

Hemuppgift 2 i FEM för ingenjörstillämpningar VT2013

Allmän information

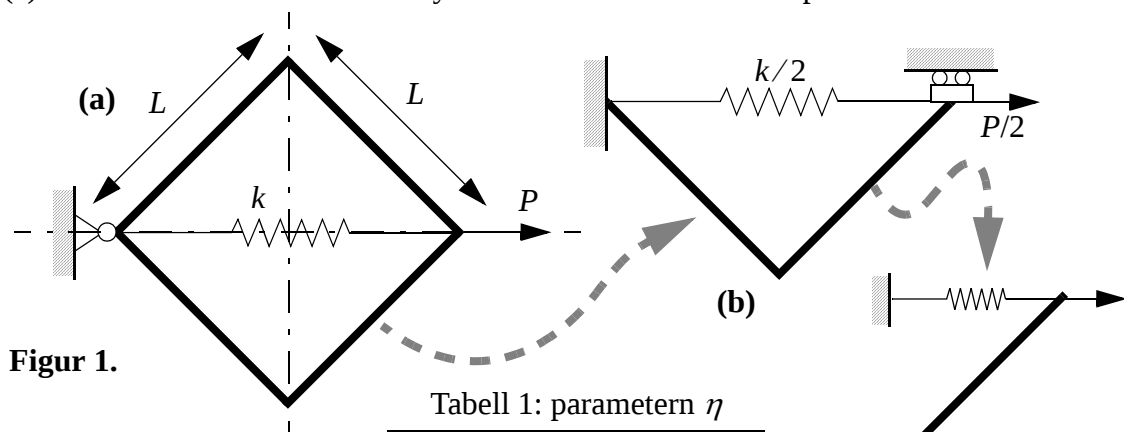
Uppgiften skall lämnas in för rättning senast kl. 18:00 onsdagen den 27 februari 2013 till någon av kursens lärare eller läggas i lådan för hemuppgifter utanför hållfasthetsläras expedition. Uppgiften skall lösas i grupper om två till tre teknologer.

OBS! Eventuella utskrifter från matematikprogram som t.ex. Maple eller Matlab får bara bifogas lösningen i form av en bilaga. Lösningar enbart bestående av sådana utskrifter kommer ej att bedömas!

Uppgifter:

Problem 1. (5 poäng) Figur 1a visar ett ramverk bestående av fyra balkar, alla med längden L , som är sammansatta i böjstyva hörn. Ramverket är förstärkt med en fjäder som har fjäderkonstanten $k = \eta EI/L^3$. Här är η en dimensionslös parameter som ges av tabell 1 (mm anger månaden i personnumret för parameterbestämning på försättsbladet). Balkarna har ett cirkulärt tvärsnitt med radien r och elasticitetsmodulen E . Ramverket belastas med en kraft P enligt Figur 1a, där även balkarnas längder framgår. En FEM-analys skall genomföras för att bestämma ramverkets styvhet, d.v.s. $k_{ram} = P/\delta$, där δ är förskjutningen i kraften P 's riktning. Om symmetri utnyttjas (markerat i Figur 1a), räcker det med att en 1/4-del av ramverket analyseras, se Figur 1b. Modellera 1/4-delen med ett kombinerat balk/stångelement och ett fjäderelement och genomför analysen enligt

- Bestäm randvillkoren för 1/4-delsmodellen (formuleras enklast i det globala koordinatsystemet), yttre kraft och fjäderkonstanten för fjäderns symmetridel (ej samma som i 1/2-delsmodellen). Hur symmetri/antisymmetri kan utnyttjas diskuteras bl.a. i LQ sid. 256-265.
- Ta fram balk/stångelementets styvhetsmatris i det globala koordinatsystemet och addera fjäderns styvhet på lämpligt ställe. Figur 2 visar hur elementstyvhetsmarisen transformeras från lokalt till globalt koordinatsystem baserat på en dimensionslös form (praktisk vid användning av t.ex. Matlab. OBS! Notera att även fjäderns styvhet måste ges på dimensionslös form innan assemblering).
- Lös det reducerade ekvationssystemet och bestäm P/δ för specialfallet $L/r = 25$.

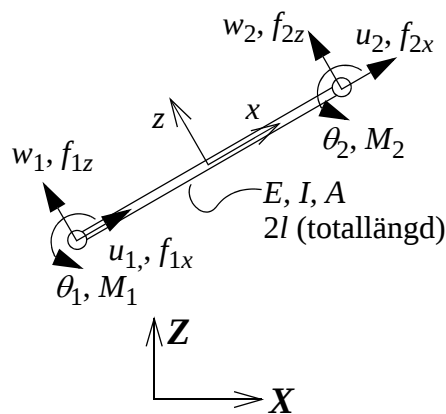


Figur 1.

