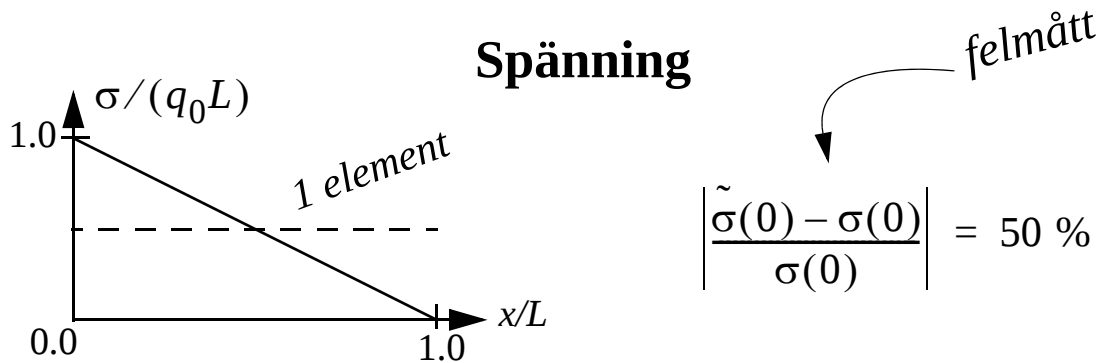
$$\tilde{u}(x) = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = 0 + \frac{x}{L} D_2 = \frac{PLx}{EAL} + \frac{q_0 L^2}{2E} \frac{x}{L}$$



Exakt

Approximativ

$$\tilde{\sigma}(x) = E \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \frac{P}{A} + \frac{q_0 L}{2}$$

Exempel resultat:**Förskjutning****Spänning**Elementlängd $\sim 1/N_e$

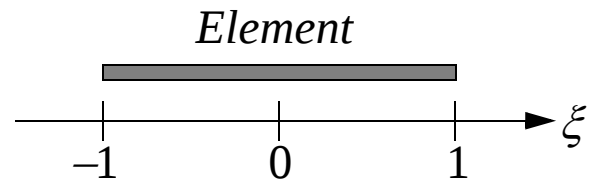
$$fel = \frac{1}{2N_e} \Rightarrow \log(fel) = -\log(2) - 1 \times \log(N_e)$$

“Linjär logaritmisk” **konvergens** i spänning! — en slump?

Högre ordningens (stång)element i 1D

(se LQ sid. 87–88)

Beskriv positionen i elementet med en naturlig koordinat ξ (dimensionslös)



Approximativ förskjutningsansats med polynom av gradtal n

$$\tilde{u}(\xi) = a_0 + a_1\xi + \dots + a_n\xi^n$$

Uttryck m.h.a. nodförskjutningar d_i & tillhörande formfunktioner N_i

För bestämning av de $n + 1$ koeff. a_i krävs $n + 1$ noder

$$\Rightarrow \tilde{u}(\xi) = N_1(\xi)d_1 + \dots + N_{n+1}(\xi)d_{n+1} = \mathbf{N}\mathbf{d}_e$$

Formfunktioner har (i) $N_i(\xi_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

bl.a. egenskaperna:

(se LQ sid. 41–52) (ii) $N_1 + \dots + N_{n+1} = 1$

Lagrangeinterpolation uppfyller dessa egenskaper, d.v.s. formfkn.

för nod k (position $\xi = \xi_k$) kan bestämmas enligt: $N_k = l_k^n(\xi)$

$$l_k^n(\xi) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{i=n+1} \frac{(\xi - \xi_i)}{(\xi_k - \xi_i)} = \frac{(\xi - \xi_1) \dots (\xi - \xi_{k-1})(\xi - \xi_{k+1}) \dots (\xi - \xi_{n+1})}{(\xi_k - \xi_1) \dots (\xi_k - \xi_{k-1})(\xi_k - \xi_{k+1}) \dots (\xi_k - \xi_{n+1})}$$

Exempel: kvadratisk element: $n = 2$ & noder i pkt.: $\xi_k = \{-1, 0, 1\}$

Nod 1 Nod 3 Nod 2

The diagram shows a horizontal line with three nodes marked by circles at $\xi = -1$, $\xi = 0$, and $\xi = 1$. The nodes are labeled "Nod 1", "Nod 3", and "Nod 2" respectively from left to right. The ξ -axis is shown below the line with tick marks at -1, 0, and 1.

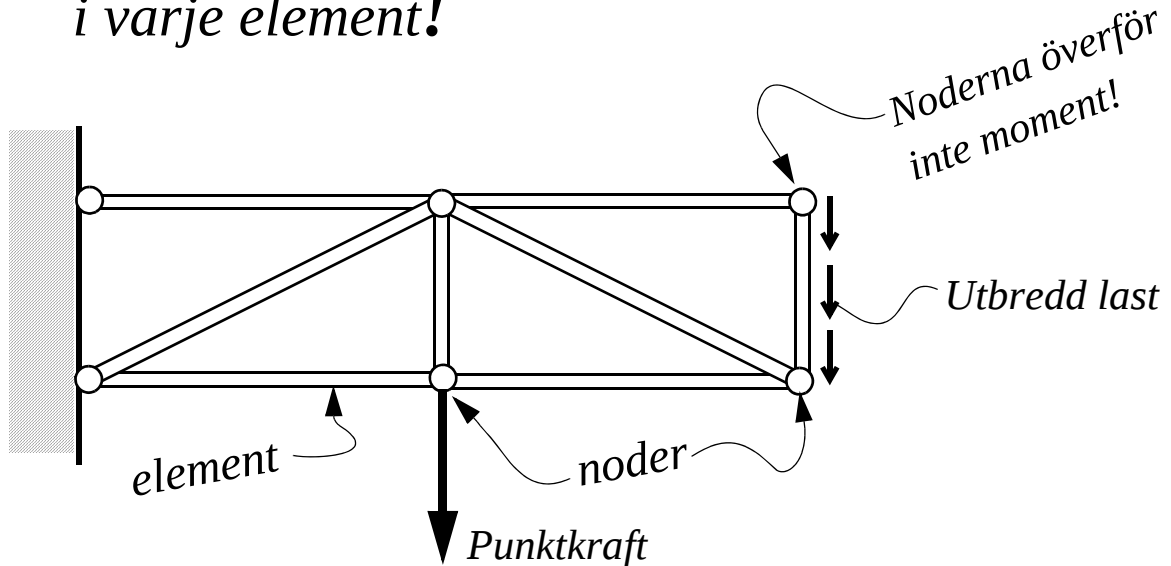
$$N_1 = l_{k=1}^{n=2}(\xi) = \frac{(\xi - 0)(\xi - 1)}{(-1 - 0)(-1 - 1)} = \frac{\xi(\xi - 1)}{2}$$

$$N_2 = l_{k=2}^{n=2}(\xi) = \frac{(\xi - (-1))(\xi - 0)}{(1 - (-1))(1 - 0)} = \frac{\xi(\xi + 1)}{2}$$

$$N_3 = l_{k=3}^{n=2}(\xi) = \frac{(\xi - (-1))(\xi - 1)}{(0 - (-1))(0 - 1)} = 1 - \xi^2$$

Procedur för FEM-analys av fackverk

- 1. Diskretisering:** dela fackverket i element & noder
och ansätt en enkel förskjutningsapproximation
i varje element!



- 2. Ta fram elementmatriser,** givet A , E , l_e (konstanter):

form-funktioner

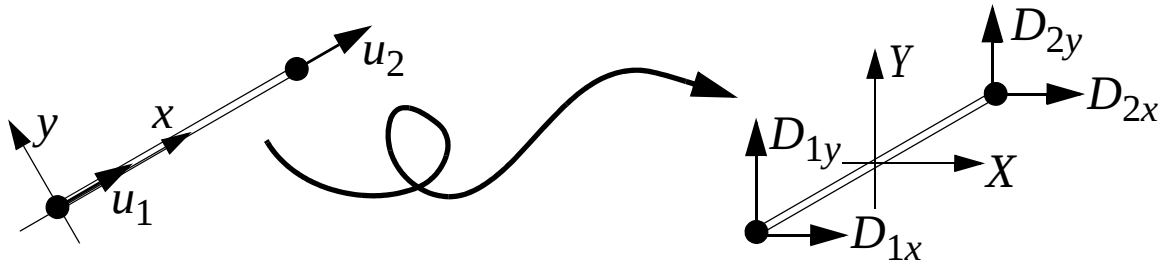
$$\tilde{u}(x) = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{d}_e$$

$$\tilde{\varepsilon}(x) = \frac{d\tilde{u}}{dx} = \frac{d}{dx} \mathbf{N} \mathbf{d}_e = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{l_e} & \frac{1}{l_e} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \mathbf{d}_e$$

$$\mathbf{k}_e = \int_0^1 \mathbf{B}^T E \mathbf{B} A l_e d\xi = \frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_b = \int_0^1 \mathbf{N}^T K_x A l_e d\xi = \left\{ \begin{array}{l} \text{Exempel:} \\ K_x = q_0 + q_1 \xi \end{array} \right\} = \frac{A l_e}{2} \begin{bmatrix} q_0 + q_1/3 \\ q_0 + 2q_1/3 \end{bmatrix}$$

3. Transformation: lokalt $\{x,y\}$ — globalt koord. syst. $\{X,Y\}$



$$\mathbf{d}_e = \mathbf{T} \mathbf{D}_e \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} l_{12} & m_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_{12} & m_{12} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_b = \mathbf{T}^T \mathbf{f}_b$$

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{T}^T \mathbf{k}_e \mathbf{T} = \frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} l_{12}^2 & l_{12}m_{12} & -l_{12}^2 & -l_{12}m_{12} \\ l_{12}m_{12} & m_{12}^2 & -l_{12}m_{12} & -m_{12}^2 \\ -l_{12}^2 & -l_{12}m_{12} & l_{12}^2 & l_{12}m_{12} \\ -l_{12}m_{12} & -m_{12}^2 & l_{12}m_{12} & m_{12}^2 \end{bmatrix}$$

4. Assemblering: Styvhetsmatris & lastvektor

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{K}_e \quad \mathbf{F} = \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_s$$

Punktkrafter verkande i noder

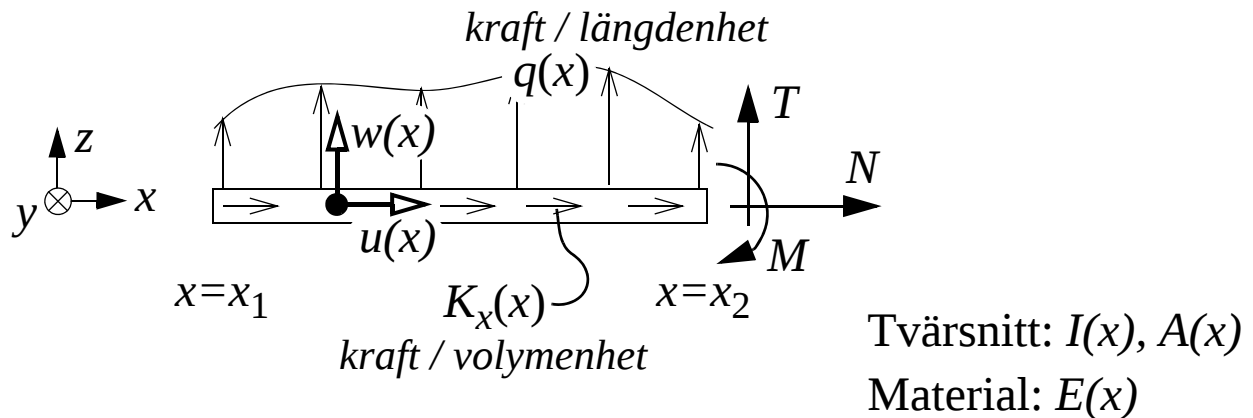
5. Lös Ekv. Systemet: $\mathbf{K} \mathbf{D} = \mathbf{F}$ (inför R.V.)

6. Utvärdera resultatet: (t.ex. spänningar)

$$\tilde{\sigma}(x) = E \tilde{\varepsilon}(x) = E \mathbf{B} \mathbf{d}_e = E \frac{(u_2 - u_1)}{l_e}$$

Föreläsning 8 & 9

FEM-Ekvation för Balkar



Stark form (lokal form):

Jämvikt:

$$T' = -q$$

$$M' = T$$

$$N' = -K_x A$$

“StångEkv”

$$(EAu')' + AK_x = 0$$

Konstitutiva samband:

$$M = -EIw''$$

$$N = EAu'$$

töjning

“BalkEkv”

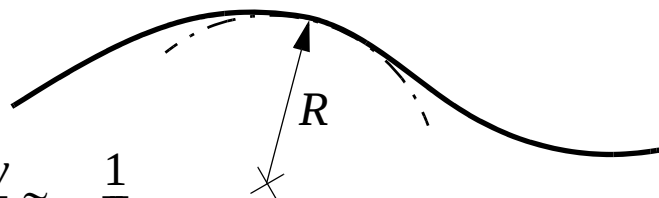
O.D.E.: $(EIw'')'' - q = 0$

Randvillkor:

$$w = \bar{w} \text{ eller } (EIw'')' = -\bar{T}$$

$$w' = \bar{w}' \text{ eller } (EIw'') = -\bar{M}$$

krökning: $w'' = \frac{d^2 w}{dx^2} \approx -\frac{1}{R}$



Kontinuitetsvillkor: utböjningen, $w(x)$, och dess derivata, dw/dx , måste vara kontinuerliga funktioner

Svag form (integralform, variationsform):

1. Multiplicera **O.D.E.** och **R.V.** med en **godtycklig viktfunktion**, $v(x)$, och integrera över balkens längd:

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_{x_1}^{x_2} v(x)[(EIw'')'' - q]dx = 0 & (1a) \\ [v'(x)(\bar{M} + EIw'')] \Big|_{x_{N.R.V}} = 0 & (1b) \\ [v(x)(\bar{T} + (EIw'')')] \Big|_{x_{N.R.V}} = 0 & (1c) \\ \text{Välj } v = 0 \text{ på ränder med väsentliga R.V.} & (1d) \end{cases}$$

2. Partialintegrera första termen i (1a), d.v.s. sänk $w^{iv} \rightarrow w''$

utnyttja att $[vf]_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} [vf]'dx = \int_{x_1}^{x_2} v'f dx + \int_{x_1}^{x_2} vf' dx$

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} v(EIw'')'' dx &= [v(EIw'')']_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} v'(EIw'')' dx \\ &= [v(EIw'')']_{x_1}^{x_2} - \left\{ [v'(EIw'')]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} v''(EIw'') dx \right\} \end{aligned}$$

insatt i (1a) ger

$$\int_{x_1}^{x_2} v''EIw'' dx + \underbrace{[v(EIw'')']_{x_1}^{x_2}}_{v(-\bar{T}) \text{ (1c,d)}} - \underbrace{[v'(EIw'')]_{x_1}^{x_2}}_{v'(-\bar{M}) \text{ (1b,d)}} - \int_{x_1}^{x_2} vq dx = 0$$

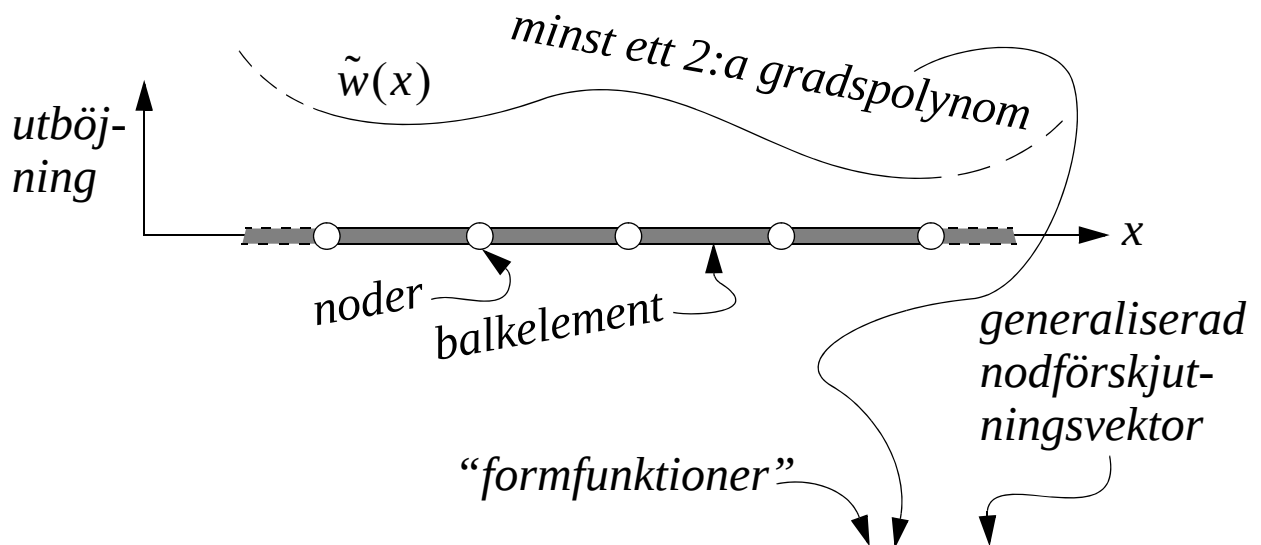
Svag form, definition: Finn $w(x)$ bland alla tillåtna funktioner som satisfierar väsentliga R.V. ($w = \bar{w}$, $w' = \bar{w}'$), så att

$$\int_{x_1}^{x_2} v''EIw'' dx - \left[[v\bar{T}]_{x_1}^{x_2} - [v'\bar{M}]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} vq dx \right] = 0$$

för godtyckligt $v(x)$, med $v = 0$ på ränder med väsentliga R.V.

Alltså, den approximativa ansatsen för balkens utböjning, $w(x)$, och viktfunktionen, $v(x)$, måste vara minst 2 ggr. deriverbara!

FEM-Ekvationer—dela in i element (diskretisering):



Förförskjutningsansats i varje element: $\tilde{w}(x) = \mathbf{N}(x)\mathbf{d}_e$

Viktfunktion (Galerkin): $v(x) = \mathbf{N}(x)\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{N}^T(x)$
 godtycklig
 koefficientvektor

2:a derivator: $\tilde{w}''(x) = \mathbf{N}''\mathbf{d}_e = \mathbf{B}\mathbf{d}_e$

$$v''(x) = \boldsymbol{\beta}^T (\mathbf{N}'')^T = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{B}^T$$

Sätt in $w(x)$ och $v(x)$ i **svag form**:

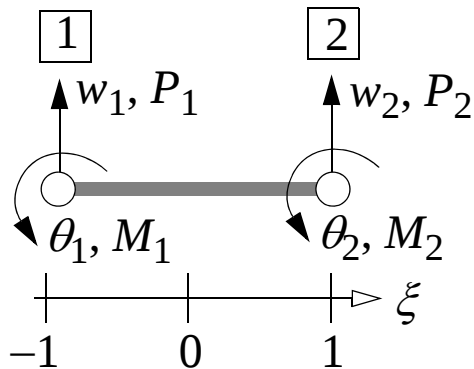
$$\boldsymbol{\beta}^T \left[\left\{ \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{B}^T E I \mathbf{B} dx \right\} \mathbf{d}_e - \left\{ [\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{T}}]_{x_1}^{x_2} - [(\mathbf{N}')^T \bar{\mathbf{M}}]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{N}^T q dx \right\} \right] = 0$$

Men $\boldsymbol{\beta}^T$ är godtycklig $\Rightarrow$ **FEM-Ekv för ett balkelement blir**

$$\underbrace{\left[\int_{x_1}^{x_2} \mathbf{B}^T E I \mathbf{B} dx \right]}_{\substack{\text{Styvhetmatris} \\ n \times n}} \mathbf{d}_e = \underbrace{\left[[\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{T}}]_{x_1}^{x_2} - [(\mathbf{N}')^T \bar{\mathbf{M}}]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{N}^T q dx \right]}_{\substack{\text{Förförskjutningsvektor} \\ n \times 1}} + \underbrace{\left[\int_{x_1}^{x_2} \mathbf{N}^T q dx \right]}_{\substack{\text{Lastvektor} \\ n \times 1}}$$

2-noders balkelement

(3:e-gradspolynom för utböjningen)

Elementlängd: $2a$ Yttröghetsmoment: I Elasticitetsmodul: E

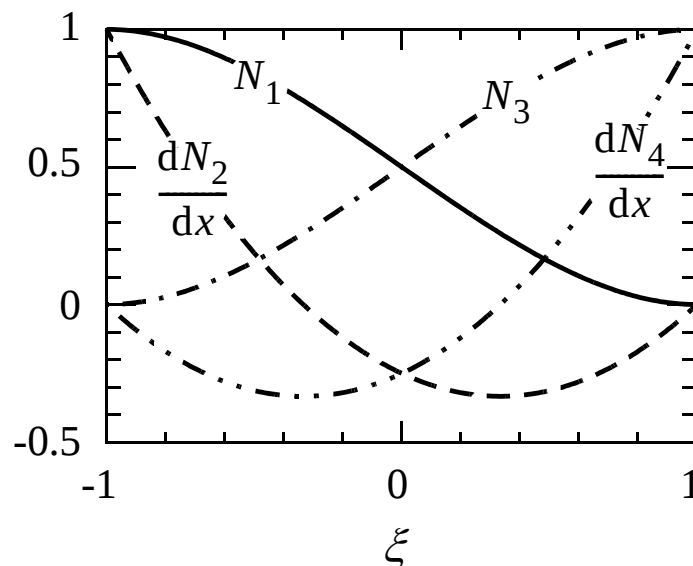
$$\tilde{\mathbf{w}}(\xi) = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1(\xi) & N_2(\xi) & N_3(\xi) & N_4(\xi) \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}(\xi)} \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}_e} \quad \tilde{\theta}(\xi) = \frac{1}{a} \frac{d\mathbf{N}}{d\xi} \mathbf{d}_e$$

Formfunktioner:

$$N_1 = \frac{1}{4}(2 - 3\xi + \xi^3) \quad N_2 = \frac{1}{4}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3)a$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(2 + 3\xi - \xi^3) \quad N_4 = \frac{1}{4}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)a$$

OBS! $N_i(\xi_j) = \begin{cases} 1 & i = j = 1, 3 \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad N'_i(\xi_j) = \begin{cases} 1 & i = j = 2, 4 \\ 0 & i \neq j \end{cases}$



Insatt i svag form ger FEM-Ekv.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{EI}{a^3} \int_{-1}^1 (\mathbf{N}'')^T \mathbf{N}'' d\xi \\ -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}_e} \mathbf{d}_e = \underbrace{\begin{bmatrix} P_1 \\ M_1 \\ P_2 \\ M_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}_s} + a \underbrace{\int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} q(\xi) d\xi}_{\mathbf{f}_b}$$

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{f}_s + \mathbf{f}_b$$

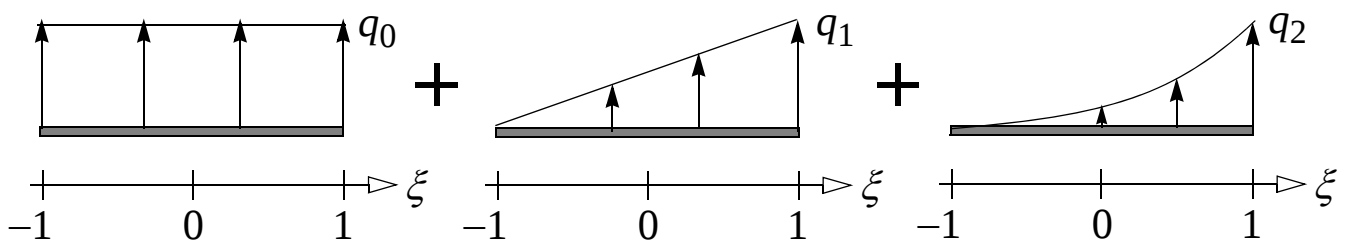
Elementstyvhetismatris:

$$\mathbf{k}_e = \frac{EI}{a^3} \int_{-1}^1 (\mathbf{N}'')^T \mathbf{N}'' d\xi = \frac{EI}{2a^3} \begin{bmatrix} 3 & 3a & -3 & 3a \\ 3a & 4a^2 & -3a & 2a^2 \\ -3 & -3a & 3 & -3a \\ 3a & 2a^2 & -3a & 4a^2 \end{bmatrix}$$

Elementlastvektorn, bidrag från utbredd last:

$$\mathbf{f}_b = a \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T q(\xi) d\xi = a \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1(\xi) \\ N_2(\xi) \\ N_3(\xi) \\ N_4(\xi) \end{bmatrix} q(\xi) d\xi$$

Exempel:



$$\Rightarrow q(\xi) = q_0 + q_1 \left(\frac{1+\xi}{2} \right) + q_2 \left(\frac{1+\xi}{2} \right)^2$$

Lastvektorn blir: $\mathbf{f}_b = aq_0 \begin{bmatrix} 1 \\ a/3 \\ 1 \\ -a/3 \end{bmatrix} + \frac{aq_1}{30} \begin{bmatrix} 9 \\ 4a \\ 21 \\ -6a \end{bmatrix} + \frac{aq_2}{15} \begin{bmatrix} 2 \\ a \\ 8 \\ -2a \end{bmatrix}$

Labels for the last vector components:
 - Top component (2): kraft
 - Second component (a): moment
 - Third component (8): kraft
 - Bottom component (-2a): moment

Repetition**FEM-analys: Beräkningssteg**

1. Diskretisera: inför noder (frihetsgrader) och dela in strukturen i element (*preprocessing*)
2. (a) Ta fram en elementstyvhetsmatris, $\mathbf{k}_e$, och en elementlastvektor, $\mathbf{f}_b$, för varje element
(b) Koordinattransformation: lokalt–globalt

