Tentamen i FEM för ingenjörstillämpningar (SE1025) den 5 juni 2009 kl. 8-13.

Resultat kommer att finnas tillgängligt senast den 23 juni. Klagomål på rättningen skall vara framförda senast en månad därefter.

OBS! Tentand är skyldig att visa legitimation plus kvitto på erlagd kåravgift. Skriv endast på en sida av bladet. Skriv tydligt namn och personnummer på varje blad. Lösningar som är otydliga och svåra att följa kommer inte att bedömmas.

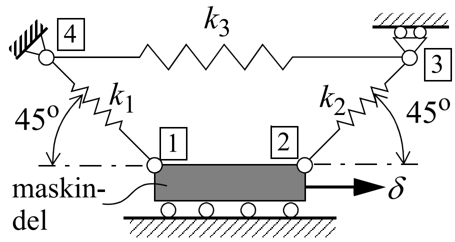
Hjälpmedel: Formelsamling i Hållfasthetslära, TEFYMA, BETA och räknedosa.

Examinator: Jonas Faleskog, tel. 790 8977.

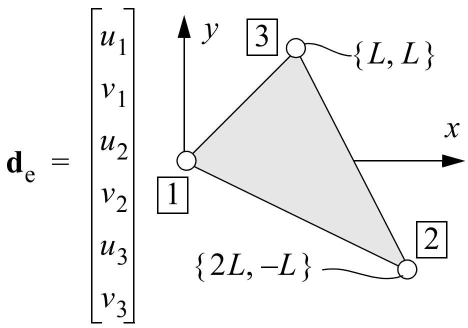
Betygsgränser: F(underkänd) $p \le 10$; FX (möjlighet till kompletteringstentamen) $p \ge 11$; E $p \ge 13$; D $p \ge 15$; C $p \ge 17$; B $p \ge 20$; A $p \ge 23$, där (p = tenamen+bonus).

---

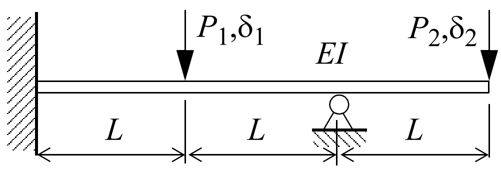
1. [5 poäng] En maskindel som enbart kan röra sig i horisontell led är kopplad till två fjädrar via noderna 1 och 2. Maskindelen kan i sammanhanget betraktas som stel. Systemet innehåller dessutom en tredje fjäder, se figuren till höger. Maskindelen påtvingas en förskjutning δ åt höger. Bestäm den kraft som krävs för att åstadkomma detta.



2. [3 poäng] Figuren till höger visar ett triangelelement, där nodkoordinaterna är givna. Elementets nodförskjutningsvektor visas också i figuren, där u_i och v_i är nodförskjutningar i x- respektive y-led för noden i. Förskjutningen i t.ex. x-led ges för det aktuella elementet av en linjär ansats på formen $u = c_0 + c_1 x/L + c_2 y/L$. Identifiera koefficienterna c_0, c_1 och c_2 i termer av nodförskjutningarna u_1, u_2 och u_3, samt bestäm elementets formfunktioner.



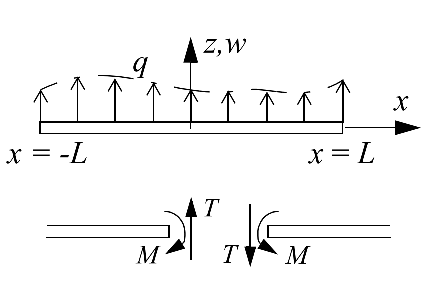
3. [3 poäng] En konsolbalk som är upplagd på ett stöd belastas med krafterna P_1 och P_2. Vid belastningen förskjuts lastangreppspunkterna δ_1, respektive δ_2. Den elastiska energin, W, och komplementära elastiska energin, $\overline{W}$, för balken kan då uttryckas som



$$W = \frac{3}{26}\frac{EI}{L^3}(80\delta_1^2 + 24\delta_1\delta_2 + 7\delta_2^2) \text{ och } \overline{W} = \frac{1}{192}\frac{L^3}{EI}(7P_1^2 - 24P_1P_2 + 80P_2^2).$$

Tag fram relationen mellan krafter och förskjutningar både m.h.a. Castiglianos 1:a och 2:a sats och visa att de två resulterande ekvationssystemen är identiska.