Tabell 1: parametern η

mm	η
01 – 04	3
05 – 08	6
09 – 12	12

OBS! Styvheter och randvillkor är ej markerade i 1/4-delsmodellen.

Figur 2. Två-noders balk/stångelement med 6 d.o.f. dimensionslös beskrivning

Relationen mellan elementets nodförskjutningar (u_i, w_i, q_i) och nodkrafter (f_{ix}, f_{iz}, M_i) kan uttryckas med normerade storheter enligt (praktisk formulering vid analys med t.ex. Matlab)

$$\bar{\mathbf{k}}_e \bar{\mathbf{d}}_e = \bar{\mathbf{f}}_e \Rightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & -3 & 2 \\ -\lambda & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{w}_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{w}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}_{1x} \\ \bar{f}_{1z} \\ \bar{M}_1 \\ \bar{f}_{2x} \\ \bar{f}_{2z} \\ \bar{M}_2 \end{bmatrix}$$

där $u_i = \bar{u}_i l$, $w_i = \bar{w}_i l$, $f_{ix} = \bar{f}_{ix} EI/l^2$, $f_{iz} = \bar{f}_{iz} EI/l^2$, $M_i = \bar{M}_i EI/l$ för $i = 1, 2$ och där parametern $\lambda = Al^2/I$. För ett homogent cirkulärt (radie r) tvärsnitt erhålles $\lambda = 4(l/r)^2$.

Den dimensionslösa elementstyvhetsmatrisen relaterad till det globala koordinat-systemet fås sedan på vanligt sätt med transformationen $\bar{\mathbf{K}}_e = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{k}}_e \mathbf{T}$, som om $\bar{\mathbf{k}}_e$ och $\mathbf{T}$ delas upp i submatriserna (dimension 3×3)

$$\bar{\mathbf{k}}_e = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} & \bar{\mathbf{B}} \\ \bar{\mathbf{B}}^T & \bar{\mathbf{C}} \end{bmatrix}, \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_2 \end{bmatrix} \text{ där } \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} l_x & m_x & 0 \\ l_z & m_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

kan skrivas som

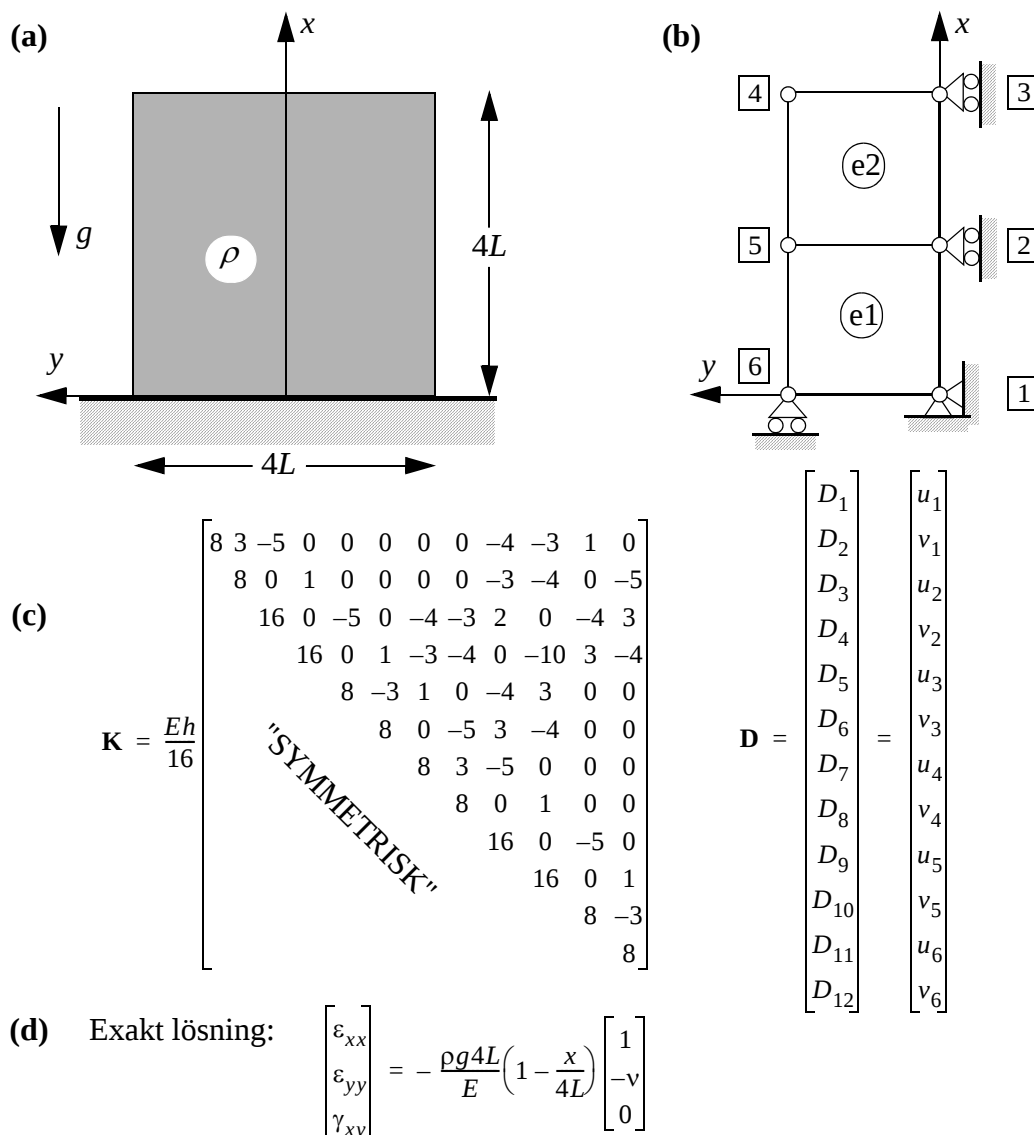
$$\bar{\mathbf{K}}_e = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{k}}_e \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_2^T \bar{\mathbf{A}} \mathbf{T}_2 & \mathbf{T}_2^T \bar{\mathbf{B}} \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{T}_2^T \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{T}_2 & \mathbf{T}_2^T \bar{\mathbf{C}} \mathbf{T}_2 \end{bmatrix}.$$