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{T}^T \mathbf{k}_e \mathbf{T}$$

$$\mathbf{F}_b = \mathbf{T}^T \mathbf{f}_b$$

3. Assemblering av alla elements (antal = N_e) styvhetsmatriser & lastvektorer

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{K}_e \quad \mathbf{F} = \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_s$$

Punktkrafter verkande i noder

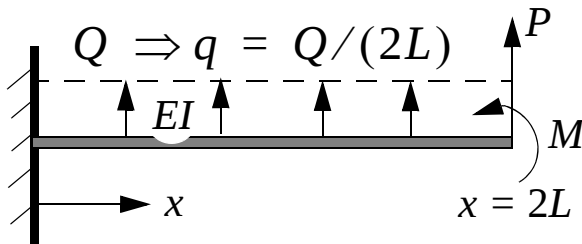
4. Inför randvillkor & lös ekvationssystemet:

$$\mathbf{K}\mathbf{D} = \mathbf{F}$$

5. Utvärdera resultatet (*postprocessing*)

- * Reaktionskrafter, snittstorheter, etc.
- * Spänningar

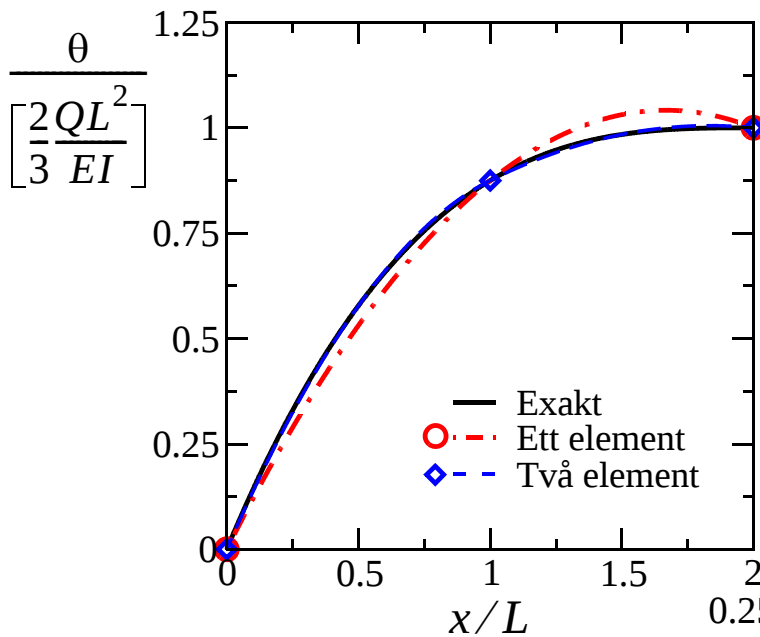
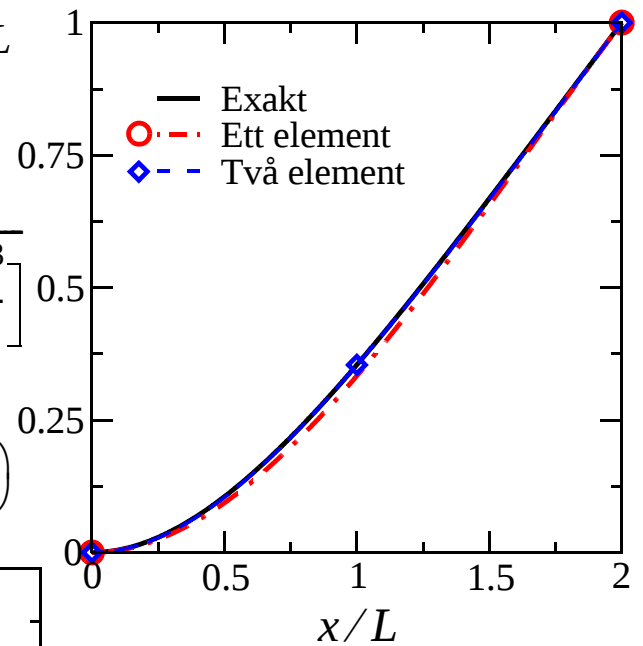
Exempel: konsolbalk



Utböjning:

$$w(x) = \frac{PL^3}{6EI} \left(6 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right) + \frac{ML^2}{2EI} \left(\frac{x}{L} \right)^2 + \frac{OL^3}{EI} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{x}{L} \right)^3 + \frac{1}{48} \left(\frac{x}{L} \right)^4 \right)$$

$$\frac{w}{\left[\frac{QL^3}{EI} \right]}$$

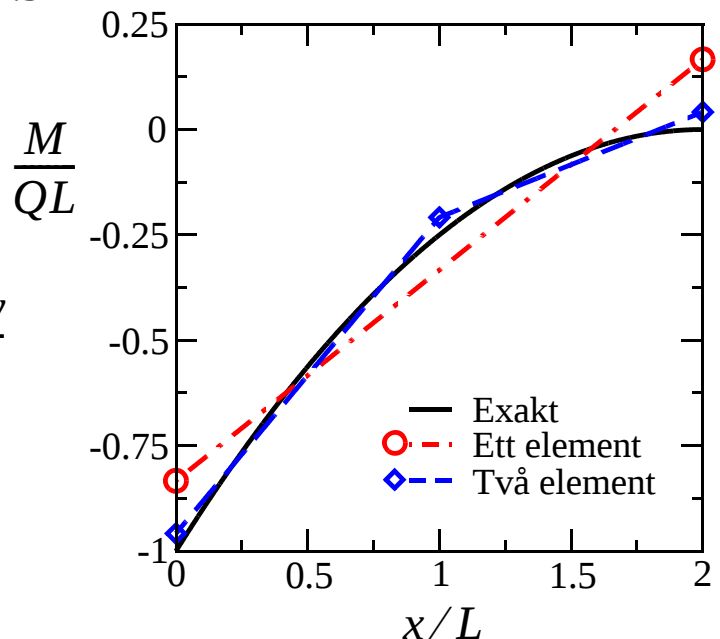


Vinkeländring:

$$\theta(x) = \frac{dw}{dx}$$

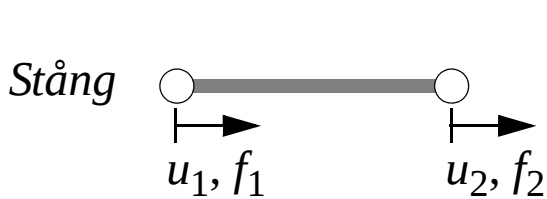
Böjmoment:

$$M(x) = -EI \frac{d^2 w}{dx^2}$$

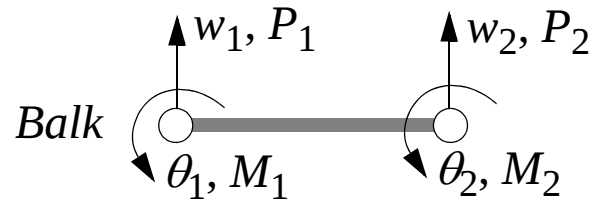


Stång/Balkproblem: Egenskaper hos FEM-lösningar

Betrakta FEM-lösningar baserade på 2-noders element:



$$\mathbf{d}_e^T = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{d}_e^T = \begin{bmatrix} w_1 & \theta_1 & w_2 & \theta_2 \end{bmatrix}$$

För fall med konstanta drag/böjstyvheter (stång: $EA = \text{konstant}$; balk: $EI = \text{konstant}$) kommer nodförskjutningsvektorn vara identiska med den exakta lösningen.

Orsak:

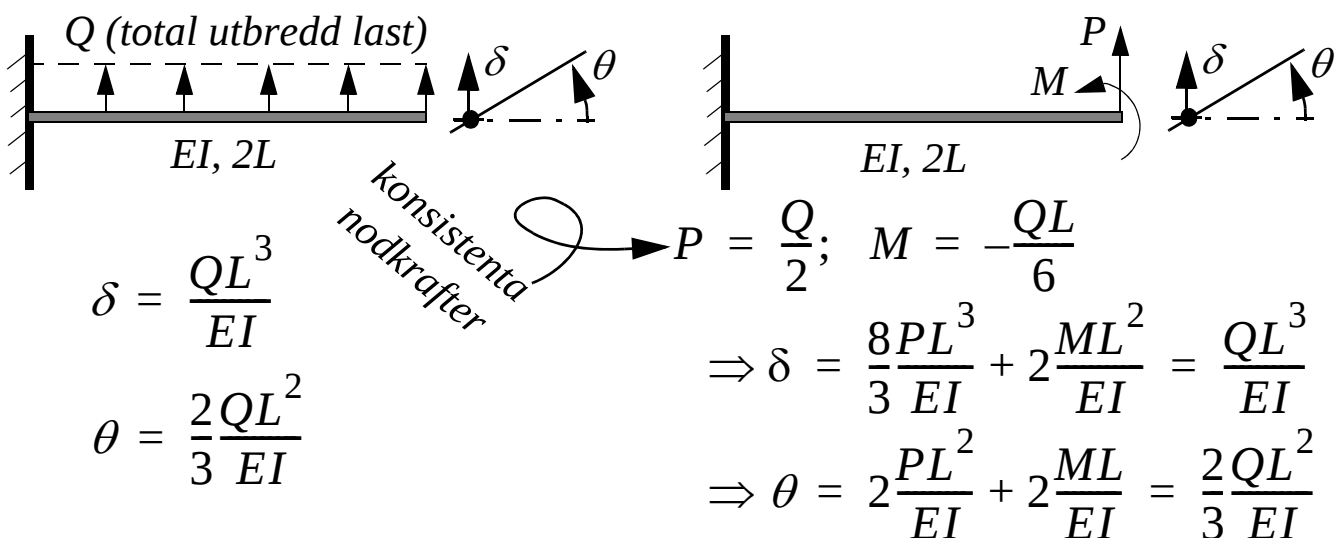
1. De approximativa ansatserna satisfierar de homogena lösningarna till problemens differentialekvationer

$$\text{Stång: } (EAU')' = 0 \Rightarrow u(x) = c_0 + c_1x$$

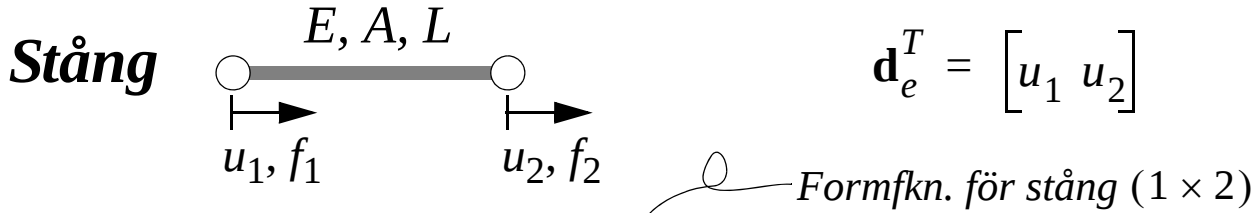
$$\text{Balk: } (EIw'')'' = 0 \Rightarrow w(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$$

2. Utbredd last ersätts med konsistenta nodlaster vilket ger ett helt ekvivalent problem vad gäller nodförskjutningarna

“Ekvivalent Problem”



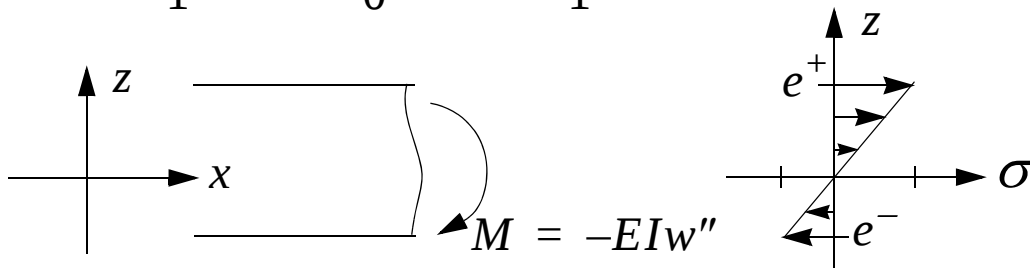
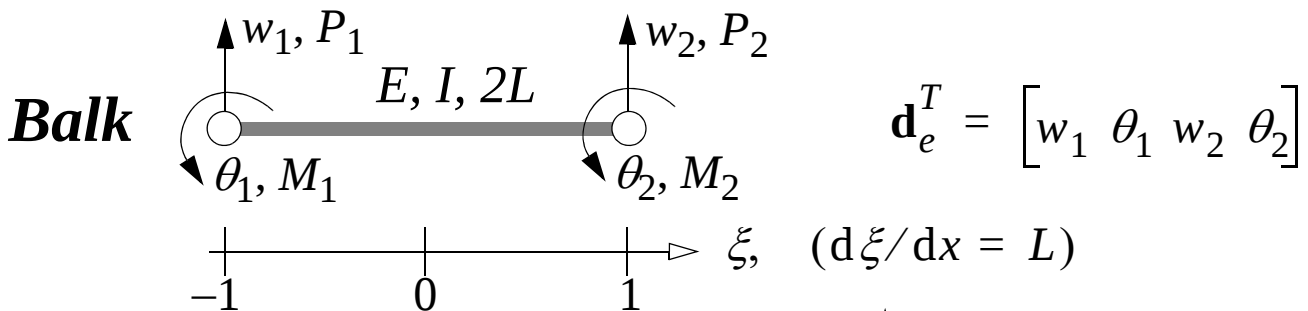
Utvärdering av normalspänning, σ



$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{du}{dx} = E \frac{d}{dx}(\mathbf{N} \mathbf{d}_e) = E \frac{d\mathbf{N}}{dx} \mathbf{d}_e = \mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{d}_e$$

$$\text{där } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \sigma = E(B_1 u_1 + B_2 u_2) = E \left(\frac{u_2 - u_1}{L} \right)$$



Formfkn. för balk (1×4)

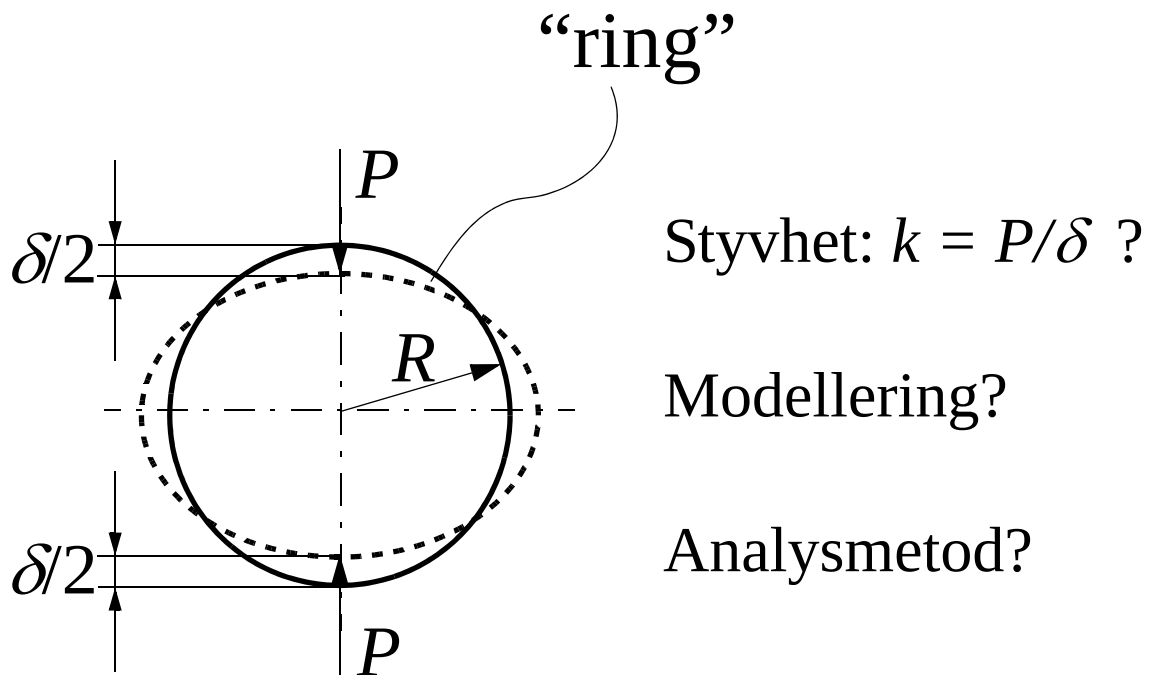
$$\sigma = E\varepsilon = E(-w''z) = -E \left(\frac{d^2 \mathbf{N}}{dx^2} \mathbf{d}_e \right) z = -\mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{d}_e z$$

$$\Rightarrow |\sigma|_{\max} = E e_{\max} |B_1 w_1 + B_2 \theta_1 + B_3 w_2 + B_4 \theta_2|$$

$$\text{där } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3\xi}{2L^2} & \frac{(3\xi-1)}{2L} & \frac{-3\xi}{2L^2} & \frac{(3\xi+1)}{2L} \end{bmatrix}$$

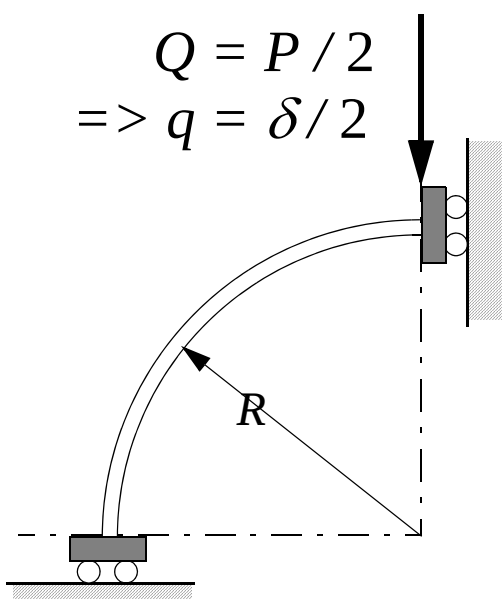
Föreläsning 10

Balkstrukturer-Introduktion



Modellering: utnyttja symmetri!

=> räcker att modellera 1/4-del



Kan t.ex. **analyseras** m.h.a.

1. Energimetod, $\bar{W}(Q)$

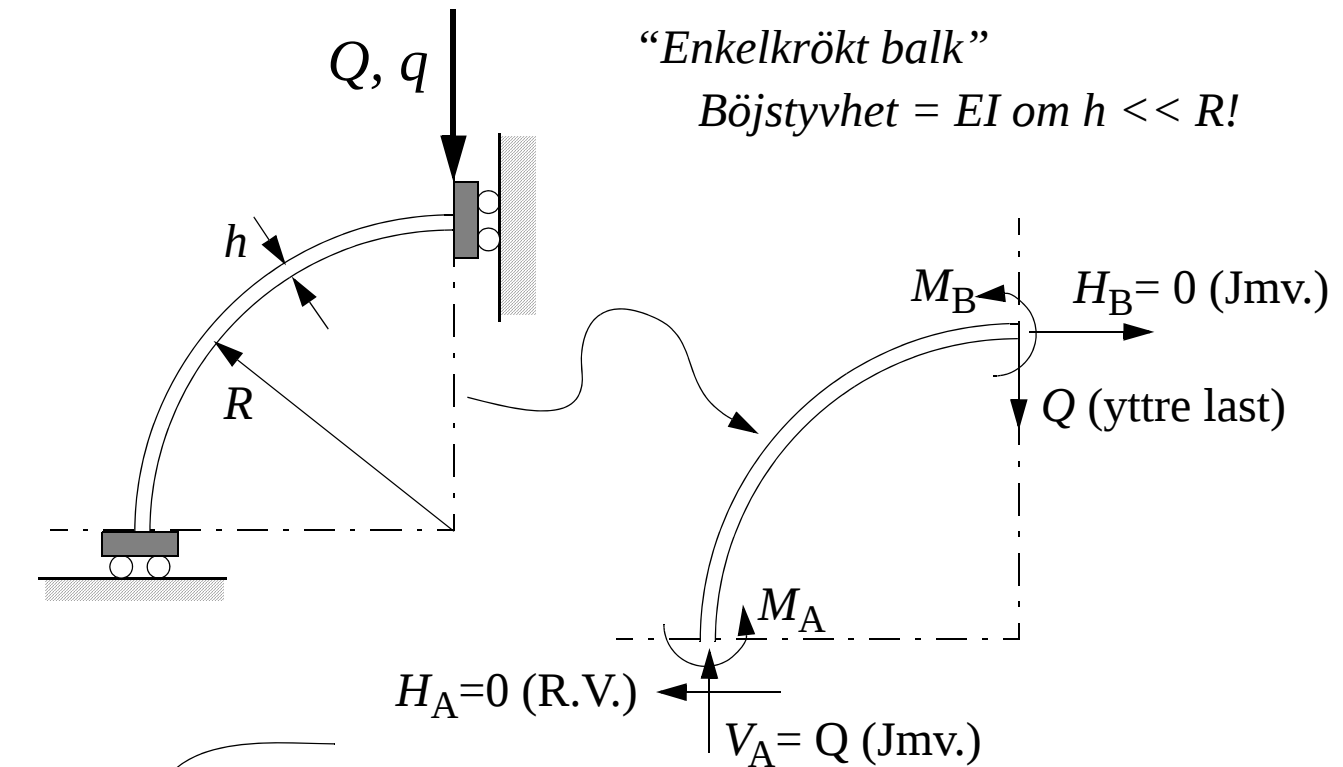
$$\Rightarrow k = \frac{P}{\delta} = \frac{Q}{q} = \frac{Q}{\partial \bar{W} / (\partial Q)}$$

2. FEM: kombinerat balk-stång element med 3 dof/nod

1. Energimetod:

(i) frilägg (för in reaktionskrafter, statiskt obekanta?)

(ii) snitta (ta fram uttryck för momentet s.f.a. läget)



$$\text{Jmv.: } M_A + M_B - QL = 0 \Rightarrow 1 \text{ statiskt obestämd!}$$

$$\text{Jmv.: } M(\varphi) = M_A - QR(1 - \cos(\varphi))$$

Komplementär elastisk energi:

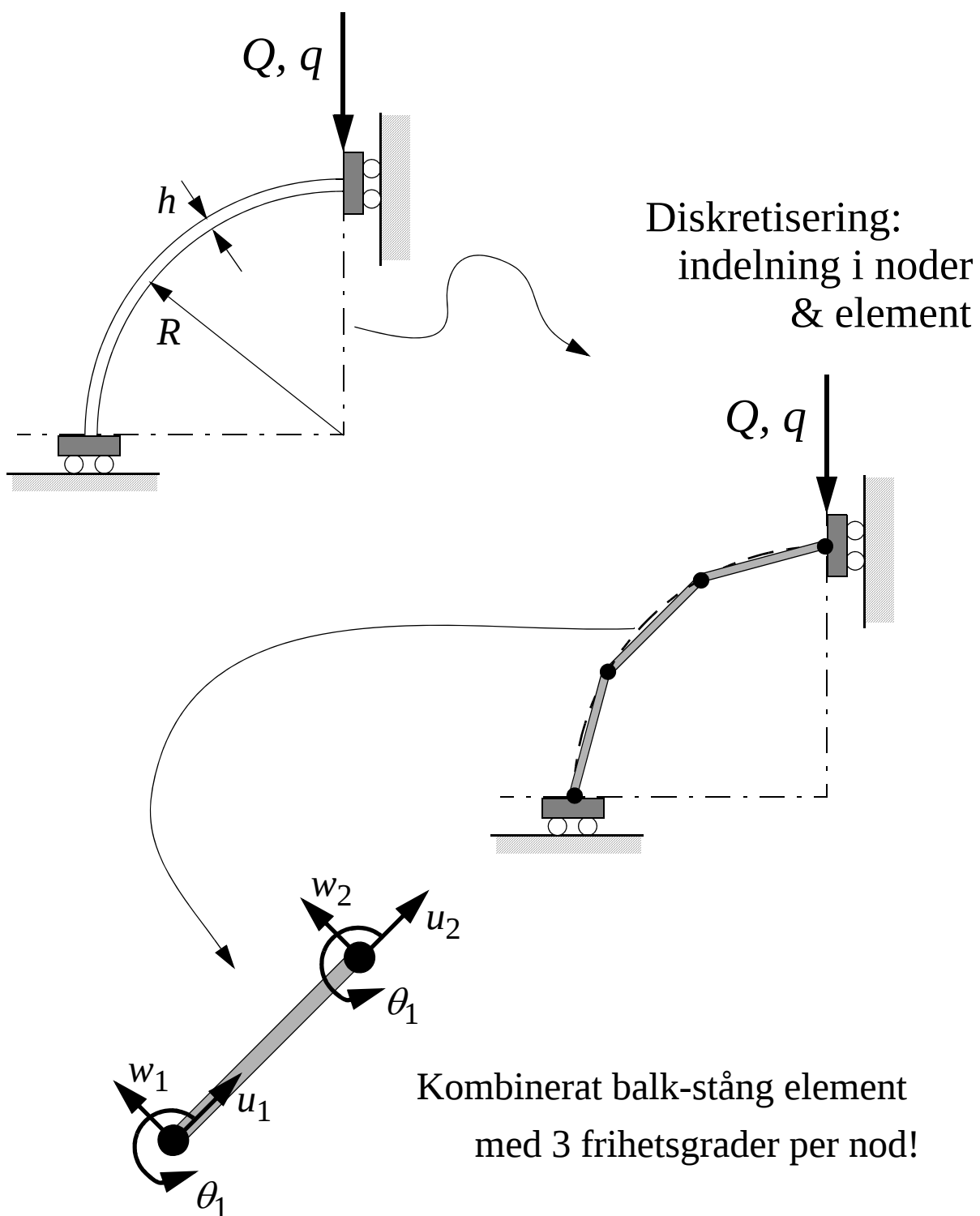
$$\bar{W} = \int_0^{\pi/2} \frac{M(\varphi)^2}{2EI} R d\varphi$$

Castiglianos 2:a sats:

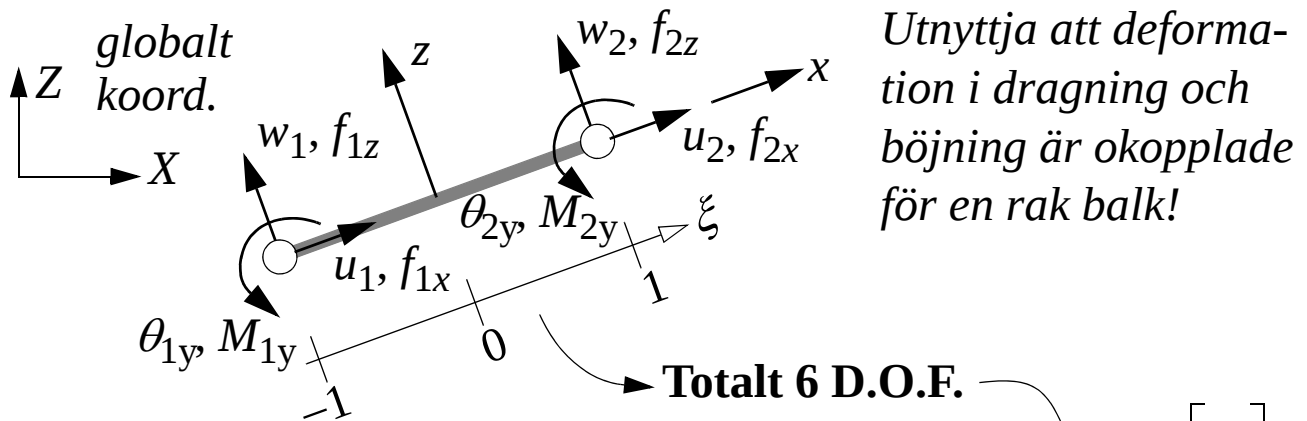
$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial M_A} = 0 \Rightarrow M_A = QR \frac{(\pi - 2)}{\pi}$$

$$q = \frac{\partial \bar{W}}{\partial Q} = \frac{QR^3}{EI} \frac{(\pi^2 - 8)}{8\pi} \Rightarrow k = \frac{q}{Q} = \frac{EI}{R^3} \frac{8\pi}{(\pi^2 - 8)}$$

2. FEM:



1. Ramverk (balkar) i planet (2D)



Böjdeformation:

$$w(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & N_1^b(\xi) & N_2^b(\xi) & 0 & N_3^b(\xi) & N_4^b(\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_{1y} \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_{2y} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_e^b = \frac{EI}{2a^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3a & 0 & -3 & 3a \\ 0 & 3a & 4a^2 & 0 & -3a & 2a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3a & 0 & 3 & -3a \\ 0 & 3a & 2a^2 & 0 & -3a & 4a^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}_e^b = \begin{bmatrix} 0 \\ f_{1z} \\ M_{1y} \\ 0 \\ f_{2z} \\ M_{2y} \end{bmatrix} + a \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 0 \\ N_1^b \\ N_2^b \\ 0 \\ N_3^b \\ N_4^b \end{bmatrix} q(\xi) d\xi$$

Dragdeformation:

$$u(\xi) = \begin{bmatrix} N_1^d(\xi) & 0 & 0 & N_2^d(\xi) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_{1y} \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_{2y} \end{bmatrix}$$

$\begin{matrix} \nearrow & \nearrow \\ (1-\xi)/2 & (1+\xi)/2 \end{matrix}$

$$\mathbf{k}_e^d = \frac{EA}{2a} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}_e^d = \begin{bmatrix} f_{1x} \\ 0 \\ 0 \\ f_{2x} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1^d \\ 0 \\ 0 \\ N_2^d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} K_x(\xi) A(2a) d\xi$$

Totalt erhålls i det lokala koordinatsystemet:

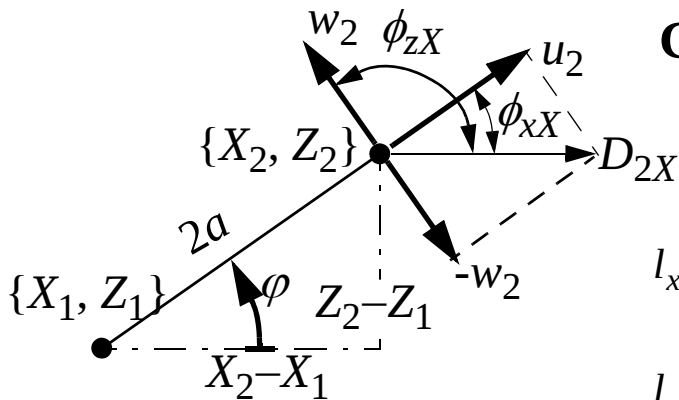
Elementstyvhetsmatris:

$$\mathbf{k}_e = \mathbf{k}_e^d + \mathbf{k}_e^b =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{EA}{2a} & 0 & 0 & -\frac{EA}{2a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{2a} & 0 & 0 & \frac{EA}{2a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{2a^3} & \frac{3EI}{2a^2} & 0 & -\frac{3EI}{2a^3} & \frac{3EI}{2a^2} \\ 0 & \frac{3EI}{2a^2} & \frac{2EI}{a} & 0 & -\frac{3EI}{2a^2} & \frac{EI}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{2a^3} & -\frac{3EI}{2a^2} & 0 & \frac{3EI}{2a^3} & -\frac{3EI}{2a^2} \\ 0 & \frac{3EI}{2a^2} & \frac{EI}{a} & 0 & -\frac{3EI}{2a^2} & \frac{2EI}{a} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{EA}{2a} & 0 & 0 & -\frac{EA}{2a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{2a^3} & \frac{3EI}{2a^2} & 0 & -\frac{3EI}{2a^3} & \frac{3EI}{2a^2} \\ 0 & \frac{3EI}{2a^2} & \frac{2EI}{a} & 0 & -\frac{3EI}{2a^2} & \frac{EI}{a} \\ -\frac{EA}{2a} & 0 & 0 & \frac{EA}{2a} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{2a^3} & -\frac{3EI}{2a^2} & 0 & \frac{3EI}{2a^3} & -\frac{3EI}{2a^2} \\ 0 & \frac{3EI}{2a^2} & \frac{EI}{a} & 0 & -\frac{3EI}{2a^2} & \frac{2EI}{a} \end{bmatrix}$$

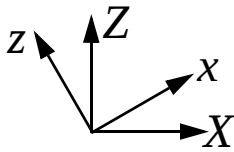
Elementlastvektor: $\mathbf{f}_e = \mathbf{f}_e^d + \mathbf{f}_e^b$

Transformation: lokalt $\rightarrow$ globalt koordinatsystem (2D)**Givet D_{2X} , bestäm u_2 och w_2 :**

$$l_x = \cos \phi_{xX} = \frac{X_2 - X_1}{2a} = \cos \phi$$

$$l_z = \cos \phi_{zX} = -\frac{Z_2 - Z_1}{2a} = -\sin \phi$$

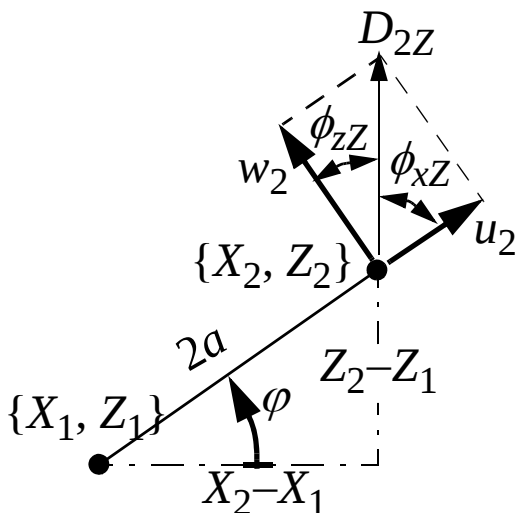
$$\Rightarrow u_2 = D_{2X} l_x, \quad w_2 = D_{2X} l_z$$

**Givet D_{2Z} , bestäm u_2 och w_2 :**

$$m_x = \cos \phi_{xZ} = \frac{Z_2 - Z_1}{2a} = \sin \phi$$

$$m_z = \cos \phi_{zZ} = \frac{X_2 - X_1}{2a} = \cos \phi$$

$$\Rightarrow u_2 = D_{2Z} m_x, \quad w_2 = D_{2Z} m_z$$

**Totalt fås**

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{2X} l_x + D_{2Z} m_x \\ D_{2X} l_z + D_{2Z} m_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_x & m_x \\ l_z & m_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{2X} \\ D_{2Z} \end{bmatrix}$$

Med rotation $(\theta_{2y} = \theta_{2Y})$

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ w_2 \\ \theta_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_x & m_x & 0 \\ l_z & m_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{2X} \\ D_{2Z} \\ \theta_{2Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{2X} \\ D_{2Z} \\ \theta_{2Y} \end{bmatrix}$$

Med båda noderna

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_{1y} \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_x & m_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_z & m_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_x & m_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_z & m_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{1X} \\ D_{1Z} \\ \theta_{1Z} \\ D_{2X} \\ D_{2Z} \\ \theta_{2Z} \end{bmatrix} = \mathbf{T} \mathbf{D}_e; \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_2 \end{bmatrix}$$

2D –Transformationsmatrisen är ortogonal

$$\mathbf{T} \mathbf{T}^T = \mathbf{T}^T \mathbf{T} = \mathbf{I} \quad \text{enhetsmatris, dimension } 6 \times 6$$

Ekvationer i globala koordinatsystemet (2D)

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{d}_e &= \mathbf{T} \mathbf{D}_e \\ \mathbf{f}_e &= \mathbf{k}_e \mathbf{d}_e \\ \mathbf{F}_e &= \mathbf{T}^T \mathbf{f}_e \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{f}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{T} \mathbf{D}_e \left. \begin{aligned} &\Rightarrow \mathbf{F}_e = \underbrace{\mathbf{T}^T \mathbf{k}_e \mathbf{T}}_{\mathbf{K}_e} \mathbf{D}_e \end{aligned} \right\}$$

*Elementstyvhetshetsmatris i
lokalt koordinatsystem*
*Elementstyvhetshetsmatris i
globalt koordinatsystem*

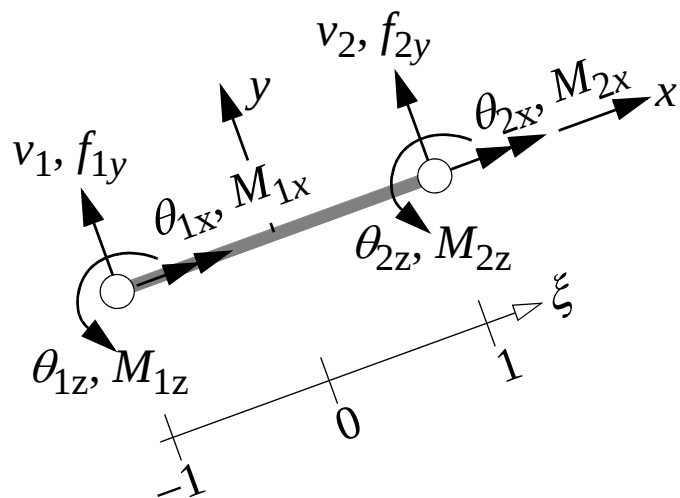
$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{F}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{D}_e}$$

2. Ramverk i rymden (3D)

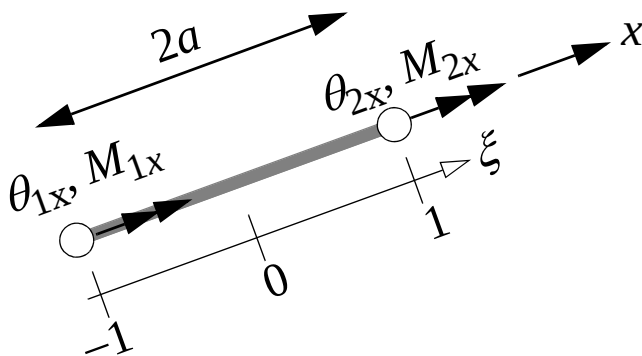
- Antag att huvudaxlarna för balkens yttröghetsmoment ligger orienterade längs den lokala y - respektive z -axeln. Bøjdeformationerna $\{w(x), v(x)\}$ blir för ett sådant fall okopplade.
- I rymden tillkommer **bøjning kring z -axeln** $\{v_1, \theta_{1z}, v_2, \theta_{2z}\}$ samt **vridning kring x -axeln** $\{\theta_{1x}, \theta_{2x}\}$, d.v.s. 6 D.O.F tillkommer. Totala antalet frihetsgrader (D.O.F.) i elementet blir **12**.
- Låt yttröghetsmomenten kring y -axeln respektive z -axeln ges av I_y respektive I_z

Bøjning kring
 z -axeln:

(helt analogt med
bøjning kring y -axeln)



Vridning kring x -axeln är okopplad från all annan deformation!



Vridanalysen är helt analog
med den axiella analysen!

$$\theta_x(\xi) = \begin{bmatrix} \underbrace{\frac{(1-\xi)}{2}}_{N_1^v(\xi)} & \underbrace{\frac{(1+\xi)}{2}}_{N_2^v(\xi)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{1x} \\ \theta_{2x} \end{bmatrix}$$

Samband mellan vinkeländring
och vridande moment:

$$\theta_{2x} - \theta_{1x} = \frac{2a}{GK} M_{2x}$$

Skjuvmodul

Vridstyvhets
tvärsnittsfaktor

lokal element-
styvhetsmatris

$$\mathbf{k}_e^v = \frac{GK}{2a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Total elementstyvhetsmatris i lokalt xyz-koordinatsyst. (3D)

$$\mathbf{d}_e^T = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & \theta_{1x} & \theta_{1y} & \theta_{1z} & u_2 & v_2 & w_2 & \theta_{2x} & \theta_{2y} & \theta_{2z} \end{bmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$

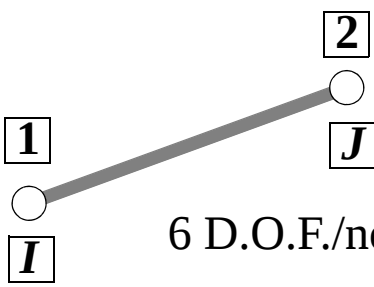
$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{2a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{2a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{3EI_z}{2a^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{3EI_z}{2a^2} & 0 & -\frac{3EI_z}{2a^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{3EI_z}{2a^2} \\ & & \frac{3EI_y}{2a^3} & 0 & -\frac{3EI_y}{2a^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{3EI_y}{2a^3} & 0 & -\frac{3EI_y}{2a^2} & 0 \\ & & & \frac{GK}{2a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GK}{2a} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{2EI_y}{a} & 0 & 0 & 0 & \frac{3EI_y}{2a^2} & 0 & \frac{EI_y}{a} & 0 \\ & & & & & \frac{2EI_z}{a} & 0 & -\frac{3EI_z}{2a^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{EI_z}{a} \\ & & & & & & \frac{EA}{2a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & \frac{3EI_z}{2a^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{3EI_z}{2a^2} \\ & & & & & & & & \frac{3EI_y}{2a^3} & 0 & \frac{3EI_y}{2a^2} & 0 \\ & & & & & & & & & \frac{GK}{2a} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & \frac{2EI_y}{a} & 0 \\ & & & & & & & & & & & \frac{2EI_z}{a} \end{bmatrix}$$

SYMMETRISK

OBS! en variant av matrisen finns i FS i hållfasthetslära, sid. 227

Transformation: lokalt $\rightarrow$ globalt koordinatsystem (3D)

$$\mathbf{d}_e = \mathbf{T} \mathbf{D}_e$$



6 D.O.F./nod
12 D.O.F. totalt

$$\mathbf{d}_e = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \theta_{1x} \\ \theta_{1y} \\ \theta_{1z} \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \theta_{2x} \\ \theta_{2y} \\ \theta_{2z} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_e = \begin{bmatrix} D_{1X} \\ D_{1Y} \\ D_{1Z} \\ \theta_{1X} \\ \theta_{1Y} \\ \theta_{1Z} \\ D_{2X} \\ D_{2Y} \\ D_{2Z} \\ \theta_{2X} \\ \theta_{2Y} \\ \theta_{2Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{6I-5} \\ D_{6I-4} \\ D_{6I-3} \\ D_{6I-2} \\ D_{6I-1} \\ D_{6I} \\ D_{6J-5} \\ D_{6J-4} \\ D_{6J-3} \\ D_{6J-2} \\ D_{6J-1} \\ D_{6J} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix}$$

riktningscosiner

3D –Transformationsmatrisen är ortogonal

$$\mathbf{T} \mathbf{T}^T = \mathbf{T}^T \mathbf{T} = \mathbf{I} \quad \text{enhetsmatris, dimension } 12 \times 12$$

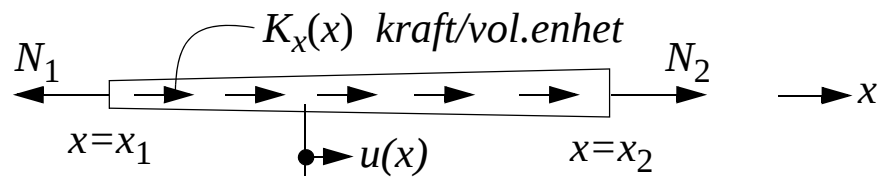
Ekvationer i globala koordinatsystemet (3D)

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{d}_e &= \mathbf{T} \mathbf{D}_e \\ \mathbf{f}_e &= \mathbf{k}_e \mathbf{d}_e \\ \mathbf{F}_e &= \mathbf{T}^T \mathbf{f}_e \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{F}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{D}_e$$

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{T}^T \mathbf{k}_e \mathbf{T}$$

Fö. 11: FEM-Ek. för Solider (kontinuum)

1D:

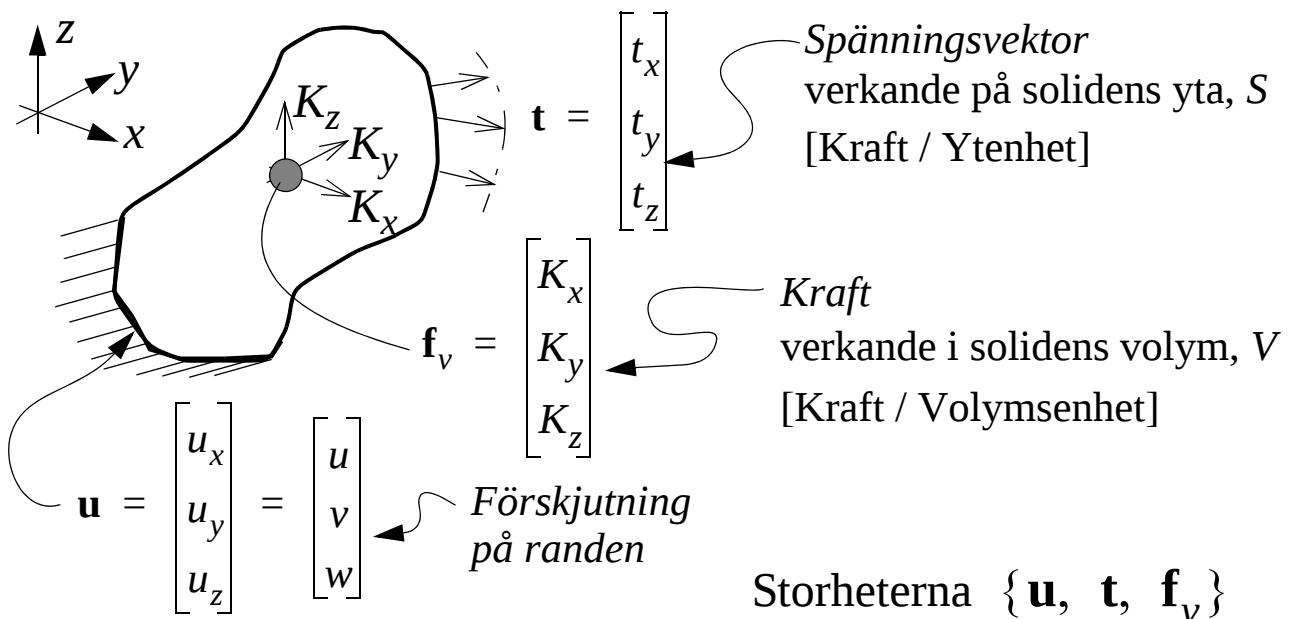


Svag form $\Leftrightarrow$ Virtuella Arbetets Princip

Viktfunktionen $v(x) \rightarrow \delta u(x)$ Störning från jämviktsläge
(virtuell förskjutning)

$$\underbrace{\int_V \delta \varepsilon \sigma dV}_{\text{Inre}} = \underbrace{\left[\delta u N \right]_{x_1}^{x_2} + \int_V \delta u K_x dV}_{\text{Yttre}} = \delta W' \text{ (töjningsenergi / volymsenhet)}$$

3D:



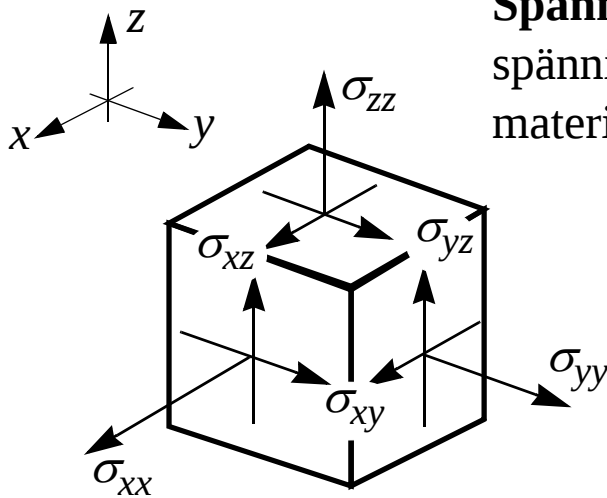
är alla funktioner av x, y, z

Virtuella Arbetets Princip i 3D:

$$\underbrace{\int_V \delta W' dV}_{\text{Inre Virt. Arb.}} = \underbrace{\int_S \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} dS + \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}_v dV}_{\text{Yttre Virt. Arb.}}$$

skalärprodukter

Fleraxliga spännings- & töjningstillstånd:



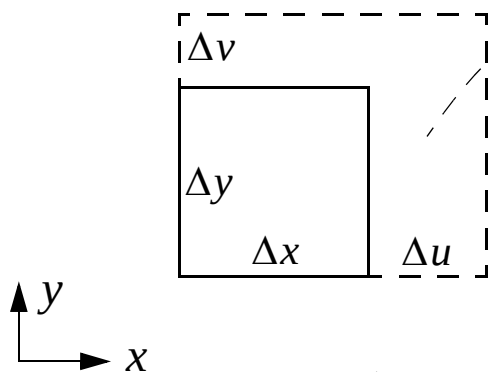
Spänningsmatrisen anger
spänningstillståndet i en
materiell punkt

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

vektorform

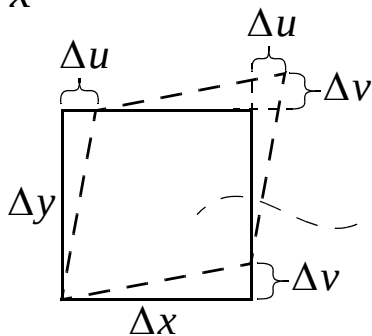
$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix}$$

Normaltöjningar (volymändring):



$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

Skjuvtöjningar (enbart formändring):



$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

Lagrade i vektorform: $\boldsymbol{\epsilon}^T = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{zz} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} & \gamma_{yz} \end{bmatrix}$

Ändring (virtuell) av töjningsenergi / volymsenhet

$$\delta W' = \delta \epsilon_{xx} \sigma_{xx} + \delta \epsilon_{yy} \sigma_{yy} + \delta \epsilon_{zz} \sigma_{zz} + \delta \gamma_{xy} \sigma_{xy} + \delta \gamma_{xz} \sigma_{xz} + \delta \gamma_{yz} \sigma_{yz}$$

$$\Rightarrow \delta W' = \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma}$$

Konstitutivt samband—linjärt elastiskt material

1D: $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ alternativt $\sigma = E\varepsilon$ *Elasticitetsmodul*

3D: Exempel: linjärt elastiskt isotropt material

$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}))$ $\varepsilon_{yy} = \dots$ $\varepsilon_{zz} = \dots$ *Poissons tal (tvärkontraktion)*

$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\sigma_{xy}$ $\gamma_{xz} = \frac{1}{G}\sigma_{xz}$ $\gamma_{yz} = \frac{1}{G}\sigma_{yz}$

Skjuvmodul

Matrisform:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}} = \underbrace{\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (C_{11}-C_{12})/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11}-C_{12})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11}-C_{12})/2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

$C_{11} = \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)}$ $C_{12} = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}$

$\frac{C_{11}-C_{12}}{2} = \frac{E}{2(1+\nu)} = G$

Elastisk styvhetsmatris

Ändring (virtuell) av töjningsenergi / volymsenhet

$$\delta W' = \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} = \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}$$

Kompatibilitet:

(samband mellan töjning & förskjutning):

$$\begin{aligned}
 \text{Töjning: } \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \mathbf{L} \mathbf{u} \\
 &\quad \text{Partiell differentialoperator} \quad \rightarrow \quad \mathbf{L} \quad \mathbf{u}
 \end{aligned}$$

Virtuella Arbetets Princip i 3D kan formuleras som

med

$$\delta W' = \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} = \delta (\mathbf{L} \mathbf{u})^T \mathbf{C} (\mathbf{L} \mathbf{u})$$

erhålls

$$\underbrace{\int_V \delta (\mathbf{L} \mathbf{u})^T \mathbf{C} (\mathbf{L} \mathbf{u}) dV}_{\text{Inre Virt. Arb.}} = \underbrace{\int_S \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} dS + \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}_v dV}_{\text{Yttre Virt. Arb.}}$$