Komponenterna l_x, l_z, m_x, m_z , i matrisen $\mathbf{T}_2$ är riktningscosiner, se t.ex. sidorna 112-114 i läroboken (LQ) eller sidorna 10.6-10.7 i OH-materialet.

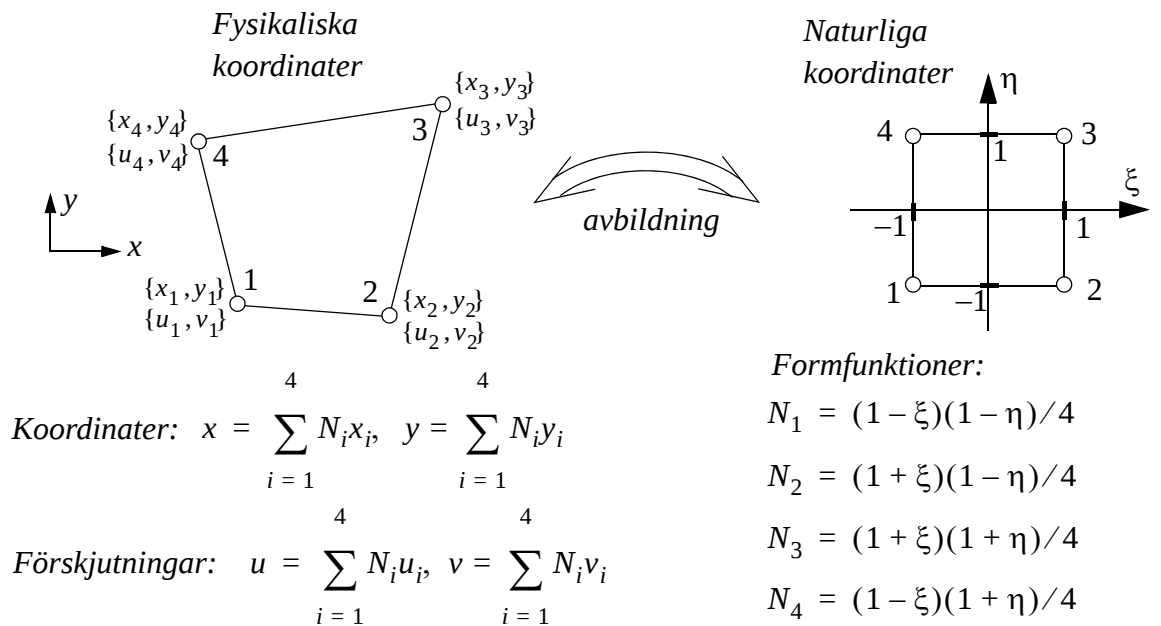
Problem 2. (5 poäng) En plan kvadratisk skiva med sidan $4L$ och tjockleken h vilar på ett stelt glatt underlag, se Figur 2(a). Skivans material är linjärelastiskt med elasticitetsmodulen E och Poissons tal $\nu = 1/3$. Antag att plan spänning råder. Skivan belastas av sin egentyngd, vilken beror av skivans densitet ρ och tyngdaccelerationen g . Figur 2(b) visar en enkel FEM-modell där symmetrin i problemet har utnyttjats. FEM-modellen består av två kvadratiske 4-noders element. En sammanfattning av elementtypen visas i Figur 4. Den resulterande globala styvhetsmatrisen $\mathbf{K}$ med tillhörande förskjutningsfrihetsgrader $\mathbf{D}$ är given i Figur 2(c). $\mathbf{K}$ finns även i digitalt format på kurshemsidan. Fullfölj FEM-analysen enligt stegen nedan:

- Ställ upp alla förskjutningsrandvillkor.
- Beräkna bidraget till nodlastvektorn från skivans egentyngd.
- Inför förskjutningsrandvillkoren, ställ upp det reducerade ekvationssystemet och lös de obekanta förskjutningarna i $\mathbf{D}$.
- Beräkna de obekanta krafterna i nodlastvektorn $\mathbf{F}$, d.v.s. reaktionskrafterna. Är global jämvikt uppfylld, d.v.s. är reaktionskrafterna i balans med skivans egentyngd?
- Beräkna töjningarna i element 1 för $y = 0$ och $x = 0$, $x = L$ och $x = 2L$. Jämför med exakt lösning given i Figur 2(d).

Figur 2.



ISOPARAMETRISKT 4-NODERS ELEMENT (2D)



Töjningar: $\epsilon = \mathbf{B} \mathbf{d}_e$ där $\mathbf{d}_e^T = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4]$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \ \mathbf{B}_2 \ \mathbf{B}_3 \ \mathbf{B}_4], \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial y \\ \partial N_i / \partial y & \partial N_i / \partial x \end{bmatrix}$$

Partialderivatorna $\partial N_i / \partial x$ och $\partial N_i / \partial y$ fås ur

$$\begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x \\ \partial N_i / \partial y \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial \xi \\ \partial N_i / \partial \eta \end{bmatrix} \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial y / \partial \xi \\ \partial x / \partial \eta & \partial y / \partial \eta \end{bmatrix}$$

där t.ex. $\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} x_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} x_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \xi} x_4$

Elementstyvhetsmatrisen: $k_e = \int_{A_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} h dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} h |\mathbf{J}| d\xi d\eta$

Här kan matrisen $\mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B}$ delas upp i submatriser enligt: $\mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^T \\ \mathbf{B}_2^T \\ \mathbf{B}_3^T \\ \mathbf{B}_4^T \end{bmatrix} \mathbf{C} [\mathbf{B}_1 \ \mathbf{B}_2 \ \mathbf{B}_3 \ \mathbf{B}_4] = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^T \mathbf{C} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_1^T \mathbf{C} \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_1^T \mathbf{C} \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_1^T \mathbf{C} \mathbf{B}_4 \\ & \mathbf{B}_2^T \mathbf{C} \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_2^T \mathbf{C} \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_2^T \mathbf{C} \mathbf{B}_4 \\ \text{Sym-} & & \mathbf{B}_3^T \mathbf{C} \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_3^T \mathbf{C} \mathbf{B}_4 \\ \text{metrisk!} & & & \mathbf{B}_4^T \mathbf{C} \mathbf{B}_4 \end{bmatrix}$

Figur 4.

Försättsblad - Hemuppgift 2 i FEM för ingenjörstillämpningar

Namn och personnummer (1):

Namn och personnummer (2):

Namn och personnummer (3):

Personnummer för parameterbestämning:

åå		mm		dd	

Svar problem 1: (redovisa fullständig lösning för (a)-(c) på separata sidor)Ramverkets styvhet, $k_{\text{ram}} = P/\delta =$ **Svar problem 2:** (redovisa fullständiga lösningar för (a)-(e) på separata sidor)

$$D_1 = \quad D_2 = \quad D_3 = \quad D_4 =$$

$$D_5 = \quad D_6 = \quad D_7 = \quad D_8 =$$

$$D_9 = \quad D_{10} = \quad D_{11} = \quad D_{12} =$$

Töjningarna i element 1:

$$x = 0, y = 0: \quad \epsilon_{xx} = \quad \epsilon_{yy} = \quad \gamma_{xy} =$$

$$x = L, y = 0: \quad \epsilon_{xx} = \quad \epsilon_{yy} = \quad \gamma_{xy} =$$

$$x = 2L, y = 0: \quad \epsilon_{xx} = \quad \epsilon_{yy} = \quad \gamma_{xy} =$$