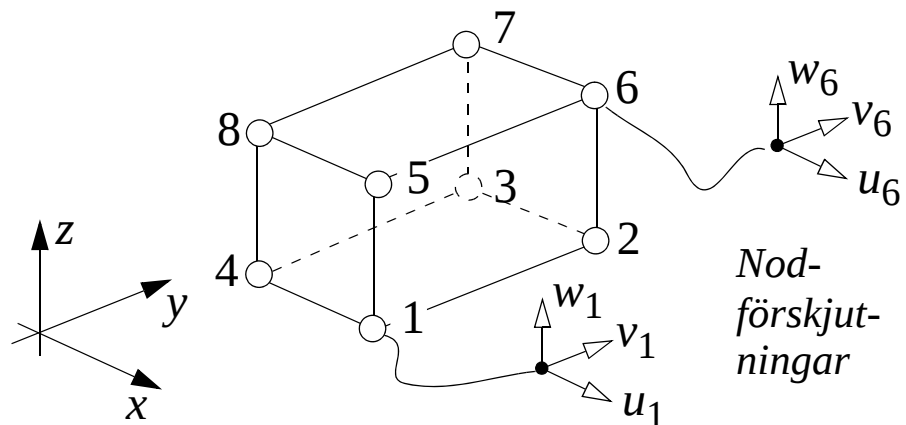
Jämvikt kan också uttryckas med **L**-operatoren!

$$\left. \begin{aligned}
 \text{x-led: } & \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \\
 \text{y-led: } & \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \\
 \text{z-led: } & \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + f_z = 0
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_v = 0$$

Approximativa förskjutningsansatser i 2D/3D

- Dela in soliden i volymelement ($N_e =$ antalet)
- Använd “enkla” förskjutningsansatser i varje element och uttryck dessa m.h.a. **formfunktioner**
- Välj samma **formfunktioner** för förskjutningarna i varje riktning: u , v och w (lämpligt val, dock ej nödvändigt). Om elementet har n_d noder behövs enbart n_d olika **formfunktioner**

Ex. 3D element
med 8 noder
($n_d = 8$)



Förskjutningarna i hela elementet kan uttryckas m.h.a. **noder-
nas förskjutningar** och 8 st. **formfunktioner** enligt:

$$u(x, y, z) = N_1(x, y, z)u_1 + \dots + N_8(x, y, z)u_8$$

$$v(x, y, z) = N_1(x, y, z)v_1 + \dots + N_8(x, y, z)v_8$$

$$w(x, y, z) = N_1(x, y, z)w_1 + \dots + N_8(x, y, z)w_8$$

Förskjutningsvektorn
på matrisform:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underbrace{N_1 \ 0 \ 0}_{\text{Nod 1}} & \underbrace{N_8 \ 0 \ 0}_{\text{Nod 8}} \\ 0 \ N_1 \ 0 & \dots & 0 \ N_8 \ 0 \\ 0 \ 0 \ N_1 & & 0 \ 0 \ N_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ u_8 \\ v_8 \\ w_8 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{N}$
 $3 \times 3n_d = 3 \times 24$

$\left. \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{matrix} \right\} \text{Nod 1}$
 $\mathbf{d}_1$
 $\left. \begin{matrix} u_8 \\ v_8 \\ w_8 \end{matrix} \right\} \text{Nod 8}$
 $\mathbf{d}_8$

$3n_d \times 1 = 24 \times 1$

Elementförskjutningsvektor $\mathbf{d}_e$

Töjningar från approximativ förskjutningsansats:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}}_{\substack{\boldsymbol{\varepsilon} \\ (6 \times 1)}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\mathbf{L} \\ 6 \times 3}} \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}}_{\substack{\mathbf{u} \\ 3 \times 1}} = \mathbf{L} \mathbf{N} \mathbf{d}_e = \\
 &= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \vdots & \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \vdots & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \vdots & 0 & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \vdots & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial z} & \frac{\partial N_8}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \vdots & \frac{\partial N_8}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \vdots & \frac{\partial N_8}{\partial y} & \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\mathbf{B} \\ 6 \times 3n_d = 6 \times 24}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ u_8 \\ v_8 \\ w_8 \end{bmatrix}}_{\substack{\mathbf{d}_e \\ 3n_d \times 1 = 24 \times 1}}
 \end{aligned}$$

Nod 1 . . . Nod 8

Töjningarna kan uttryckas på den kompakta formen

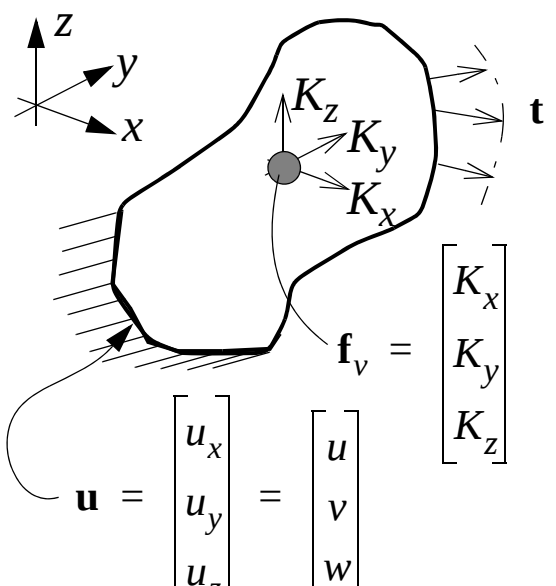
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u} = \mathbf{B} \mathbf{d}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \dots & \mathbf{B}_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{d}_8 \end{bmatrix} = \underbrace{\mathbf{B}_1 \mathbf{d}_1}_{\text{Nod 1}} + \dots + \underbrace{\mathbf{B}_8 \mathbf{d}_8}_{\text{Nod 8}}$$

$\mathbf{d}_1$ $\swarrow$ 3×1

Ändring (virtuell) av töjningarna erhålls som

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T = \delta (\mathbf{L} \mathbf{u})^T = \delta (\mathbf{B} \mathbf{d}_e)^T = \delta \mathbf{d}_e^T \mathbf{B}^T$$

FEM-Ekv. m.h.a. Virtuella Arbetets Princip:



$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}$
 $\mathbf{f}_v = \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{bmatrix}$
 $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$

Inre Virt. Arb.

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} dV =$$

$$= \underbrace{\int_S \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} dS}_{\text{Yttre Virt. Arb.}} + \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}_v dV$$

FEM-Ekv för ett element:

“godtycklig”

$$\delta \mathbf{d}_e^T \left[\int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \right] \mathbf{d}_e = \delta \mathbf{d}_e^T \left[\int_{S_e} \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS + \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{f}_v dV \right]$$

$\Rightarrow \underbrace{\left[\int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \right] \mathbf{d}_e}_{\text{Element-styvhetsmatris} \rightarrow \mathbf{k}_e} = \underbrace{\left[\int_{S_e} \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS \right]}_{\substack{\text{kraft} \\ \text{ytenhet}} \rightarrow \mathbf{f}_s} + \underbrace{\left[\int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{f}_v dV \right]}_{\substack{\text{kraft} \\ \text{volymenhet}} \rightarrow \mathbf{f}_b}$

$\mathbf{f}_s + \mathbf{f}_b \rightarrow \mathbf{f}_e$
Elementlastvektor

FEM-Ekv för hela soliden (summera bidragen från alla element):

Ex. vänsterledet:

$$\int_V () dV = \int_{V_1} () dV + \dots + \int_{V_{N_e}} () dV = \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{k}_e = \mathbf{K}$$

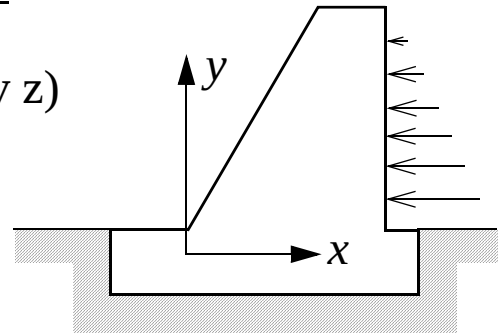
$\mathbf{K}$
Styvhetsmatris för hela soliden

Plana problem (2D)

Plan töjning (“tjocka” strukturer):

$$w = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z}(\quad) = 0 \quad (\text{oberoende av } z)$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$



Stryk kolumn/rad 3, 4 och 5 **C**

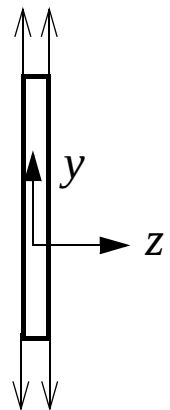
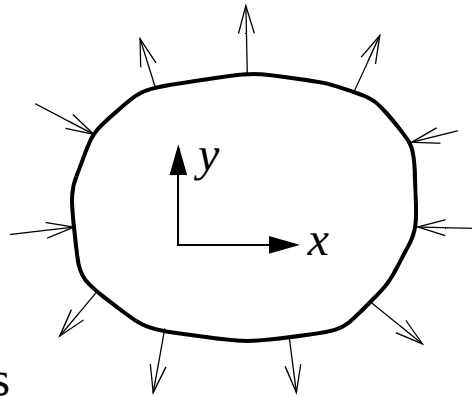
$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Plan spänning (“tunna” strukturer, t.ex. plåtar):

$$\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \mathbf{C}^{-1} \sigma$$

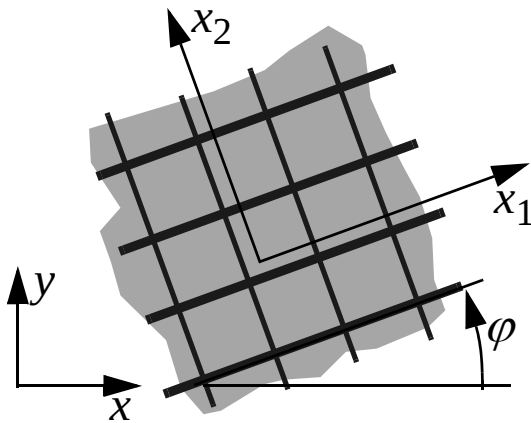
Stryk kolumn/rad 3, 4 och 5 i $\mathbf{C}^{-1}$. Elastiska styvhetsmatrisen för plan spänning fås sedan som inversen till den reducerade $\mathbf{C}^{-1}$ -matrisen.



$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Anisotropa Material

Ex. Ortotrop material—plan spänning (4 mat. par.)



T.ex. en komposit uppbyggd av två vinkelräta set av fibrer:

Två olika elasticitetsmoduler i planet E_1, E_2 och en skjuvmodul G_{12} .

En oberoende parameter som beskriver tvärkontraktionen enligt

$$\nu_{12}/E_1 = \nu_{21}/E_2.$$

(I 3D tillkommer 5 parametrar: E_3, G_{13}, G_{23} och två tvärkontraktionstal)

Beskrivning i det lokala koordinatsystemet x_1-x_2 :

$$\bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{S}} \bar{\sigma}$$

$$\Rightarrow \bar{\sigma} = \bar{\mathbf{C}} \bar{\varepsilon} \quad \text{där} \quad \bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{S}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}$$

Transformation till det globala koordinatsystemet $x-y$:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma} &= \mathbf{L} \sigma \Leftrightarrow \sigma = \mathbf{L}^{-1} \bar{\sigma} \\ \bar{\varepsilon} &= \mathbf{L}^{-T} \varepsilon \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sigma = \mathbf{L}^{-1} \bar{\sigma} = \mathbf{L}^{-1} \bar{\mathbf{C}} \bar{\varepsilon} = \underbrace{\mathbf{L}^{-1} \bar{\mathbf{C}} \mathbf{L}^{-T}}_{\text{Anv. i FEM}} \varepsilon = \mathbf{C} \varepsilon$$

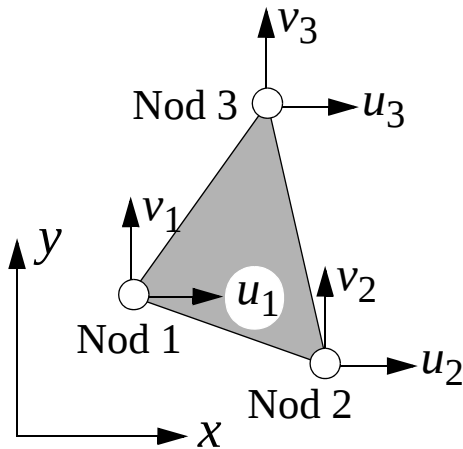
$$\text{där } \mathbf{L} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{L}^{-1} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2cs \\ s^2 & c^2 & 2cs \\ cs & -cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} c &= \cos \varphi \\ s &= \sin \varphi \end{aligned}$$

Se FS. Ek. 1.17, 1.18, 2.21 & 2.22

OBS! I en FEM-analys måste förrutom materialparam.: E_1, E_2, G_{12} & ν_{12} även materialorienteringen, φ , ges som indata.

Fö. 12: FEM-element för plana problem (2D)

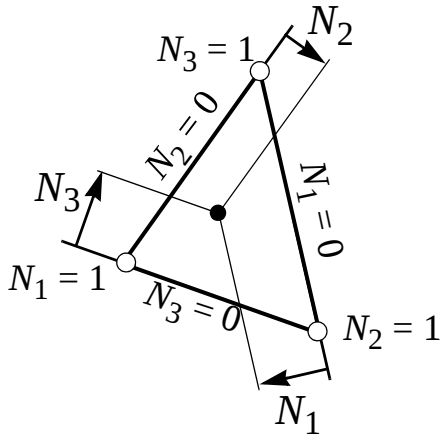
REP. “Constant Strain Triangle”-Element



Förskjutningsansats (linjär):

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}_e}$$

Formfunktioner:



$$N_1 = \frac{1}{2A_e} [y_{23}(x - x_2) + x_{32}(y - y_2)]$$

$$N_2 = \frac{1}{2A_e} [y_{31}(x - x_3) + x_{13}(y - y_3)]$$

$$N_3 = \frac{1}{2A_e} [y_{12}(x - x_1) + x_{21}(y - y_1)]$$

där A_e = elementarea,

$$x_{kl} = x_k - x_l \quad y_{kl} = y_k - y_l$$

Töjning: $\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{L}\mathbf{N}\mathbf{d}_e = \mathbf{B}\mathbf{d}_e$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} \text{Nod 1} & \text{Nod 2} & \text{Nod 3} \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 \\ \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

OBS! konstant matrix

Elementmatriser/vektorer: CST-element

Elementstyvhetsmatris:

$\mathbf{k}_e = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV = \overset{\text{tjocklek}}{h A_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} = h A_e$

6×6

symmetrisk!

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^T \mathbf{C} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_1^T \mathbf{C} \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_1^T \mathbf{C} \mathbf{B}_3 \\ \mathbf{B}_2^T \mathbf{C} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2^T \mathbf{C} \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_2^T \mathbf{C} \mathbf{B}_3 \\ \mathbf{B}_3^T \mathbf{C} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_3^T \mathbf{C} \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3^T \mathbf{C} \mathbf{B}_3 \end{bmatrix}$$

2×2

Elastiska styvhetsmatriser i 2D

Plan deformation ($\epsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$)

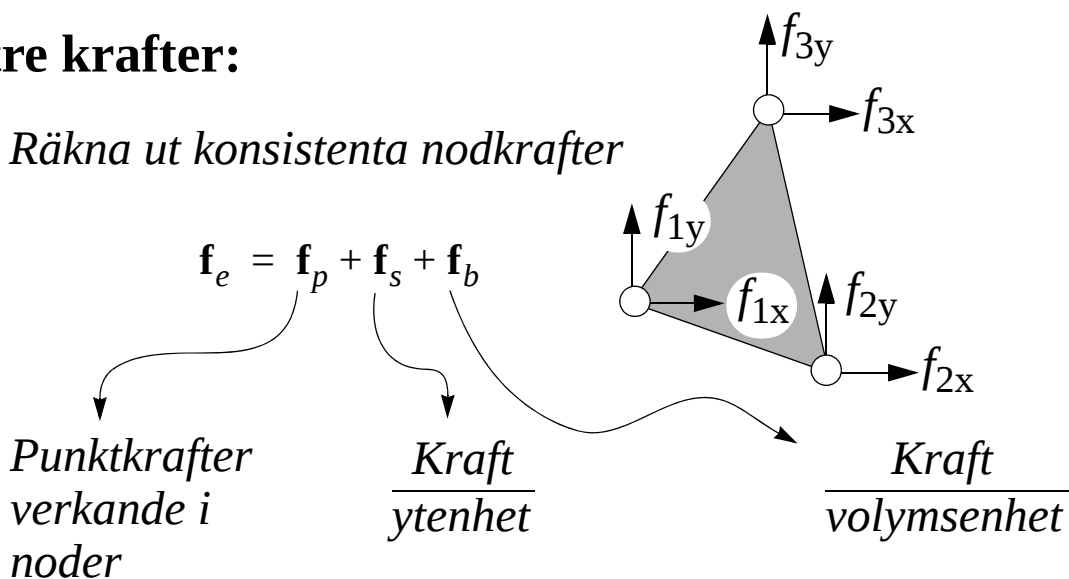
$$\mathbf{C} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

Plan spänning ($\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$)

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix}$$

Yttre krafter:

=> Räkna ut konsistenta nodkrafter

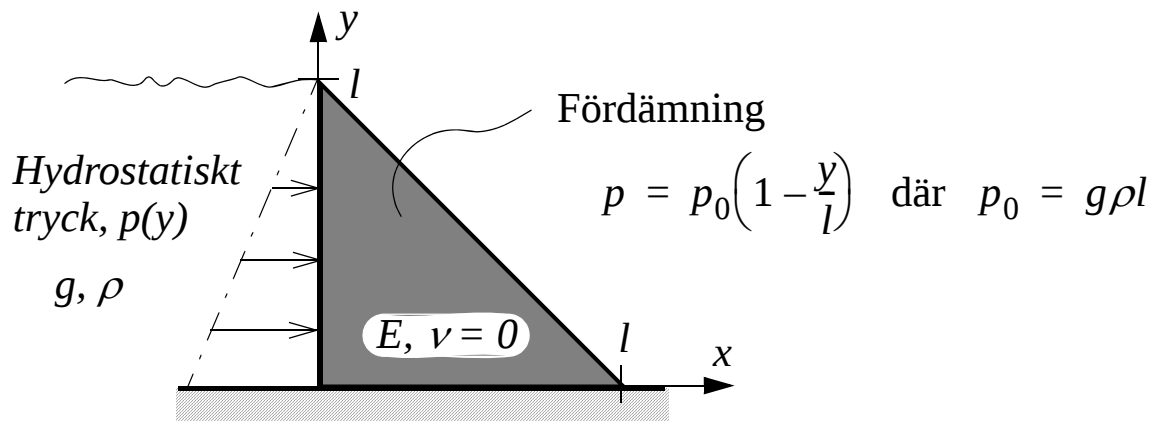


$$\mathbf{f}_p = \begin{bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ f_{3x} \\ f_{3y} \end{bmatrix} \text{ Punktkraft}$$

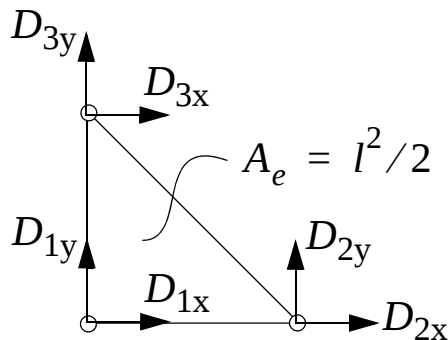
$$\mathbf{f}_s = \begin{bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ f_{3x} \\ f_{3y} \end{bmatrix}_s = \int_{S_e} \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS$$

$$\mathbf{f}_b = \begin{bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ f_{3x} \\ f_{3y} \end{bmatrix}_b = \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{f}_v dV$$

Exempel: FEM-lösning med ett CST-element



FEM-analys:



Randvillkor: $D_{1x} = D_{1y} = D_{2x} = D_{2y} = 0$

=> Reaktionskrafter: $R_{1x}, R_{1y}, R_{2x}, R_{2y}$

Formfunktioner: $N_1 = 1 - \frac{x}{l} - \frac{y}{l}$; $N_2 = \frac{x}{l}$; $N_3 = \frac{y}{l}$

B-matris:

$$B = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

“Elastisk styvhetsmatris”:
(antag plan deformation)

$$C = E \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

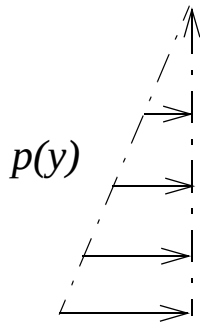
Element-
styvhets-
matris:

$$\mathbf{k}_e = \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} h A_e = \frac{h l^2}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^T \\ \mathbf{B}_2^T \\ \mathbf{B}_3^T \end{bmatrix} \mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{Eh}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

forts. CST-exempel

Lastvektor:



$$\Rightarrow \text{Spänningsvektor: } \mathbf{t} = \begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix} = p_0 \begin{bmatrix} 1 - \frac{y}{l} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Verkar på ytan: $x = 0$, dvs mellan Nod 1 & 3

där är $N_1 = 1 - y/l$; $N_2 = 0$; $N_3 = y/l$

$$\Rightarrow \mathbf{f}_s = \begin{bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ f_{3x} \\ f_{3y} \end{bmatrix} = \int_0^l [\mathbf{N}^T \mathbf{t}]_{x=0} \overbrace{h dy}^{\text{ytelement}} = \int_0^l \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \end{bmatrix}_{x=0} p_0 \begin{bmatrix} 1 - \frac{y}{l} \\ 0 \end{bmatrix} h dy = \frac{p_0 h l}{6} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kraft / volymsenhet: $\mathbf{f}_b = \mathbf{0}$, ty volymskrafterna K_x, K_y antages vara noll!

$$\text{Ekvationssystem: } \frac{Eh}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{1x} \\ D_{1y} \\ D_{2x} \\ D_{2y} \\ D_{3x} \\ D_{3y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{2x} \\ R_{2y} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{p_0 h l}{6} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lös ekvationerna (5) & (6):

$$\frac{Eh}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{3x} \\ D_{3y} \end{bmatrix} = \frac{p_0 h l}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} D_{3x} \\ D_{3y} \end{bmatrix} = \frac{2p_0}{3E} l \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

forts. CST-exempel

Postprocessing:

Reaktionskrafter (fås från ekvationerna 1-4):

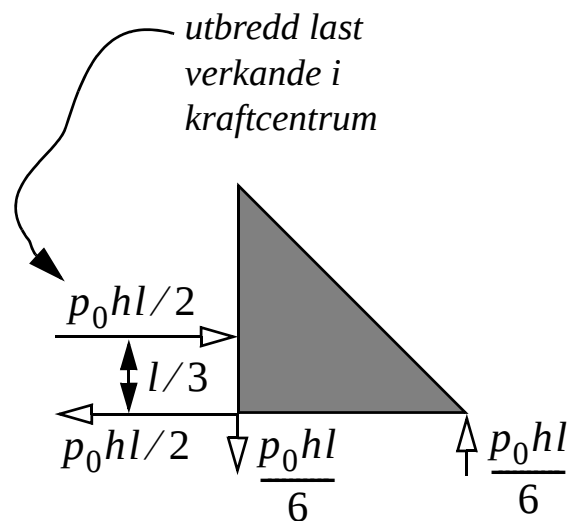
$$\text{Ekv. (1): } R_{1x} = \frac{Eh}{4}(-D_{3x}) - \frac{2p_0hl}{6} = -\frac{p_0hl}{2}$$

$$\text{Ekv. (2): } R_{1y} = \frac{Eh}{4}(-D_{3x}) = -\frac{p_0hl}{6}$$

$$\text{Ekv. (3): } R_{2x} = 0$$

$$\text{Ekv. (4): } R_{2y} = \frac{Eh}{4}D_{3x} = \frac{p_0hl}{6}$$

OBS! Total jämvikt
är uppfylld



Spänningar:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{C}\varepsilon = \mathbf{CBd}_e = \mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_1 = \mathbf{0} \\ \mathbf{d}_2 = \mathbf{0} \end{Bmatrix} =$$

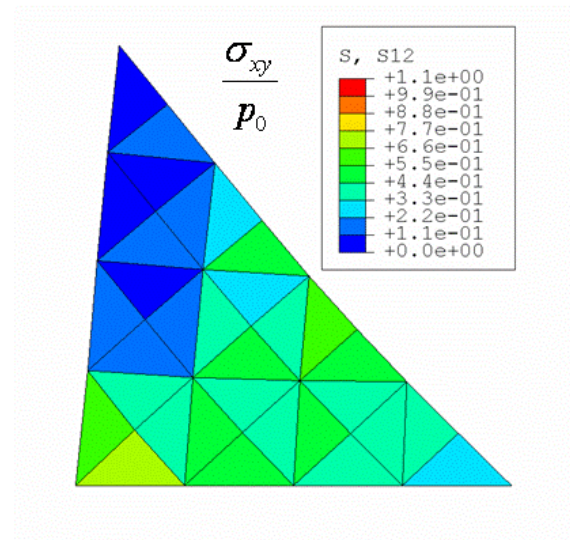
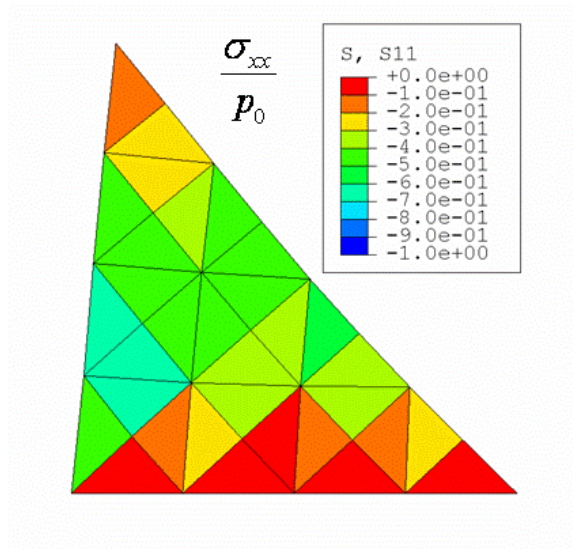
$$= \mathbf{CB}_3\mathbf{d}_3 = E \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \frac{1}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{2p_0}{3E} l \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{p_0}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

enbart skjuvspänning!

FEM-resultat från programmet: ABAQUS

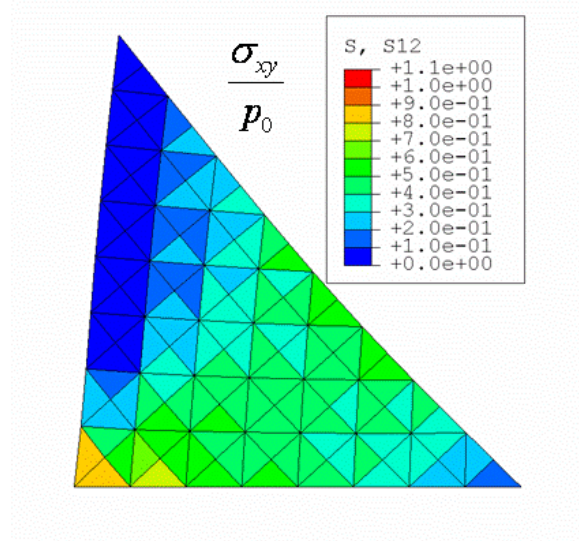
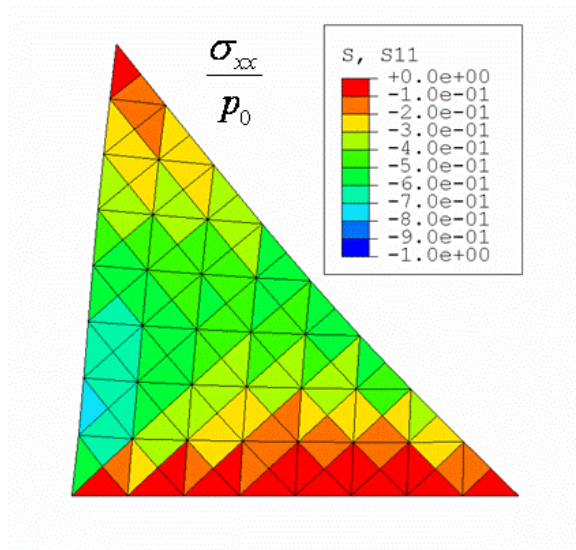
32 st. 3-noders triangelement (linjär ansats)

"1-el. lösning": $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$, $\sigma_{xy} = 0.33p_0$



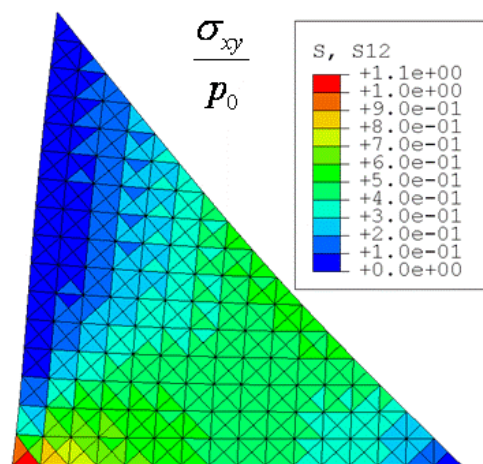
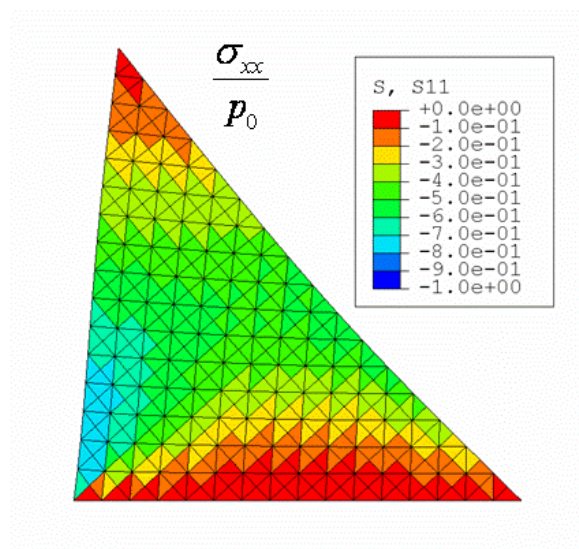
128 st. 3-noders triangelement (linjär ansats)

"1-el. lösning": $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$, $\sigma_{xy} = 0.33p_0$



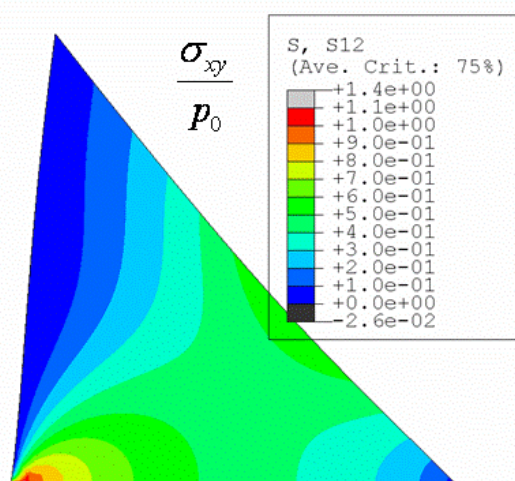
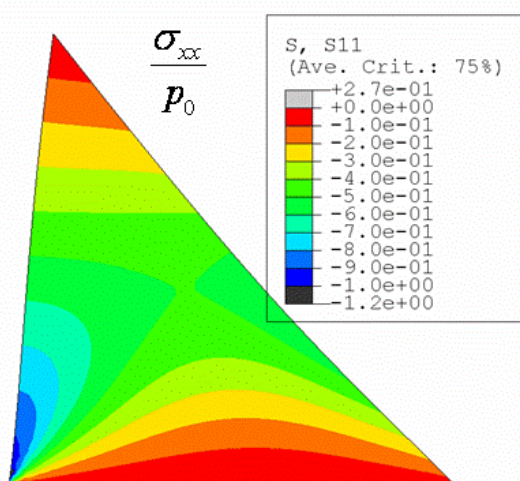
512 st. 3-noders triangelement (linjär ansats)

"1-el. lösning": $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$, $\sigma_{xy} = 0.33p_0$



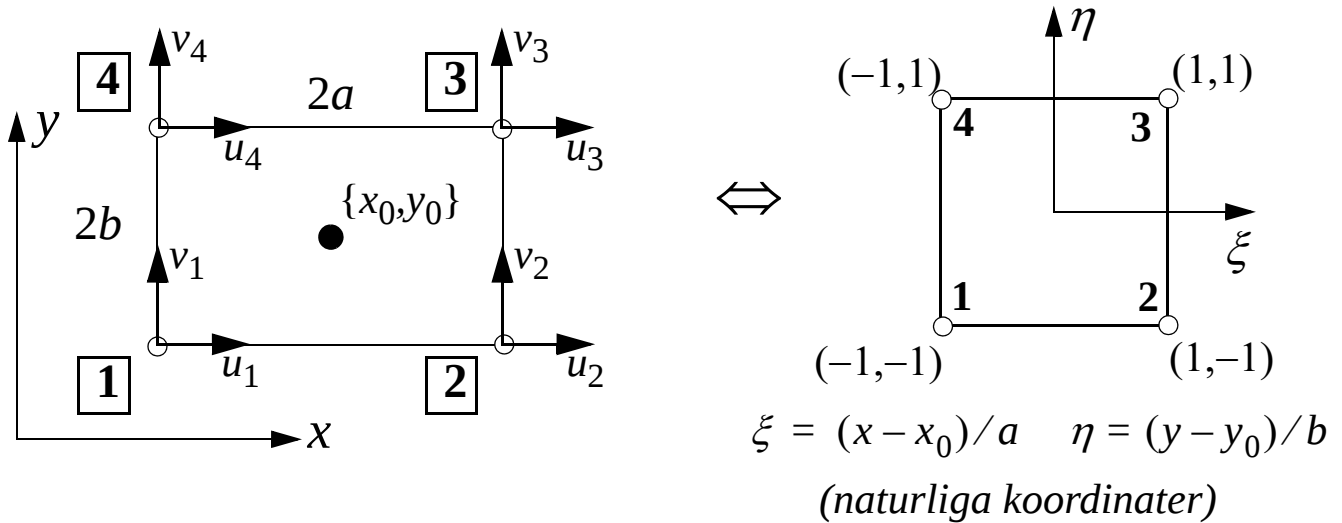
1936 st. 6-noders triangelement (kvadratisk ansats)

"1-el. lösning": $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$, $\sigma_{xy} = 0.33p_0$



Fö. 13: 4-sidiga plana element (2D)

Bilinjär Rektangel:



Förskjutningsansats (bilinjär):

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & \dots & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & \dots & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{d}_e$$

$$\text{Formfunktioner: } N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$$

Töjning:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \mathbf{N} \mathbf{d}_e = \mathbf{B} \mathbf{d}_e$$

$$\Rightarrow \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \overbrace{\frac{N_{1,\xi}}{a} \quad 0 \quad \dots \quad \frac{N_{4,\xi}}{a} \quad 0}^{\text{Nod 1} \quad \mathbf{B}_1 \quad \text{Nod 4} \quad \mathbf{B}_4} \\ 0 \quad \frac{N_{1,\eta}}{b} \quad \dots \quad 0 \quad \frac{N_{4,\eta}}{b} \\ \frac{N_{1,\eta}}{b} \quad \frac{N_{1,\xi}}{a} \quad \dots \quad \frac{N_{4,\eta}}{b} \quad \frac{N_{4,\xi}}{a} \end{bmatrix}$$

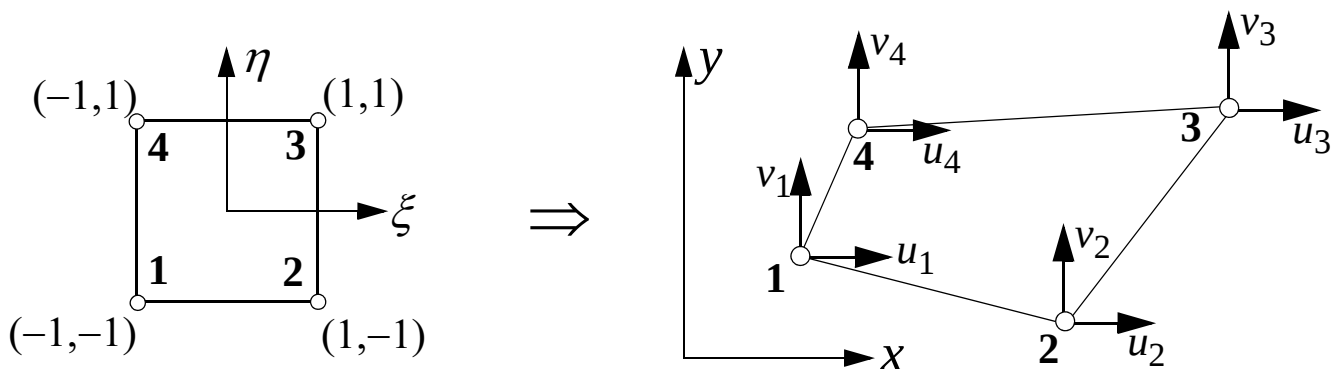
*forts. Bilinjär Rektangel**Partialderivator:*

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{a} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{1}{a} N_{i,\xi} \quad \frac{\partial N_i}{\partial y} = \dots = \frac{1}{b} N_{i,\eta}$$

där

$$N_{1,\xi} = -\frac{(1-\eta)}{4} \quad N_{1,\eta} = -\frac{(1-\xi)}{4} \quad N_{2,\xi} = \frac{(1-\eta)}{4} \quad N_{2,\eta} = -\frac{(1+\xi)}{4}$$

$$N_{3,\xi} = \frac{(1+\eta)}{4} \quad N_{3,\eta} = \frac{(1+\xi)}{4} \quad N_{4,\xi} = -\frac{(1+\eta)}{4} \quad N_{4,\eta} = \frac{(1-\xi)}{4}$$

Allmänt 4-sidigt element (bilinjärt):*Koordinattransformation:*

$$x = x(\xi, \eta) = N_1 x_1 + \dots + N_4 x_4 = \sum_{i=1}^4 N_i x_i$$

$$y = y(\xi, \eta) = N_1 y_1 + \dots + N_4 y_4 = \sum_{i=1}^4 N_i y_i$$

*(Samma formfunktioner som för det
4-nodiga rektangelementet)*

Elementet kallas **isoparametriskt** eftersom samma **interpolation** används för beskrivning av geometri (x, y) som för beskrivning av förskjutningarna (u, v)

forts. isoparametriskt bilinjärt element

Töjning:
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \mathbf{N} \mathbf{d}_e = \mathbf{B} \mathbf{d}_e$$

B-matrisen kan delas upp i 4 submatriser: $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \ \mathbf{B}_2 \ \mathbf{B}_3 \ \mathbf{B}_4]$

en för varje nod $i = \{1, 2, 3, 4\}$, där varje submatris $\mathbf{B}_i$ ges av

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial y \\ \partial N_i / \partial y & \partial N_i / \partial x \end{bmatrix}$$

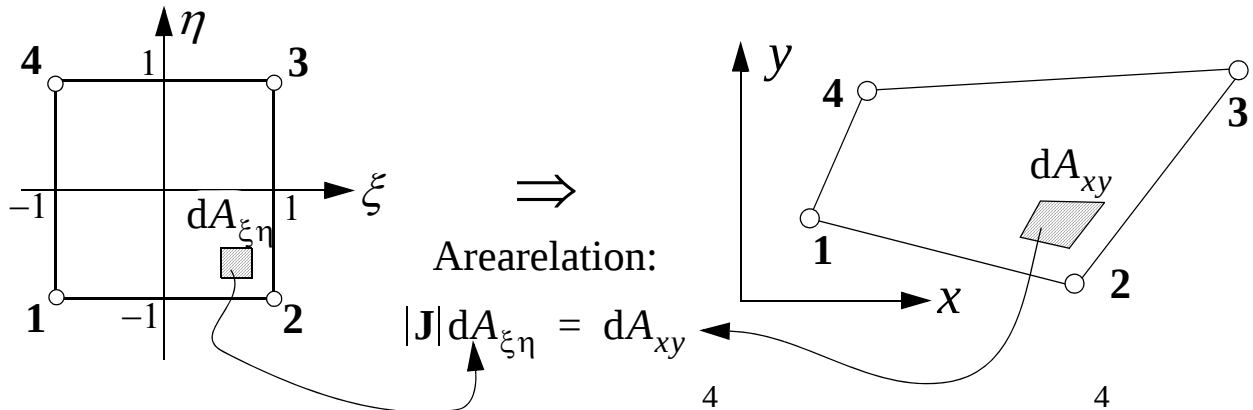
Partialderivatorna i $\mathbf{B}_i$ beräknas som $\begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x \\ \partial N_i / \partial y \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial \xi \\ \partial N_i / \partial \eta \end{bmatrix}$

där $\mathbf{J}$ är koordinattransformationens **Jacobimatrix**, definierad enl.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 N_{i,\xi} x_i & \sum_{i=1}^4 N_{i,\xi} y_i \\ \sum_{i=1}^4 N_{i,\eta} x_i & \sum_{i=1}^4 N_{i,\eta} y_i \end{bmatrix}$$

Sammanfattning

Isoparametriskt 4-sidigt element (2D):



Koordinattransformation: $x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i x_i$ $y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i y_i$

Partialderivator (kompakt skrivsätt): $N_{i,x} = \partial N_i / \partial x$ $N_{i,\eta} = \partial N_i / \partial \eta$

$$\begin{bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{bmatrix} \quad \text{där } \mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_i N_{i,\xi} & \sum y_i N_{i,\xi} \\ \sum x_i N_{i,\eta} & \sum y_i N_{i,\eta} \end{bmatrix}$$

ingår i B-matrisen

Elementstyvhetsmatris: $\mathbf{k}_e = h \int_{A_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dA = h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} |\mathbf{J}| d\xi d\eta$

Elementlastvktorer:

$$\begin{aligned} \frac{\text{Kraft}}{\text{ytenhet}} \quad \mathbf{f}_s &= \int_{S_e} \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS = \int_{-1}^1 (\mathbf{N}^T \mathbf{t})|_{\eta=-1} h l_{12} d\xi + \int_{-1}^1 (\mathbf{N}^T \mathbf{t})|_{\xi=1} h l_{23} d\eta \\ &+ \int_{-1}^1 (\mathbf{N}^T \mathbf{t})|_{\eta=1} h l_{34} d\xi + \int_{-1}^1 (\mathbf{N}^T \mathbf{t})|_{\xi=-1} h l_{41} d\eta \end{aligned}$$

där t.ex. $l_{12} = \frac{1}{2} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$$\frac{\text{Kraft}}{\text{volymenhet}} \quad \mathbf{f}_b = \int_{V_e} \mathbf{N}^T \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \end{bmatrix} dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \end{bmatrix} h |\mathbf{J}| d\xi d\eta$$

Föreläsning 14 & 15

2D/3D solider—Modelleringsaspekter

1. Isoparametriska 2D-element, Rep. + Ex.
(OH & LQ: kap. 7.4)
2. Numerisk integration (OH & LQ: sid.145-148)
3. Högre ordningens 2D-element
(OH & LQ: kap. 7.5-7.6)
4. FEM-element för 3D-solider
(OH & LQ: kap. 9)
5. Felkällor & konvergens i en FEM-analys
(OH & LQ: sid. 78-79)
6. Kompatibilitet, Symmetri, Randvillkor, etc.
(LQ: kap. 11)
7. Substrukturering (OH)
8. Bivillkor (tvång) (OH & LQ. kap. 11)

1. Koordinattransformation för ett isoparametriskt element - Repetition

För ett isoparametriskt element används samma interpolation för beskrivning av både **geometri** (x, y) och **förskjutning** (u, v).

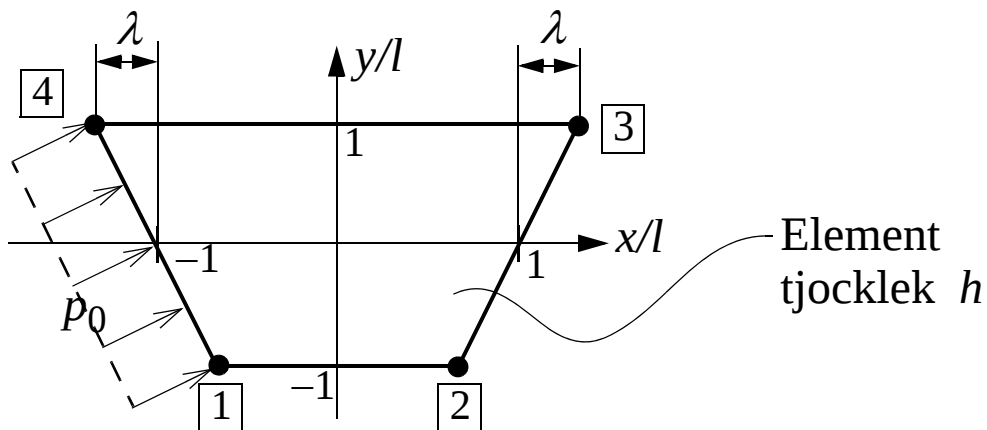
$$\text{Geometri:} \quad x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i x_i \quad y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i y_i$$

$$\text{Förskjutning:} \quad u(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i u_i \quad v(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i v_i$$

$$\text{Deformation (töjning):} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \mathbf{N} \mathbf{d}_e = \mathbf{B} \mathbf{d}_e$$

Partialderivator av $N_i(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ m.a.p. x och y beräknas m.h.a. **kedjeregeln**

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J} \text{ "Jacobimatrisen"}} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} &= \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (\text{Obs! ej en symmetrisk matris}) \end{aligned}$$

Ex. 6.7 & 6.8: Isoparametriskt 4-sidigt element

Bestäm

6.7(a) Koordinattransformationen: $x = x(\xi, \eta)$ & $y = y(\xi, \eta)$

6.7(b) Jacobimatrisen $\mathbf{J}$ och $|\mathbf{J}|$ (determinanten)

6.7(variant av d) Submatrisen $\mathbf{B}_1$ i B-matrisen

6.8(a) Yttryckets (p_0) bidrag till elementets lastvektor $\mathbf{f}_e$

2. Numerical integration

$$1D: \quad I = \int_L f(x) dx = \int_{-1}^1 \underbrace{f(\xi)|J|}_{F(\xi)} d\xi = \sum_{i=1}^{m_\xi} F(\xi) w_i$$

$$2D: \quad I = \int_A f(x, y) dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underbrace{f(\xi, \eta)|J|}_{F(\xi, \eta)} d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{m_\xi} \sum_{j=1}^{m_\eta} F(\xi, \eta) w_i w_j$$

$$3D: \quad I = \int_V f(x, y, z) dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underbrace{f(\xi, \eta, \zeta)|J|}_{F(\xi, \eta)} d\xi d\eta d\zeta =$$

$$= \sum_{i=1}^{m_\xi} \sum_{j=1}^{m_\eta} \sum_{k=1}^{m_\zeta} F(\xi, \eta) w_i w_j w_k$$

Utdrag ur "The finite element method", G.R. Liu & S.S. Quek

Table 7.1. Gauss integration points and weight coefficients

m	ξ_j	w_j	Accuracy n
1	0	2	1
2	$-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}$	1, 1	3
3	$-\sqrt{0.6}, 0, \sqrt{0.6}$	5/9, 8/9, 5/9	5
4	$-0.861136, -0.339981,$ $0.339981, 0.861136$	0.347855, 0.652145, 0.652145, 0.347855	7
5	$-0.906180, -0.538469, 0,$ $0.538469, 0.906180$	0.236927, 0.478629, 0.568889, 0.478629, 0.236927	9
6	$-0.932470, -0.661209, -0.238619,$ $0.238619, 0.661209, 0.932470$	0.171324, 0.360762, 0.467914, 0.467914, 0.360762, 0.171324	11

3. Högre ordningens 2D-element

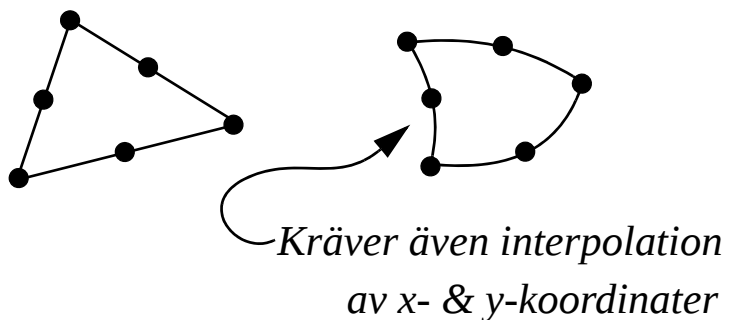
- Förskjutningsansatser: 2:a gradspolynom eller högre
- Tillåter modellering av krökta ränder

Triangelement (L.Q. sid. 153-156):

Formfunktionerna är baserade på **basfunktioner** framtagna mha “Pascals triangel” => kompletta polynom

Ex. kvadratisk ansats med **basfunktionerna**: $\{1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2\}$

=> 6 noder
Formfkn., kan
uttryckas mha
areakoordinater



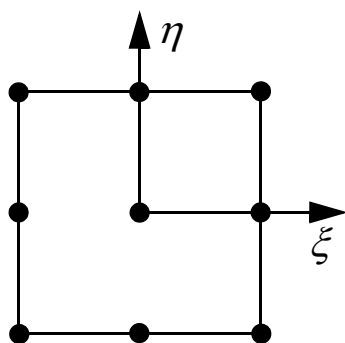
4-sidiga element (“Quad”, L.Q. sid. 156-160):

Isoparametriska: samma *interpolation* för **x** (geom.) och **u** (förskj.)

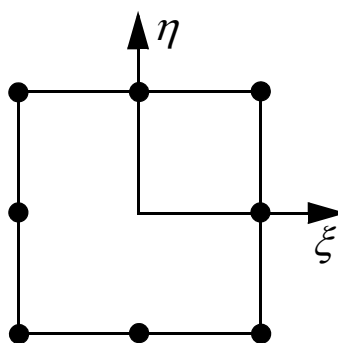
Formfunktioner uttryckta mha naturliga koordinater: $\left\{ \begin{array}{c} \xi \\ -1 \leq \xi \leq 1 \\ \eta \end{array} \right\}$

Olika typer av element:

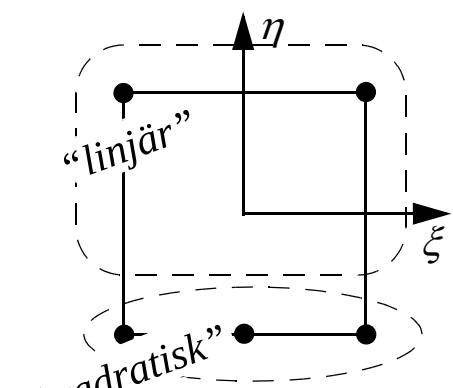
- Lagrange (full Lagrange interpolation i varje riktning: ξ, η)
- “Serendipity” (inre noder borttagna från Lagrange el.)
- Transitionselement (t.ex. linjär — kvadratisk interpolation)



Lagrange

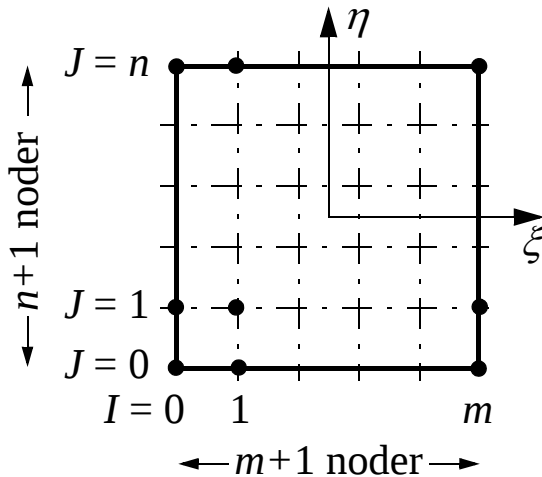


“Serendipity”



Transitions

Ex. Element av Lagrange-typ



Formfunktionen för nod i (nod-numret bestäms av indexen I & J) ges av

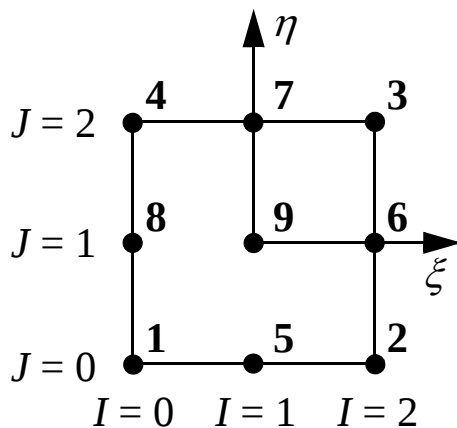
$$N_i = l_I^m(\xi) l_J^n(\eta)$$

Lagrangepolynom där m & n anger polynomgrad

Definition: Lagrangepolynom (Liu & Quek, sid. 87)

$$l_k^n(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)} = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}$$

Exempel: kvadratisk interpolation i ξ - & η -riktningen



$$\Rightarrow m = n = 2; \quad \xi_I = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad \& \quad \eta_J = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

nodpos.

$$\Rightarrow l_0^2(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)}{(\xi_0 - \xi_1)(\xi_0 - \xi_2)} = \frac{(\xi - 0)(\xi - 1)}{(-1 - 0)(-1 - 1)} = \frac{\xi(\xi - 1)}{2}$$

$$l_1^2(\xi) = \frac{(\xi + 1)(\xi - 1)}{(0 + 1)(0 - 1)} = 1 - \xi^2$$

$$l_2^2(\xi) = \frac{(\xi + 1)(\xi - 0)}{(1 + 1)(1 - 0)} = \frac{\xi(\xi + 1)}{2}$$

Formfunktionerna blir:

$$N_1 = l_0^2(\xi) l_0^2(\eta) = \frac{1}{4} \xi(\xi - 1) \eta(\eta - 1)$$

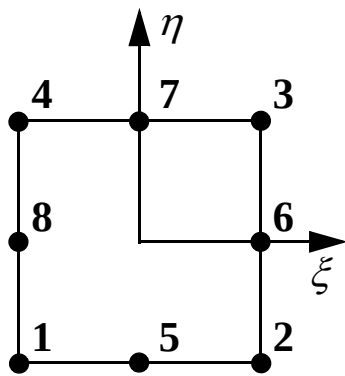
$$\cdot \cdot \cdot N_5 = l_1^2(\xi) l_0^2(\eta) = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) \eta(\eta - 1)$$

$$\cdot \cdot \cdot N_9 = l_1^2(\xi) l_1^2(\eta) = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$$

Ex. Element av “Serendipity”-typ

- Inre noder borttagna från Lagrange-element
- Ej komplett Lagrange-interpolation
- Formfunktioner tas fram genom “inspektion” och m.h.a. de egenskaper som formfunktioner skall uppfylla

Exempel: “Serendipity”-element baserat på ett kvadratisk Lagrange-element där mittnoden (nod 9) är borttagen



För t.ex. $N_1(\xi, \eta)$ gäller att:

$$N_1 = 0:$$

(i) i noderna 2, 3 & 6 där $1 - \xi = 0$

(ii) i noderna 3, 4 & 7 där $1 - \eta = 0$

(iii) i noderna 8 & 5 där $-\xi - \eta - 1 = 0$

$$N_1 = 1: \text{ i nod 1, där } \xi = \eta = -1$$

Konstruera formfunktionen mha nollställena (i)-(iii)

(samma idé som för Lagrangeinterpolation)

$$\Rightarrow N_1 = c_1(1 - \xi)(1 - \eta)(-\xi - \eta - 1)$$

$$\text{Kravet på att } N_1(\xi = \eta = -1) = 1 \text{ ger sedan att } c_1 = \frac{1}{4}$$

Formfunktionerna blir (se Liu & Quek sid. 158):

$$N_1 = -\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \xi + \eta)$$

$$\ddots N_5 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta)$$

$$\ddots N_8 = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2)$$

4. FEM-element för 3D solider

- Principiellt som för 2D solider
- I allmänhet används **isoparametriska** element (**formfunktioner** används både för interpolation av förskjutningar och geometri)

Koordinattransformation (geometri):

antal noder i elementet n_d

$$x = \sum_{i=1}^{n_d} N_i x_i$$

$$y = \sum_{i=1}^{n_d} N_i y_i$$

$$z = \sum_{i=1}^{n_d} N_i z_i$$

Förskjutning:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{d}_e = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_{n_d} & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_{n_d} & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_{n_d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ u_{n_d} \\ v_{n_d} \\ w_{n_d} \end{bmatrix}$$

Node 1
Node n_d

Töjning:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \mathbf{L} \mathbf{u} = \mathbf{L} \mathbf{N} \mathbf{d}_e = \mathbf{B} \mathbf{d}_e$$

B-matris
($6 \times 3n_d$)

Partialderivator
av formfunktioner

$$\begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x \\ \partial N_i / \partial y \\ \partial N_i / \partial z \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial \xi \\ \partial N_i / \partial \eta \\ \partial N_i / \partial \zeta \end{bmatrix}$$

Jacobi-matrisen:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} & z_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} & z_{,\eta} \\ x_{,\zeta} & y_{,\zeta} & z_{,\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & \dots & N_{n_d,\xi} \\ N_{1,\eta} & \dots & N_{n_d,\eta} \\ N_{1,\zeta} & \dots & N_{n_d,\zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n_d} & y_{n_d} & z_{n_d} \end{bmatrix}$$

Elementstyvhetsmatris:

$$\mathbf{k}_e = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV = \iiint \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} |\mathbf{J}| d\xi d\eta d\zeta$$

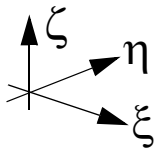
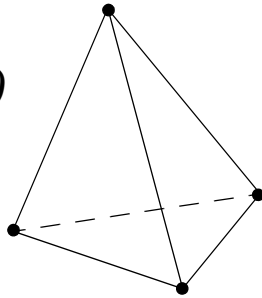
Volymelement

Exempel på elementtyper (3D):

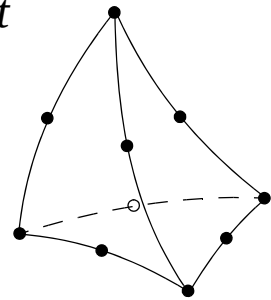
Tetraedrar (4 sidor; 6 kanter; 4 hörn):

(formfkn. baserade på Pascals pyramid => **kompletta polynom**)

Linjärt
(4 noder)



Kvadratisk
(10 noder)

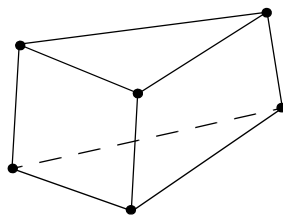


Basfunktioner: $\{1, \xi, \eta, \zeta\}$ $\{1, \xi, \eta, \zeta, \xi^2, \xi\eta, \xi\zeta, \eta^2, \eta\zeta, \zeta^2\}$

Prismor (5 sidor; 9 kanter; 6 hörn):

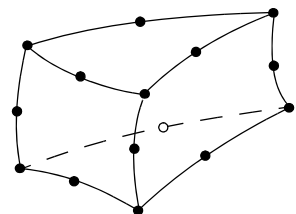
(formfkn. baserade på “extruderad” triangel)

“Linjärt”
(6 noder)



$\{1, \xi, \eta, \zeta, \xi\zeta, \eta\zeta\}$

“kvadratisk”
(15 noder)



$\{1, \xi, \eta, \zeta, \xi^2, \xi\eta, \xi\zeta, \eta^2, \eta\zeta, \zeta^2, \xi^2\zeta, \xi\zeta^2, \eta^2\zeta, \eta\zeta^2, \xi\eta\zeta\}$

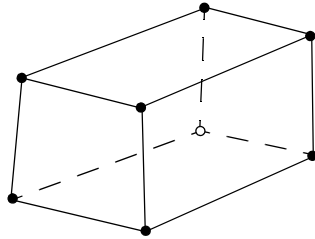
“extratermer till
de kompletta
polynomen”

forts. Exempel på elementtyper (3D):

Hexaedrar (6 sidor; 12 kanter; 8 hörn):

(formfkn. baserade på **Lagrangeinterpolation**)

“Tri-linjärt”
(8 noder)

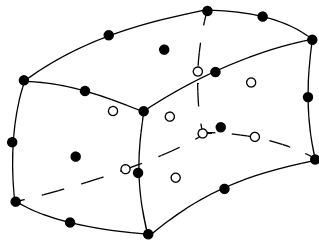


basfkn.

$$\{(1 \ \xi)(1 \ \eta)(1 \ \zeta)\} = \\ = \{1, \xi, \eta, \zeta, \xi\eta, \xi\zeta, \eta\zeta, \xi\eta\zeta\}$$

“Tri-kvadratiska”

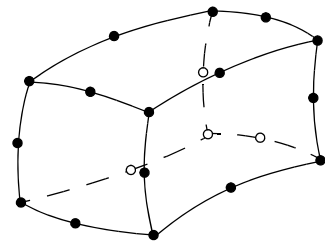
“Full Lagrange”
(27 noder)



basfkn.

$$\{(1 \ \xi \ \xi^2)(1 \ \eta \ \eta^2)(1 \ \zeta \ \zeta^2)\} = \\ = \{1, \xi, \eta, \zeta, \dots, \xi^2 \eta^2 \zeta^2\} \Rightarrow 27 \text{ termer!}$$

“Serendipity”
(20 noder)

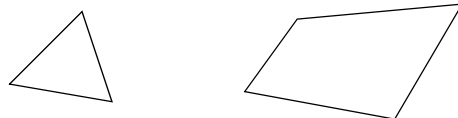


Ytnoder & inre nod
borttagna! (totalt 7 st.)

Automatisk nätgenerering (“meshing”)

2D:

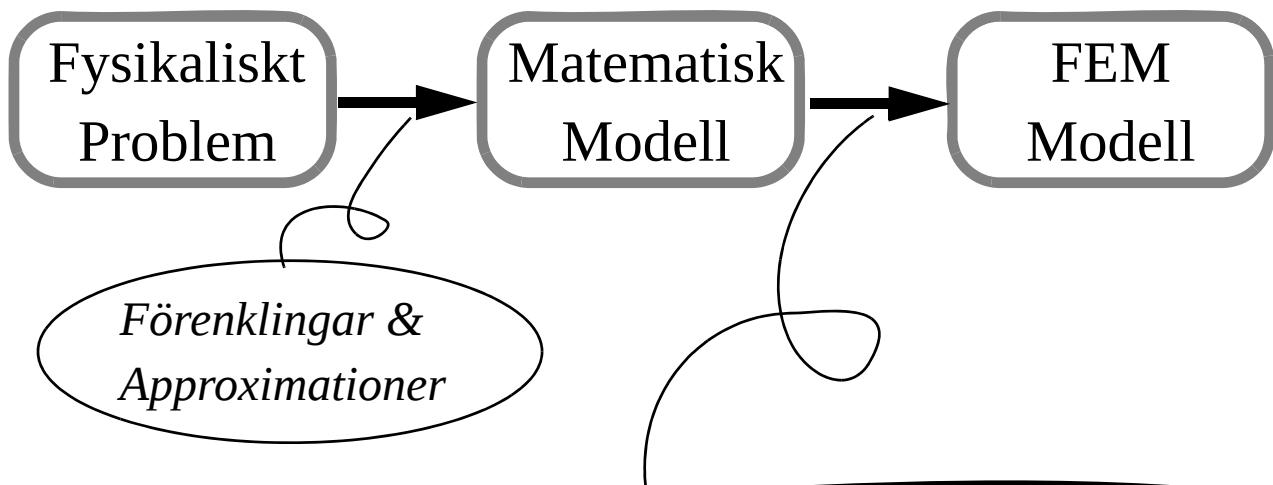
- Robusta algoritmer finns för godtyckliga ytor för både 3- och 4-sidiga element



3D:

- Robusta algoritmer för godtyckliga volymer finns enbart för **tedraederelement** (10 nodiga elementet, obs! 4-nodiga anv. sällan)
- För **hexaeder-element** finns robusta algoritmer för “extruderade” och “svepta” geometrier, vilka båda bygger på nätgenerering av en plan yta

5. Felkällor & konvergens i en FEM-analys



Felkällor

1. **Diskretiseringsfel:** ofullständig representation av geometrin
2. **Numeriska fel:** integration m.h.a. Gausskvadratur; maskinfel (dator) avrundning/trunkation beror bl.a. av $\mathbf{K}$:s konditionstal
3. **Approximationsfel:** beror av förskjutningsansatsen

$$u \approx \tilde{u} = \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{n_d} N_i u_i$$

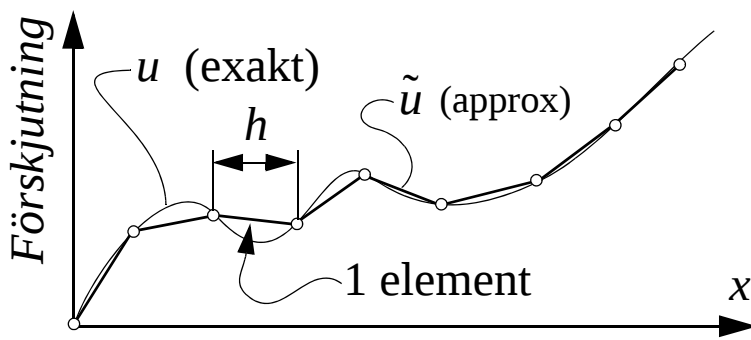
Beräkningstid (CPU-tid):

$$t_{\text{CPU}} \propto n_{\text{Tot.DOF}}^{\alpha}$$

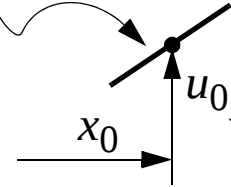
$n_{\text{Tot.DOF}}$ = totala antalet frihetsgrader
(antalet ekvationer)

α är en konstant i intervallet 2 till 3
som beror av typ av ekvationslösare
och typ av styvhetsmatris (dess bandbredd)

Konvergens, 1D-exempel:



Egenkaper hos
den exakta lösn.

$$u = u_0 + u'(x - x_0)$$


“I ett infinitesimalt område kring en punkt x_0 , kan den exakta lösningen beskrivas med konstant plus en konstant gradient”

Konvergens, d.v.s. att $\tilde{u} \rightarrow u$ då $h \rightarrow 0$, kräver att den approximativa ansatsen, $\tilde{u}$, skall

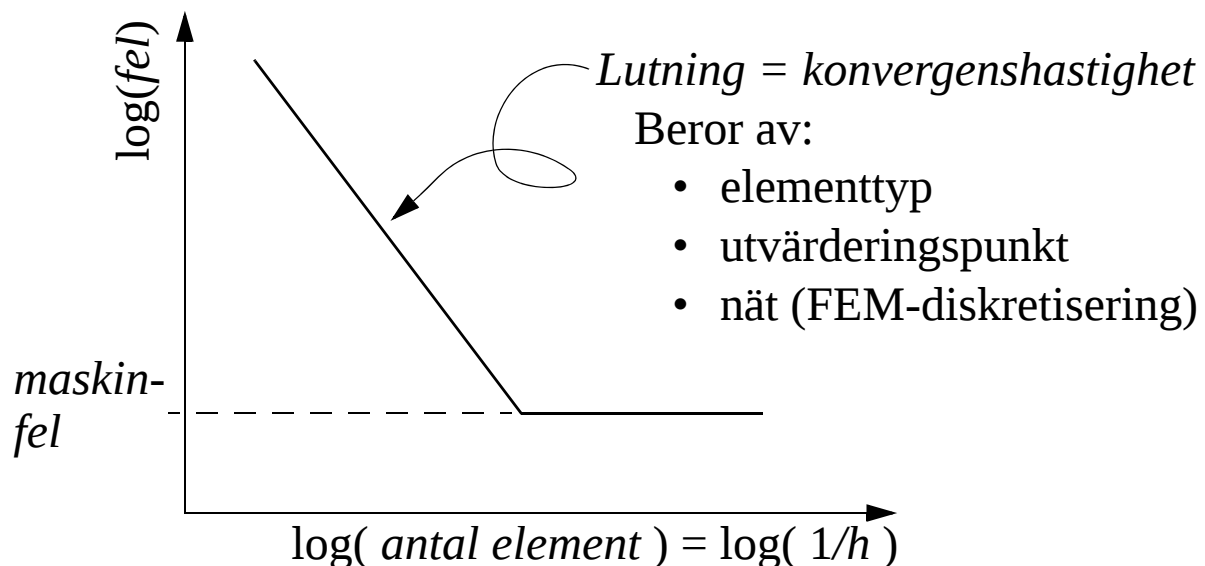
1. kunna beskriva

(i) en godtycklig stelkroppsrörelse ($\sum N_i = 1$)

(ii) konstant töjningstillstånd ($d\tilde{u}/dx = \text{konstant}$)

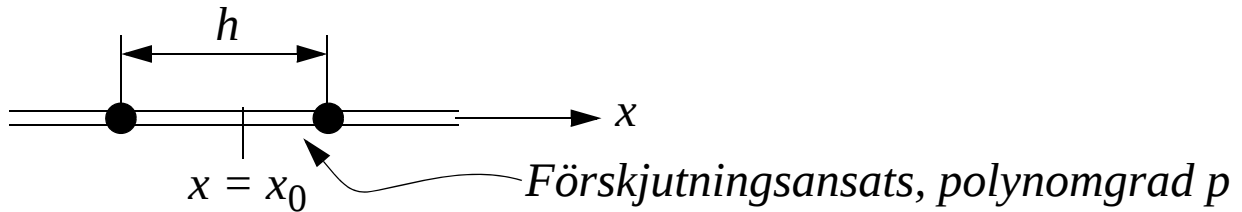
2. vara kontinuerlig över elementgränser (kompatibilitet)

I praktiken



Approximationsfel, 1D-exempel:

Studera lösningen i ett 1D stänglement:



Expansion av exakt och approximativ lösning kring x_0 :

$$\text{Exakt: } u(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \dots + c_p(x - x_0)^p + c_{p+1}(x - x_0)^{p+1} + \dots$$

$$\text{Approx.: } \tilde{u}(x) = \tilde{c}_0 + \tilde{c}_1(x - x_0) + \dots + \tilde{c}_p(x - x_0)^p$$

Den approximativa lösningen kommer att reproducera den exakta lösningen upp till polynomgrad p . Restermen, d.v.s. felet i elementet kommer att vara av ordning $O((x - x_0)^{p+1})$, alltså

$$fel = |\tilde{u} - u| \approx C_{p+1}(x - x_0)^{p+1} + \dots$$

Eftersom $(x - x_0)$ maximalt kan bli h i ett element fås att

$$fel = |\tilde{u} - u| \approx Ch^{p+1}$$

Logaritmera!

$$\Rightarrow \log(fel) = \log C + (p + 1)\log h$$

$$= \log C - (p + 1)\log \frac{1}{h}$$

$$\sim \log C - (p + 1)\log(\text{antalet element})$$

OBS!
Ant. element är
proportionellt
mot $1/h$

$$\text{Spänning: } \sigma = E\varepsilon = E \frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow |\tilde{\sigma} - \sigma| = E \frac{d}{dx} |\tilde{u} - u| \approx Ch^p$$

Långsammare
konvergens!

Optimala punkter för utvärdering av resultat i ett element

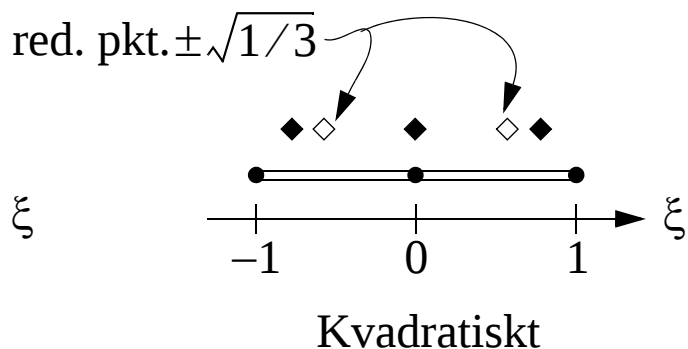
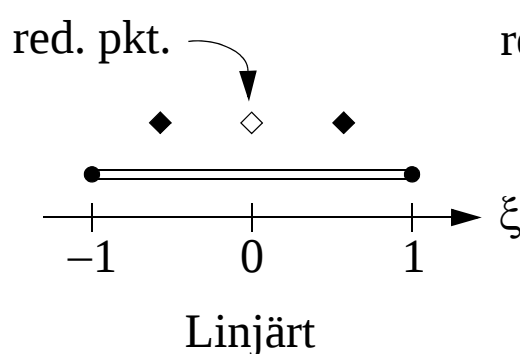
=> Optimala punkter sammanfaller ofta med integrationspunkter för sk. "reducerad integration"

Rep. Numerisk integration m.h.a. Gauss-kvadratur i 1D:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{-1}^1 f(\xi) \frac{dx}{d\xi} d\xi = \int_{-1}^1 F(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^m F(\xi_i) w_i$$

"integrationspunkt" 

Elementtyp	Antal integrationspunkter / element	
	Full 	Reducerad 
linjär	2	1
kvadratisk	3	2



Metoder för erhålla ökad noggrannhet i en FEM-analys:

h-metod: öka antalet element (d.v.s. minska *h*)

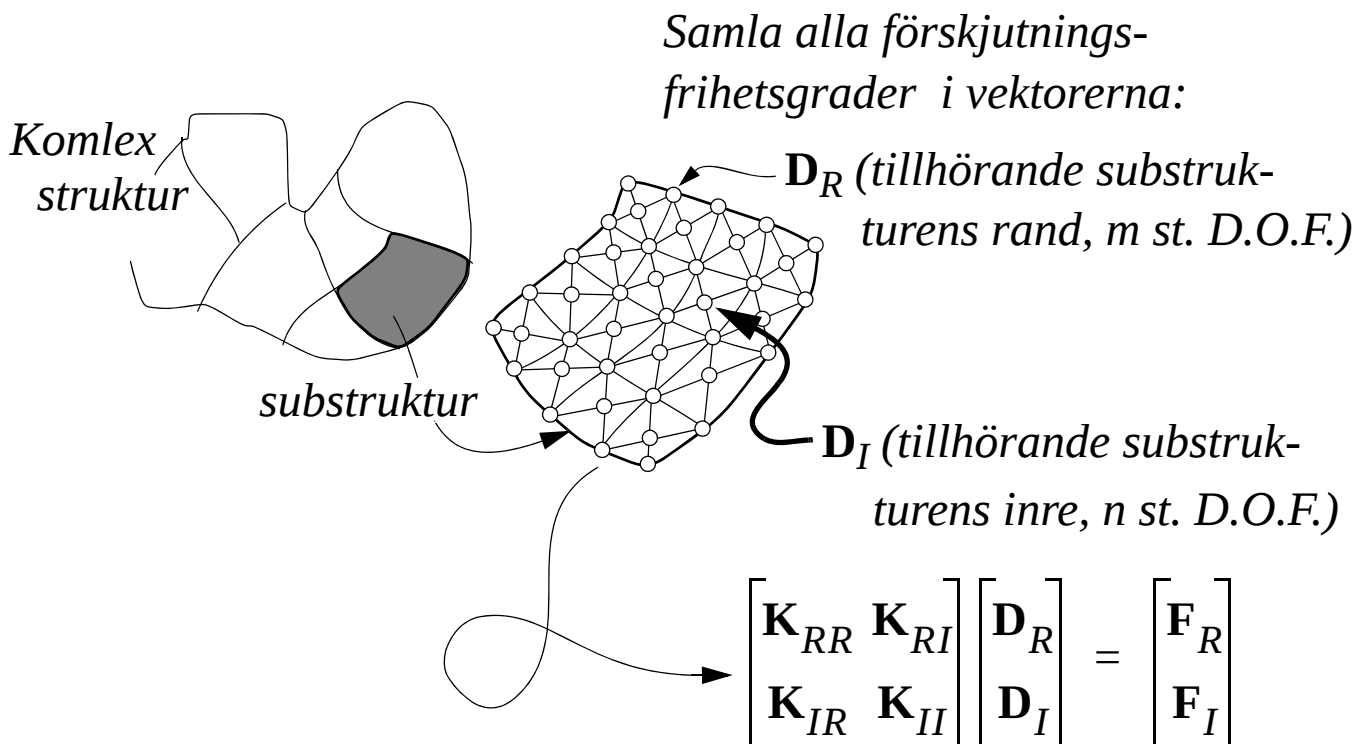
p-metod: öka polynomgraden i elementens förskjutningsansatser

hp-metod: kombination av *h*- & *p*-metoderna

r-metod: optimera utnyttjandet av befintliga element (graderade nät osv.)

7. Substrukturering

Metod för analys av mkt. stora komplexa system, där strukturen delas in ett antal mindre substrukturer. Varje substruktur karakteriseras av **inre frihetsgrader (i)**, samt **frihetsgrader på randen (r)**.



Analysen utförs i tre steg:

- (i) **Eliminera de inre frihetsgraderna** i varje substruktur. Varje substruktur kan då beskrivas m.h.a. m frihetsgrader istället för $m + n$ frihetsgraderna för hela substrukturen.
- (ii) Sätt ihop substrukturerna (assemblera) och analysera hela systemet. **Obs! antalet frihetsgrader som samtidigt måste beaktas i systemet är nu starkt reducerat.**
- (iii) Varje substruktur utvärderas (“post-processing”) därefter var för sig.

forts. substrukturering

(i) Elimination av inre frihetsgraderna i en substruktur

Dela upp ekvationssystemet i rand- (R) och inre (I) frihetsgrader

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{RR} & \mathbf{K}_{RI} \\ \mathbf{K}_{IR} & \mathbf{K}_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_R \\ \mathbf{D}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_R \\ \mathbf{F}_I \end{bmatrix} \quad (\text{Obs! symmetri } \mathbf{K}_{RI} = \mathbf{K}_{IR}^T)$$

med dimensioner: $\mathbf{K}_{RR} \ m \times m$; $\mathbf{K}_{II} \ n \times n$; $\mathbf{K}_{IR} \ n \times m$; $\mathbf{K}_{RI} \ m \times n$.

Eliminera $\mathbf{D}_I$ m.h.a. den undre ekvationen $\mathbf{K}_{IR}\mathbf{D}_R + \mathbf{K}_{II}\mathbf{D}_I = \mathbf{F}_I$

$$\Rightarrow \mathbf{D}_I = \mathbf{K}_{II}^{-1}\mathbf{F}_I - \mathbf{K}_{II}^{-1}\mathbf{K}_{IR}\mathbf{D}_R$$

vilket insatt i den övre ekvationen $\mathbf{K}_{RR}\mathbf{D}_R + \mathbf{K}_{RI}\mathbf{D}_I = \mathbf{F}_R$ ger

$$\Rightarrow [\mathbf{K}_{RR} - \mathbf{K}_{RI}\mathbf{K}_{II}^{-1}\mathbf{K}_{IR}]\mathbf{D}_R = \mathbf{F}_R - \mathbf{K}_{RI}\mathbf{K}_{II}^{-1}\mathbf{F}_I$$

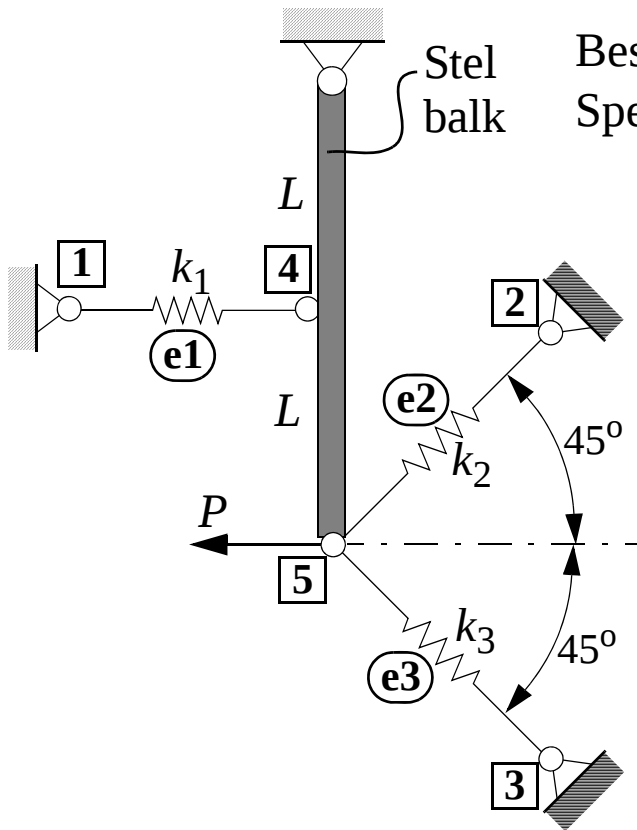
Alltså, substrukturens mekaniska respons kan utåt modelleras med det reducerade ekvationssystemet

$$\mathbf{K}_{red}\mathbf{D}_R = \mathbf{F}_{red}$$

$$\text{där } \mathbf{K}_{red} = \mathbf{K}_{RR} - \mathbf{K}_{RI}\mathbf{K}_{II}^{-1}\mathbf{K}_{IR}$$

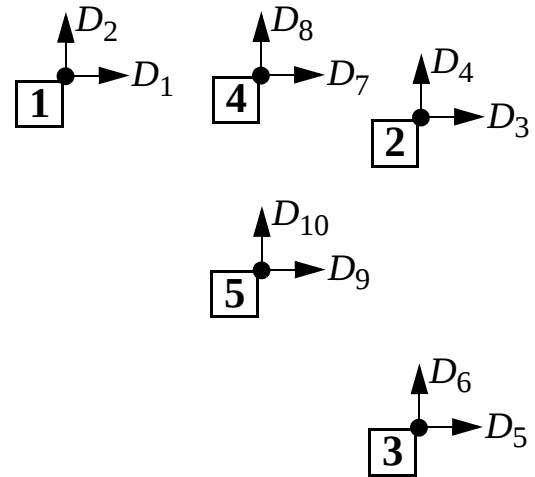
$$\mathbf{F}_{red} = \mathbf{F}_R - \mathbf{K}_{RI}\mathbf{K}_{II}^{-1}\mathbf{F}_I$$

8. Problem med bivillkor—Ett exempel



Bestäm förskjutningen i P 's riktning!
Speciellt gäller att: $k_1 = k$, $k_2 = k_3 = 2k$

Numrering av frihetsgrader:



Randvillkor:

$$D_1 = \dots = D_6 = 0, \quad D_8 = D_{10} = 0$$

OBS! D_7 och D_9 är ej oberoende!

Elementstyvhetsmatriser:

$$\mathbf{k}_e = k_i \begin{bmatrix} \mathbf{a} & -\mathbf{a} \\ -\mathbf{a} & \mathbf{a} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} l_{12}^2 & l_{12}m_{12} \\ l_{12}m_{12} & m_{12}^2 \end{bmatrix}$$

“riktningscosiner”

$$l_{12} = \frac{x_2 - x_1}{l_i}, \quad m_{12} = \frac{y_2 - y_1}{l_i}$$

elementlängd

Elem. 1:

$$l_{12} = 1, \quad m_{12} = 0$$

$$\Rightarrow k_1 = k, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Elem. 2:

$$l_{12} = 1/\sqrt{2}, \quad m_{12} = 1/\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow k_2 = 2k, \quad \mathbf{a} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Elem. 3:

$$l_{12} = 1/\sqrt{2}, \quad m_{12} = -1/\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow k_3 = 2k, \quad \mathbf{a} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Assemblering av elementstyvhetsmatriser:

“komp.” element 1 = röd

“komp.” element 2 & 3 = svart

$$\mathbf{K}_{tot} = \mathbf{K}_{e1} + \mathbf{K}_{e2} + \mathbf{K}_{e3} = k$$

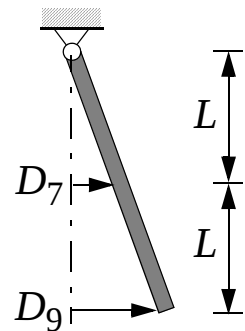
1	0					-1	0			1	nod 1
0	0					0	0			2	
		1	1					-1	-1	3	nod 2
		1	1					-1	-1	4	
				1	-1			-1	1	5	nod 3
				-1	1			1	-1	6	
-1	0					1	0			7	nod 4
0	0					0	0			8	
		-1	-1	-1	1			2	0	9	nod 5
		-1	-1	1	-1			0	2	10	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		Ekv.nr.

Ekvationerna 7 & 9 (övriga $D_i = 0$, d.v.s. kända):

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_7 \\ D_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -P \end{bmatrix} \quad \text{Men, lösningen till Ekv.-systemet är inte lösningen till problemet !}$$

Ty, D_7 och D_9 är
linjärt beroende:

$$\Rightarrow D_7 = \frac{1}{2} D_9$$

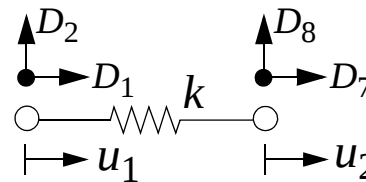


Metoder för att lösa problem med “bivillkor”:

- (i) Inför bivillkoret på elementnivå (eliminera frihetsgrader), påverkar transformationen $\mathbf{k}_e \rightarrow \mathbf{K}_e$.
- (ii) Lagranges multiplikatormetod
- (iii) “Penalty”-metod

(i) Bivillkoret infört på elementnivå:

För element 1 gäller:



Bivillkor: $D_7 = \frac{1}{2}D_9$
 $D_8 = D_{10}$

Samband lokala/globala
 förskjutningar:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_7 \\ D_8 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Ny transformationsmatris}} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_9 \\ D_{10} \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_9 \\ D_{10} \end{bmatrix}$$

Ta fram global elementstyvhetsmatris mha
 av den vanliga transformationsregeln:

$$\mathbf{K}_{e1} = \mathbf{T}^T \mathbf{k}_e \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 & -k/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k/2 & 0 & k/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Frihetsgraderna D7 & D9 är nu eliminerade ur systemet. Den
 globala styvhetsmatrisen blir:

“komp.” element 1 = röd
 “komp.” element 2 & 3 = svart
 “komp.” element 1, 2 & 3 = blå

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{e1} + \mathbf{K}_{e2} + \mathbf{K}_{e3} = k \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1/2 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 9/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ekvation 9 (övriga $D_i = 0$, d.v.s. kända):

$$\left[\frac{9k}{4} \right] [D_9] = [-P] \Rightarrow D_9 = -\frac{4P}{9k}$$

Allmän form för bivillkor:

(Se kap. 11.11 i LB, där används terminologin “MPC-Equations”, där “MPC” står för Multi-Point-Constraint”)

Bivillkor kan formuleras på den generella formen:

$$\underset{m \times n}{\mathbf{C}} \underset{n \times 1}{\mathbf{D}} - \underset{m \times 1}{\mathbf{Q}} = \mathbf{0} \quad \begin{array}{l} n = \text{antalet frihetsgrader} \\ m = \text{antalet bivillkor} \end{array}$$

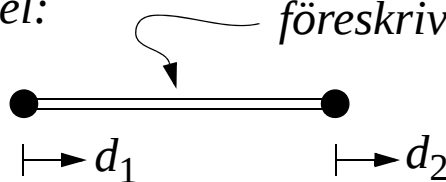
I det aktuella fallet (Ekv. (7) & (9)) ovan gäller att $n = 2$ & $m = 1$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1/2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} D_7 \\ D_9 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Q representerar vanligtvis en föreskriven förskjutning i det typiska fallet!

T.ex. kan förlängningen av ett element beskrivas mha **Q**.

Exempel: *föreskriv en förlängning $\delta = d_2 - d_1$*



Kan formuleras i form av ett bivillkor enligt: $\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$

(ii) Lagranges multiplikatormetod:

(Se kap. 11.11 i LB & kap. 8.3 i E. Peterman, “*Analytiska metoder II*”, Studentlitteratur, Lund, 1993)

Vid ett **stabilit jämviktsläge** har ett **systems potentiella energi** $U(\mathbf{D})$ ett minimum, d.v.s. $\delta U(\mathbf{D}) = 0$.

I det aktuella fallet kan en unik jämviktslösning istället tas fram genom minimering av *potentialen* $U(\mathbf{D})$ under *bivillkoret*: $\mathbf{CD} - \mathbf{Q} = \mathbf{0}$ (“optimeringsproblem”). Detta kan åstadkommas genom minimering av den *modifierade potentialen*:

$$U_L = \underbrace{\frac{1}{2}\mathbf{D}^T \mathbf{K} \mathbf{D}}_{\text{Elastisk töjningsenergi}} - \underbrace{\mathbf{D}^T \mathbf{F}}_{\text{Yttre krafter potential}} + \underbrace{\lambda^T (\mathbf{CD} - \mathbf{Q})}_{\text{Bivillkor}}$$

Lagrange-multiplikatorer

Minimering m.a.p. $\mathbf{D}$ och λ ger:

$$\delta U = \delta \mathbf{D}^T (\mathbf{KD} - \mathbf{F}) + \delta \lambda^T (\mathbf{CD} - \mathbf{Q}) + \underbrace{\lambda^T \mathbf{C} \delta \mathbf{D}}_{\delta \mathbf{D}^T \mathbf{C}^T \lambda} = 0$$

Minumum är en stationär lösning, d.v.s. $\delta U = 0$ gäller för godtyckliga $\delta \mathbf{D}$ och $\delta \lambda$, vilket ger ekvationssystemet:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix}$$

I det aktuella exemplet ovan fås ekvationssystemet & lösningen:

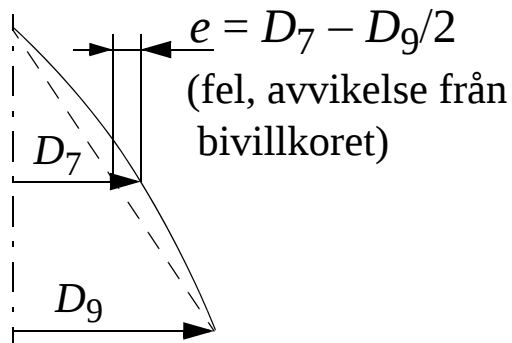
$$\begin{bmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & 2k & -1/2 \\ 1 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_7 \\ D_9 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} D_7 \\ D_9 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2P/(9k) \\ -4P/(9k) \\ 2P/9 \end{bmatrix}$$

(Metoden används i många FEM-program, t.ex ABAQUS, ANSYS)

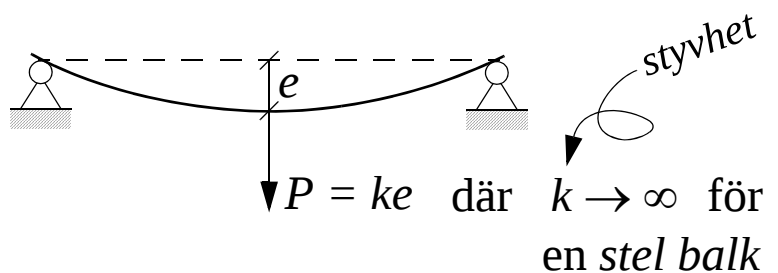
(iii) “Penalty”-metod:

(Se kap. 11.11 i LB)

Bivillkoret i exemplet är grundat på antagandet om en stel balk. I praktiken har balken en viss flexibilitet (ej stel) och bivillkoret kommer ej helt att uppfyllas, vilket ger ett *fel* e enligt



e beskriver balkens deformation och kan uttryckas med en förenklad modell enligt:



För $k < \infty$ kommer **elastisk energi** att lagras upp i balken enligt

$$W_{\text{balk}} = \frac{1}{2}eP = \frac{1}{2}eke$$

vilket kommer att bidra till att öka systemets *potentiella energi*.

Allmänt, kan felet i uppfyllandet av bivillkoren uttryckas som

$$\mathbf{e} = \mathbf{CD} - \mathbf{Q}$$

där $\mathbf{e}$ är en vektor med lika många komponenter som antalet bivillkor. Felet $\mathbf{e}$ kommer att bidra till systemets potentiella energi som totalt blir

$$U = \frac{1}{2}\mathbf{D}^T \mathbf{K} \mathbf{D} - \mathbf{D}^T \mathbf{F} + \left(\frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{k}^p \mathbf{e} \right)$$

dimension energi

här är $\mathbf{k}^p$ en diagonalmatrix som innehåller styvhetstermer, k_i^p , enligt exemplet ovan, vilka här kallas s.k. “penalty”-tal.

fortsättning 3. “Penalty”-metod

Bästa lösningen erhålls återigen genom *minimering av systemets potentiella energi*, m.a.p. $\mathbf{D}$, vilket här ger

$$\delta U = \delta \mathbf{D}^T (\mathbf{K} \mathbf{D} - \mathbf{F}) + \underbrace{\delta \mathbf{e}^T (\mathbf{k}^p (\mathbf{C} \mathbf{D} - \mathbf{Q}))}_{\rightarrow \delta \mathbf{D}^T \mathbf{C}^T} = 0$$

Den stationära lösningen gäller för godtyckliga $\delta \mathbf{D}$, vilket ger ekvatinssystemet:

$$[\mathbf{K} + \underbrace{\mathbf{C}^T \mathbf{k}^p \mathbf{C}}_{\text{“Penalty”-matris}}] \mathbf{D} = \mathbf{F} + \mathbf{C}^T \mathbf{k}^p \mathbf{Q}$$

“Penalty”-talen väljs av den som analyserar och bör väljas enligt

$$k_i^p = [10^4 \text{ till } 10^8] \times [\text{maximala diagonalelementet i } \mathbf{K}]$$

Om k_i^p väljs för stor blir systemmatrisen illakonditionerad!

I exemplet ovan gäller att:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 2k \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ -P \end{bmatrix}, \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \end{bmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Pröva olika “penalty”-tal i diagonalmatrisen α (här en 1x1 matris):

$$\mathbf{k}^p = \begin{bmatrix} 10^2 k \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{C}^T \mathbf{k}^p \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10^2 k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \end{bmatrix} = 10^2 k \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 0.25 \end{bmatrix}$$

Ekv. syst.:

$$10^2 k \begin{bmatrix} 1.01 & -0.5 \\ -0.5 & 0.27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_7 \\ D_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -P \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} D_7 \\ D_9 \end{bmatrix} = -\frac{P}{k} \begin{bmatrix} 0.2203 \\ 0.4449 \end{bmatrix}$$

$$\text{Relativa felet} < 10^{-2}$$

fortsättning 3. “Penalty”-metod

$$\mathbf{k}^p = [10^4 k] \Rightarrow \mathbf{C}^T \mathbf{k}^p \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \end{bmatrix} [10^4 k] \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \end{bmatrix} = 10^4 k \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 0.25 \end{bmatrix}$$

Ekv. syst.:

$$10^4 k \begin{bmatrix} 1.0001 & -0.5 \\ -0.5 & 0.2502 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_7 \\ D_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -P \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} D_7 \\ D_9 \end{bmatrix} = -\frac{P}{k} \begin{bmatrix} 0.222202 \\ 0.444449 \end{bmatrix}$$

Relativa felet $< 10^{-4}$

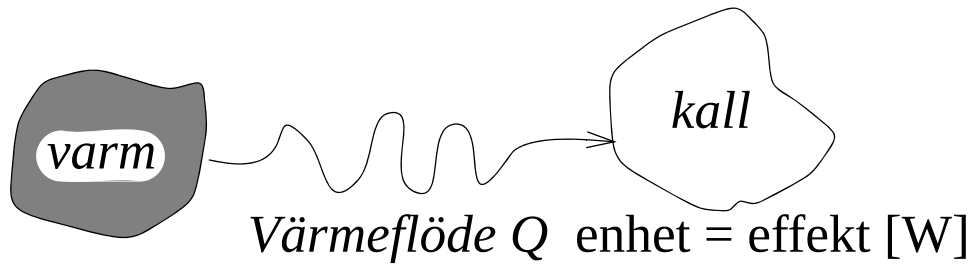
<i>Metod</i>	<i>Fördel</i>	<i>Nackdel</i>
Lagrange	exakt	tillför extra frihetsgrader
Penalty(*)	inga nya frihetsgrader	ej exakt

(*) Metoden används ofta i samband med kontaktanalyser där bivillkor formuleras som olikheter

Föreläsning 16 & 17

1. Värmeledning—grundläggande samband ($1D/2D$)
2. FEM-Ekv. för värmeledning i $1D$ (LQ. kap. 12)
3. Exempel: Termisk FEM-analys i $1D$
4. FEM-Ekv. för termoelastiska material
5. Ex.: Mekanisk FEM-analys med temperaturlast
6. FEM-Ekv. för Värmeledning i $2D$

Värmeledning



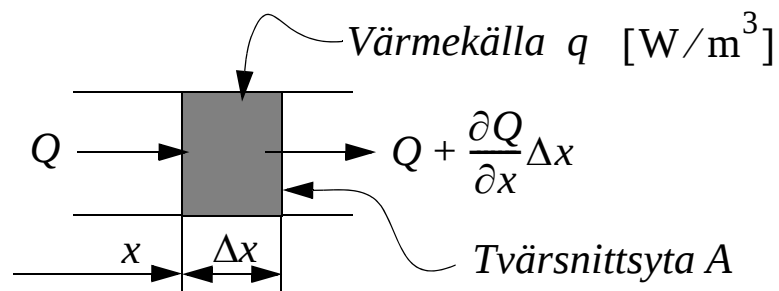
Fouriers lag:
("konstitutiv lag")

Medium med
tvärsnittsarea A
värmeledningstalet k
(värmekonduktivitet)

$$Q = -\frac{\partial T}{\partial x} \cdot A \cdot k$$

[W] $\left[\frac{^{\circ}\text{C}}{\text{m}}\right] [\text{m}^2] \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^{\circ}\text{C}}\right]$

Energibalans / tidsenhet (1D):



[energi in – energi ut] + [tillförd energi] = [inre energiändring]

$$\left[Q - \left(Q + \frac{\partial Q}{\partial x} \Delta x \right) \right] + [q \cdot \overbrace{A \Delta x}^{\text{volymelement}}] = \left[\frac{\partial T}{\partial t} \cdot \overbrace{c \cdot A \Delta x \rho}^{\text{masselement}} \right]$$

Värme-
kapacitivet $\left[\frac{\text{J}}{\text{kg}^{\circ}\text{C}} \right]$

$$\Rightarrow -\frac{\partial Q}{\partial x} + qA = cA\rho \frac{\partial T}{\partial t}$$

Med Fouriers lag erhålls: $\frac{\partial}{\partial x} \left(Ak \frac{\partial T}{\partial x} \right) + qA = cA\rho \frac{\partial T}{\partial t}$

Tillstånd där $\partial T / \partial t = 0$ kallas "steady state":

* specialfall av tekniskt intresse som behandlas här

$$\frac{d}{dx} \left(Ak \frac{dT}{dx} \right) + qA = 0$$

Randvillkor:



Rand med tvärsnittsarean A
Omgivningens temperatur T_∞

(i) föreskriven temperatur T

(ii) föreskrivet värme flöde $Q = -kA \, dT/dx$

specialfall $Q = 0$ (isolerad yta, inget värmeutbyte med omgivningen)

(iii) Speciella randvillkor:

Konvektion: $Q = h(T - T_\infty)A$

Strålning: $Q = \epsilon \sigma (T^4 - T_\infty^4)A$ (beaktas ej här!)

Emissionstal för ytan ϵ Stefan-Bolzmanns konstant σ

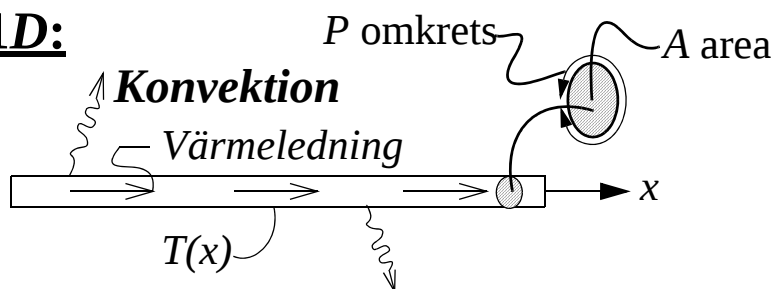
Värmeövergångstal $\left[\frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C} \right]$

Konvektion på begränsningsytor mellan ränder i 1D & 2D:

“fungerar som en negativ värmekälla”

Effekt bortförd pga
konvektion

1D:

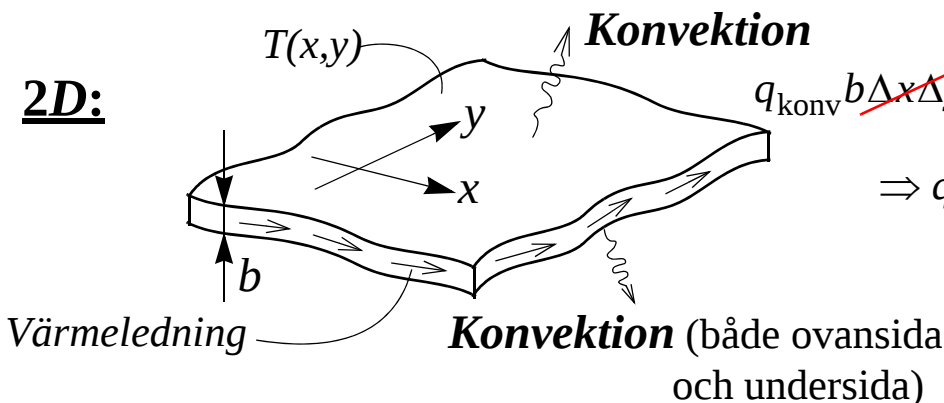


$$q_{\text{konv}} A \Delta x = h P \Delta x (T - T_\infty)$$

$$\Rightarrow q_{\text{konv}} A = h P (T - T_\infty)$$

enhet: [W/m]

2D:



$$q_{\text{konv}} b \Delta x \Delta y = 2 h \Delta x \Delta y (T - T_\infty)$$

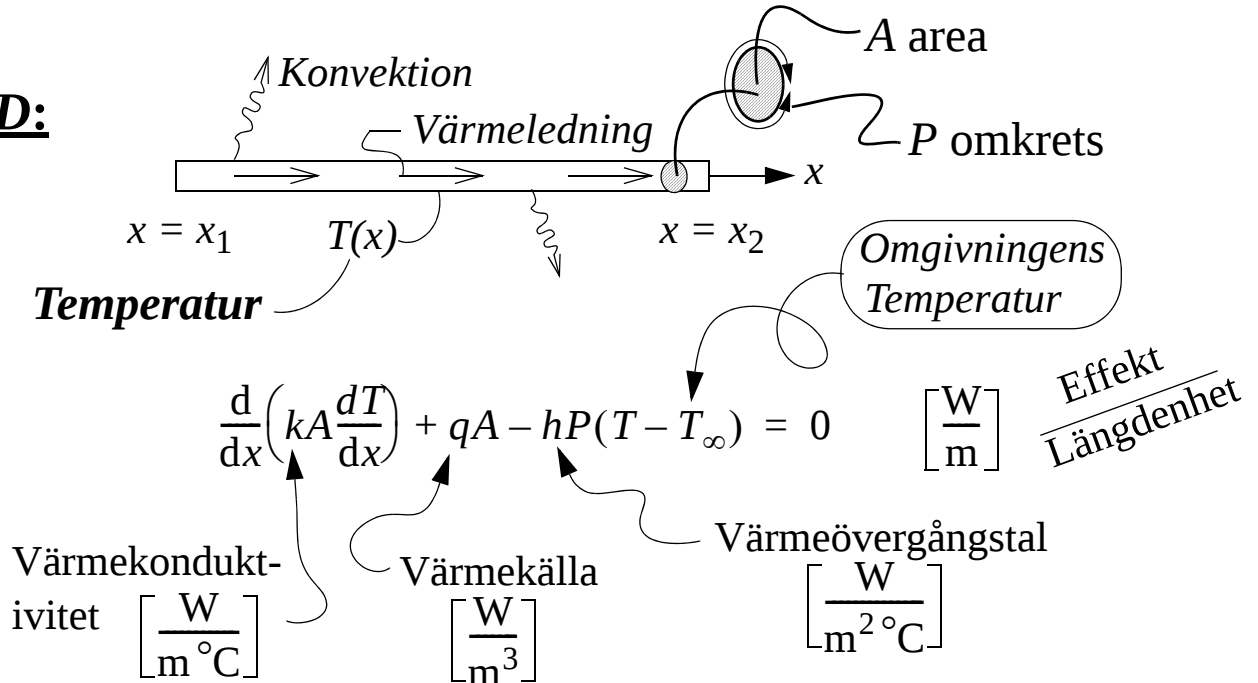
$$\Rightarrow q_{\text{konv}} b = 2 h (T - T_\infty)$$

enhet: [W/m²]

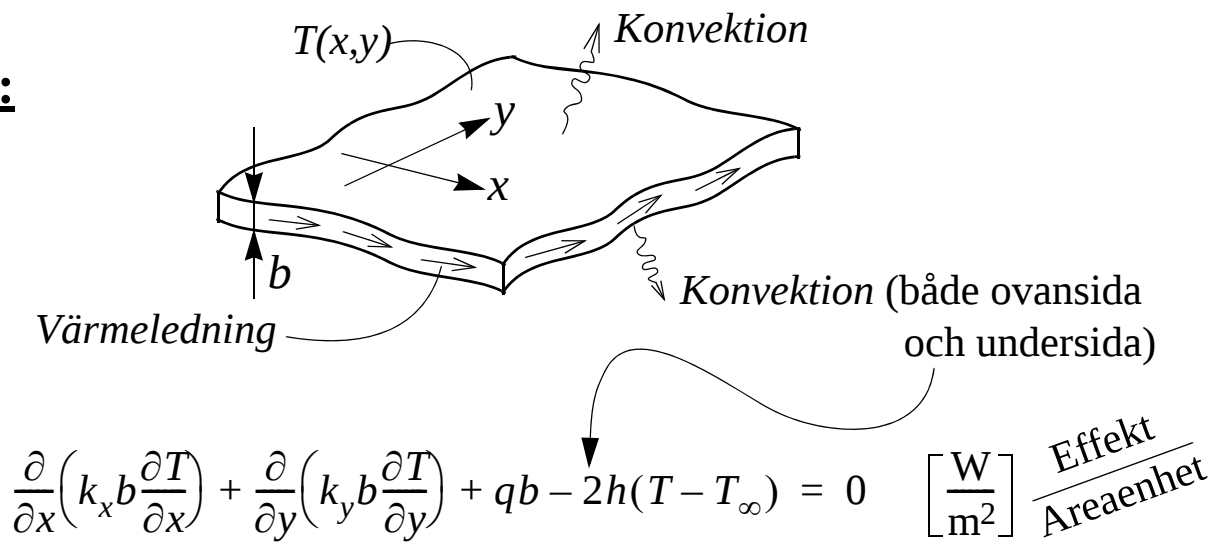
Värmeledning—sammanfattning (1D & 2D)

Under “steady state” förhållanden ($\frac{\partial T}{\partial t} = 0$) ges temperaturfördelningen av:

1D:



2D:



Randvillkor:

föreskriven temperatur T

eller föreskrivet värme flöde $Q = -kA \frac{dT}{dx}$ [W]

Speciella randvillkor:

isolerad yta $Q = 0$

konvektion från ändytan $Q = hA(T - T_{\infty})$
(blandat villkor)

FEM-Ekvationer (1D)—ta fram mha svag form

1. Viktad residual (multiplicera differentialekvationen med godtycklig viktfunction $v(x)$ och integrera)

$$\int_{x_1}^{x_2} v(x) \left(\frac{d}{dx} \left(kA \frac{dT}{dx} \right) + qA - hP(T - T_\infty) \right) dx = 0$$

2. Partialintegrera 1:a termen

$$\int_{x_1}^{x_2} v \frac{d}{dx} \left(kA \frac{dT}{dx} \right) dx = \left[v kA \frac{dT}{dx} \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{dv}{dx} kA \frac{dT}{dx} dx$$

vilket ger den svaga formen för värmeledningsproblemet i 1D:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dv}{dx} kA \frac{dT}{dx} dx + \int_{x_1}^{x_2} v h P T dx = \left[v kA \frac{dT}{dx} \right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} v q A dx + \int_{x_1}^{x_2} v h P T_\infty dx$$

Dela in i element och ansätt en temperaturfördelning i varje element m.h.a. formfunktioner. Beskriv även viktfunctionerna i varje element m.h.a. samma formfunktioner (Galerkin):

Temperaturansats: $T(x) = \mathbf{N} \mathbf{T}_e$ *vektor som innehåller elementets nodtemperaturer*

Viktfunction: $v(x) = \mathbf{N} \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{N}^T$ *godtycklig vektor*

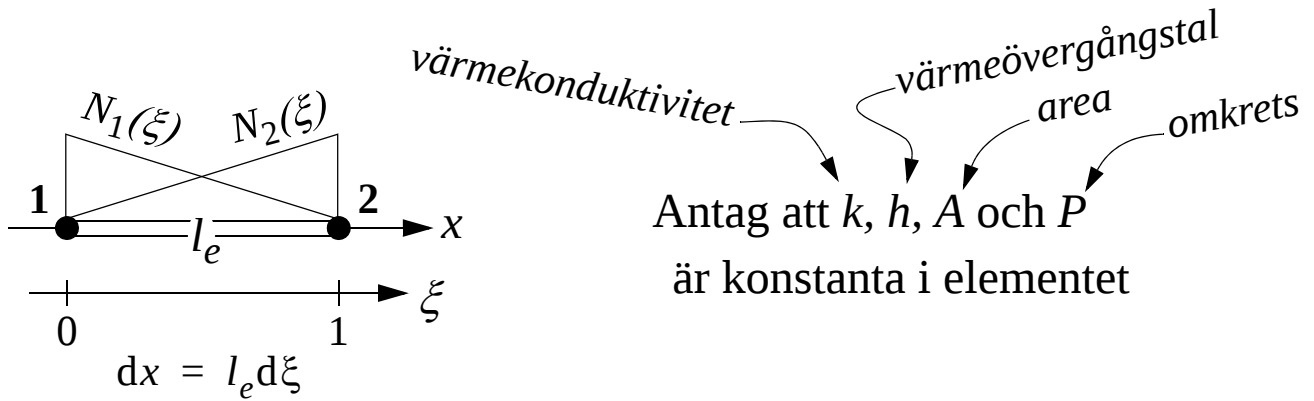
Derivator: $\frac{dT}{dx} = \frac{d\mathbf{N}}{dx} \mathbf{T}_e = \mathbf{B} \mathbf{T}_e$ $\frac{dv}{dx} = \frac{d\mathbf{N}^T}{dx} \boldsymbol{\beta}^T = \mathbf{B}^T \boldsymbol{\beta}^T$

FEM-Ekvationen för ett element blir:

$$\left[\underbrace{\int_{l_e} \mathbf{B}^T k A \mathbf{B} dx}_{\mathbf{K}_{vl}} + \underbrace{\int_{l_e} \mathbf{N}^T h P \mathbf{N} dx}_{\mathbf{K}_k} \right] \mathbf{T}_e = \underbrace{[\mathbf{N}^T (-Q)]_{x_1}^{x_2}}_{\substack{\text{Om värmekälla definierad i} \\ \text{den aktuella noden eller om} \\ \text{elementrand} = \text{yttre rand}}} + \underbrace{\int_{l_e} \mathbf{N}^T q A dx}_{\mathbf{f}_b} + \underbrace{\int_{l_e} \mathbf{N}^T h P T_\infty dx}_{\mathbf{f}_b}$$

$kA dT/dx = -Q$

Linjär ansats för temperaturfördelningen (1D)



Temperaturansats: $T = \underbrace{(1-\xi)}_{N_1} T_1 + \underbrace{\xi}_{N_2} T_2 = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{T}_e$

Temperaturgradient: $\frac{dT}{dx} = \frac{d\mathbf{N}}{dx} \mathbf{T}_e = \frac{d\mathbf{N}}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \mathbf{T}_e = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l_e} & \frac{1}{l_e} \end{bmatrix} \mathbf{T}_e = \mathbf{B} \mathbf{T}_e$

Elementmatriser

V.L.:

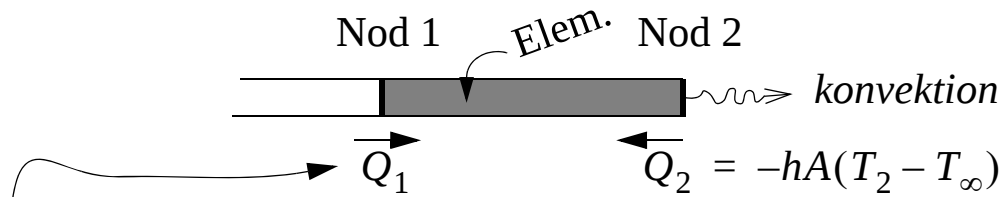
Värmeledning $\int_0^1 \mathbf{B}^T k A B l_e d\xi = \frac{kA}{l_e} \int_0^1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} d\xi = \frac{kA}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Konvektion $\int_0^1 \mathbf{N}^T h P \mathbf{N} l_e d\xi = h P l_e \int_0^1 \begin{bmatrix} 1-\xi \\ \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\xi & \xi \end{bmatrix} d\xi = \frac{h P l_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

H.L.:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_b &= \int_0^1 \mathbf{N}^T q A l_e d\xi + \int_0^1 \mathbf{N}^T h P T_\infty l_e d\xi = \\ &= A l_e \int_0^1 \begin{bmatrix} 1-\xi \\ \xi \end{bmatrix} q(\xi) d\xi + h P T_\infty l_e \underbrace{\int_0^1 \begin{bmatrix} 1-\xi \\ \xi \end{bmatrix} d\xi}_{= \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}} \end{aligned}$$

H.L. forts.: Om t.ex. nod 2 är en nod på randen och randvillkoret är i form av konvektion fås att



OBS! Notera att Q_1 kanselleras av $-Q_2$ i elementet till vänster vid assemblering av FEM-ekvationens högerled!

$$\begin{aligned}
 -Q &= kA \frac{dT}{dx} \\
 \Rightarrow [\mathbf{N}^T(-Q)]_0^1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ Q_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -Q_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ -hA(T_2 - T_\infty) \end{bmatrix} = \\
 &= - \begin{bmatrix} 0 \\ hAT_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1 \\ hAT_\infty \end{bmatrix} = - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & hA \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_r} \underbrace{\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_e} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ hAT_\infty \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}_s} + \begin{bmatrix} Q_1 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Flyttas till V.L.

konvektion från elementet "inre"

värmeledning

konvektion vid randnod

Totalt erhålls:

$$\underbrace{[\mathbf{K}_{vl} + \mathbf{K}_k + \mathbf{K}_r]}_{\mathbf{K}_e} \mathbf{T}_e = \underbrace{\mathbf{f}_s + \mathbf{f}_b}_{\mathbf{f}_e}$$

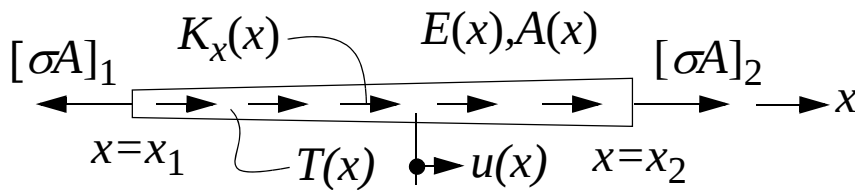
Alltså, för ett element fås FEM-ekvationen: $\mathbf{K}_e \mathbf{T}_e = \mathbf{f}_e$

Totala ekvationssystemet erhålls genom "Assemblering" av alla elementmatriser, d.v.s

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{K}_e \qquad \mathbf{F} = \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{F}_e$$

Antal element

FEM-Ekv. för Thermo-Elastiskt material (1D)



Jämvikt:

$$\frac{d(\sigma A)}{dx} + K_x A = 0$$

Jämvikt insatt i **Svag Form** ger

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dv}{dx} (\sigma A) dx = [v(\sigma A)]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} v K_x A dx$$

Konstitutiv Ekvation

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T \Leftrightarrow \sigma = E \varepsilon - E \varepsilon_0$$

Termisk längdutvidgningskoefficient [$1/^\circ\text{C}$]
 $\alpha \Delta T$
 Temperaturändring från referenstemp.

Insatt i svag form med $\varepsilon = du/dx$ ger

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dv}{dx} E A \frac{du}{dx} dx = \underbrace{[v(\sigma A)]_{x_1}^{x_2}}_{\text{Randlast}} + \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} v K_x A dx}_{\text{Volymslast}} + \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} \frac{dv}{dx} E A \varepsilon_0 dx}_{\text{Termisk last}}$$

Ny term!

FEM-Ekv. för ett element ($u = \mathbf{N} \mathbf{d}_e$ & $v = \mathbf{N}^T \boldsymbol{\beta}^T$)

$$\underbrace{\left[\int_{x_1}^{x_2} \mathbf{B}^T E A \mathbf{B} dx \right]}_{\mathbf{k}_e} \mathbf{d}_e = \underbrace{[\mathbf{N}^T (\sigma A)]_{x_1}^{x_2}}_{\mathbf{f}_s} + \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} \mathbf{N}^T K_x A dx}_{\mathbf{f}_b} + \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} \mathbf{B}^T E A \varepsilon_0 dx}_{\mathbf{f}_T}$$

Extra term i lastvektorn

Spänningsberäkning i “postprocessing”-steget:

$$\sigma = E \varepsilon - E \varepsilon_0 = E \frac{du}{dx} - E \varepsilon_0 = E \mathbf{B} \mathbf{d}_e - E \varepsilon_0$$

Använd samma interpolation som för mekanisk töjning

Formuleringarna i 2D & 3D är helt analoga med beskrivningen i 1D

Beräkningsgång: Termo–Elastisk Analys

1. Dela in soliden i element (diskretisera). Utnyttja samma FEM-nät i den termiska analysen som i den mekaniska analysen.
2. Genomför den **termiska analysen** (värmeledningsekvationen löses). Resultatet, temperaturfördelningen i soliden, kommer ut i form av nodtemperaturer.
3. Genomför den **mekaniska analysen** (spänningsberäkning). Använd samma interpolation för temperaturfördelningen som i förskjutningsansatsen.

Exempel i 1D:

Termisk analys $\Rightarrow \Delta T(x) = \mathbf{N} \Delta \mathbf{T}_e$

Termisk last

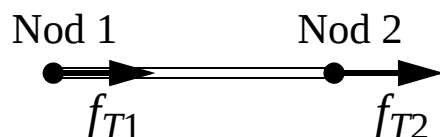
samma formfkn.
som i förskjutnings-
ansatsen

Temperaturförändring
i noderna

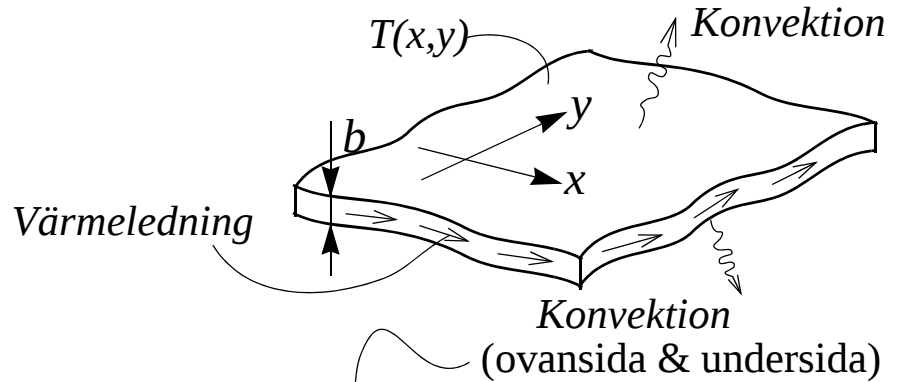
$$\varepsilon_0 = \alpha \Delta T = \alpha \mathbf{N} \Delta \mathbf{T}_e \Rightarrow \mathbf{f}_T = \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{B}^T E A \varepsilon_0 dx = \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{B}^T E A \alpha \mathbf{N} \Delta \mathbf{T}_e dx$$

T.ex. för ett linjärt element (naturlig koordinat: $0 \leq \xi \leq 1$) gäller om $E A \alpha$ antages vara konstant att

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \begin{bmatrix} 1 - \xi & \xi \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{B} = \frac{1}{l_e} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{f}_T &= \int_0^1 \mathbf{B}^T E A \alpha \mathbf{N} \Delta \mathbf{T}_e l_e d\xi = E A \alpha l_e \int_0^1 \frac{1}{l_e} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \xi & \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta T_1 \\ \Delta T_2 \end{bmatrix} d\xi \\ &= E A \alpha \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta T_1 \\ \Delta T_2 \end{bmatrix} = E A \alpha \underbrace{\frac{\Delta T_2 + \Delta T_1}{2}}_{\text{medelvärde i elementet!}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{T1} \\ f_{T2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$



FEM-Ekv. för värmeledning i 2D



Stark Form:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x b \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y b \frac{\partial T}{\partial y} \right) + qb - 2h(T - T_\infty) = 0$$

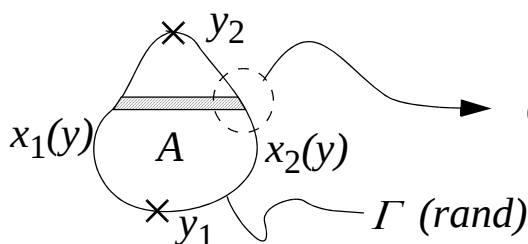
Svag Form:

1. Ställ upp viktad residual på integralform

$$\int_A v(x, y) \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x b \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y b \frac{\partial T}{\partial y} \right) + qb - 2h(T - T_\infty) \right) dA = 0$$

2. Partialintegrera term1 & term 2

$$x\text{-led: } \underbrace{\int_A \frac{\partial}{\partial x} \left(v k_x b \frac{\partial T}{\partial x} \right) dA}_{\text{skriv om m.h.a. Gauss sats}} = \int_A \frac{\partial v}{\partial x} k_x b \frac{\partial T}{\partial x} dA + \underbrace{\int_A v \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x b \frac{\partial T}{\partial x} \right) dA}_{\text{term 1}}$$



$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow dy = d\Gamma \cos \theta = n_x d\Gamma$$

$$\int_A \frac{\partial}{\partial x} F dx dy = \int_{y_1}^{y_2} \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial}{\partial x} F dx \right] dy =$$

$$= \int_{y_1}^{y_2} [F(x_2(y), y) - F(x_1(y), y)] dy = \int_{\Gamma} F n_x d\Gamma$$

forts. svag form för 2D-värmeledning:

Alltså, partialintegration av term 1 resulterar i

$$\int_A v \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x b \frac{\partial T}{\partial x} \right) dA = - \int_A \frac{\partial v}{\partial x} k_x \frac{\partial T}{\partial x} b dA + \int_{\Gamma} v k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x b d\Gamma$$

Partialintegration av term 2 ger på samma sätt

$$\int_A v \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y b \frac{\partial T}{\partial y} \right) dA = - \int_A \frac{\partial v}{\partial y} k_y \frac{\partial T}{\partial y} b dA + \int_{\Gamma} v k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y b d\Gamma$$

Insatt i svag form ger (låt $\frac{\partial}{\partial x}(\quad) = (\quad)_{,x}$):

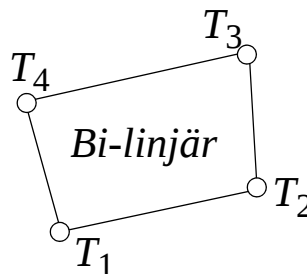
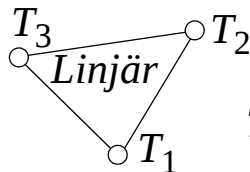
V.L.: $\int_A (v_{,x} k_x T_{,x} + v_{,y} k_y T_{,y}) b dA + \int_A v 2h T dA$

$$\begin{bmatrix} v_{,x} & v_{,y} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \begin{bmatrix} T_{,x} \\ T_{,y} \end{bmatrix}$$

H.L.: $\int_{\Gamma} v (k_x T_{,x} n_x + k_y T_{,y} n_y) b d\Gamma + \int_A v q b dA + \int_A v 2h T_{\infty} dA$

Dela in soliden i element; temperaturansats i varje element m.h.a. formfunktioner och beskriv viktfunktionen m.h.a. samma formfkn.

Ex. linjära
standardelement:



n_d = antal noder
i elementet

OBS! bara en frihetsgrad per nod!

Temperaturansats:

$$T(x, y) = N_1 T_1 + \dots + N_{n_d} T_{n_d} = \begin{bmatrix} N_1 & \dots & N_{n_d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_{n_d} \end{bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{T}_e$$

Temperaturgradient:

$$\begin{bmatrix} T_{,x} \\ T_{,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & \dots & N_{n_d,x} \\ N_{1,y} & \dots & N_{n_d,y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_{n_d} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{T}_e$$

“godtycklig
vektor”

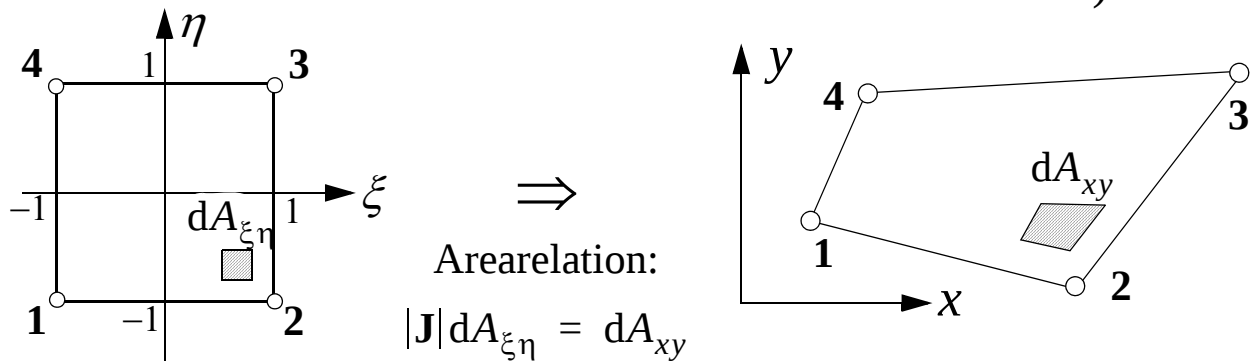
Viktfunktion: $v(x, y) = \beta^T \mathbf{N}^T \Rightarrow \begin{bmatrix} v_{,x} & v_{,y} \end{bmatrix} = \beta^T \mathbf{B}^T$

FEM-Ekvationen för ett 2D-element blir:

$$\begin{aligned}
 & \left[\int_{A_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} b dA + \int_{A_e} \mathbf{N}^T 2h \mathbf{N} dA \right] \mathbf{T}_e = \\
 & \quad \underbrace{\mathbf{K}_{vl}}_{n_d \times n_d} + \underbrace{\mathbf{K}_k}_{n_d \times n_d} \\
 & = \underbrace{\int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T (-Q_n) b d\Gamma}_{\text{värmeflöde över elementranden}} + \underbrace{\int_{A_e} \mathbf{N}^T q b dA}_{\text{värmekälla}} + \underbrace{\int_{A_e} \mathbf{N}^T 2h T_\infty dA}_{\text{konvektions-term}} \\
 & \quad \mathbf{f}_b \\
 & \text{där } Q_n = \begin{bmatrix} -T_{,x} & -T_{,y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Bidrar endast vid yttre rand, då bidrag från angränsande element tar ut varandra i det inre (se L.Q. 309)

Exempel: Bilinjärt 4-noders element (antag att $k = k_x = k_y$, h och b är konstanter):



Elementmatriser/vektor:

$$\begin{aligned}
 \text{Värmeledning:} \quad \mathbf{K}_{vl} &= kb \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{B} |J| d\xi d\eta \\
 \text{Konvektion:} \quad \mathbf{K}_k &= 2h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{N} |J| d\xi d\eta \\
 \mathbf{f}_b &= b \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T q |J| d\xi d\eta + 2h T_\infty \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T |J| d\xi d\eta
 \end{aligned}$$