4. Figuren till höger visar en balk som belastas av sin egentyngd per volymsenhet, ρg, där g är tyngdaccelerationen och ρ är balkens densitet, vilken varierar enligt $\rho(x) = \rho_0(1 + x/(2L))$. Balken har elasticitetsmodulen E, yttröghetsmomentet I och tvärsnittsarean A. Balkens utböjning (vertikal förskjutning), w, ges av lösningen till differentialekvationen



$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2 w}{dx^2}\right) + \rho_0 g A\left(1 + \frac{x}{2L}\right) = 0$$

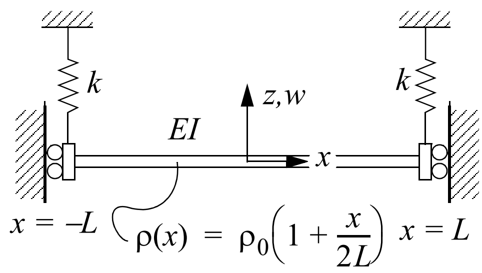
(a) [1 poäng] Antag att ρ_0, g och A är konstanter och visa att den svaga formen är

$$\int_{-L}^{L} \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} EI \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} \mathrm{d}x = [vT]_{-L}^{L} - \left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} M\right]_{-L}^{L} - \rho_0 g A \int_{-L}^{L} v\left(1 + \frac{x}{2L}\right) \mathrm{d}x,$$

där v är en godtycklig viktfunktion, T är tvärkraft och M är moment (enligt figuren ovan). Sambanden $T = -(EIw'')'$ och $M = -EIw''$ har utnyttjats vid ränderna.

(b) [2 poäng] Ta fram FEM-ekvationen (anv. Galerkins metod) till den svaga formen ovan för ett element, d.v.s. identifiera storheterna i ekvationen $\mathbf{k}_e \mathbf{d}_e = \mathbf{f}_e$.

(c) [4 poäng] I en tillämpning enligt figuren nedan är balken upphängd i två vertikala fjädrar, vardera med fjäderkonstanten $k = EI/L^3$. Dessutom är balkens ändar förhindrade att rotera. Balken belastas enbart av sin egentyngd. Analysera balken med ett två-noders balkelemet och beräkna dess förskjutnig i punkten $x = 0$.

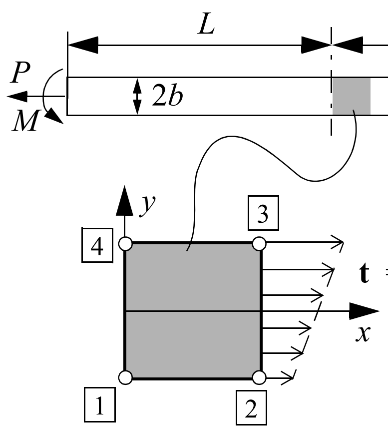


5. En rektangulär skiva enligt figuren nedan ($b \ll L$, tjocklek h) belastas med en kombination av ren böjning och ren dragning. Materialet är isotropt linjärt elastiskt med elasticitetsmodulen E och Poissons tal $\nu = 0$, där plan spänning antas gälla. En förenklad FEM-analys skall genomföras där endast delen närmast till höger om symmetrisnittet betraktas och modelleras med ett kvadratiskt bilinjärt 4-noders element. Koordinaterna för de fyra noderna i nummerordning är: $\{0, -b\}$, $\{2b, -b\}$, $\{2b, b\}$ och $\{0, b\}$. Kombinationen av normalkraft och moment anbringas elementet i form av en spänningsvektor, $\mathbf{t}$, verkande på ytan mellan nod 2 och 3, se figuren nedan.

(a) [1 poäng] Hur många frihetsgrader måste låsas, d.v.s. föreskrivas med förskjutningen noll för att elementet ej skall stelkroppsförflyttas eller stelkroppsrotera? Ange vilka (observera att flera alternativ finns)?

(b) [2 poäng] Bestäm spänningsvektorns bidrag till nodlastvektorn $\mathbf{F}$.

(c) [4 poäng] Bestäm normalspänningen i x-riktningen i elementet som funktion av läget. Utgå ifrån nodförskjutningarna givna i figuren. Är lösningen exakt?



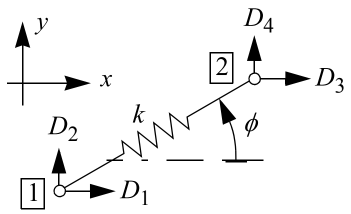
$$\mathbf{t} = \sigma_N \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \sigma_M \begin{bmatrix} y/b \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_N = \frac{P}{2bh},\ \sigma_M = \frac{3M}{2b^2 h}$$

$$\mathbf{d}_\mathrm{e} = \begin{bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \\ d_{3x} \\ d_{3y} \\ d_{4x} \\ d_{4y} \end{bmatrix} = \frac{2b}{E}\sigma_N \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{4b}{3E}\sigma_M \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

FORMELBLAD (komplement till kap. 21. i Formelsamling i Hållfasthetslära)

GLOBAL BESKRIVNING FÖR ENDIMENSIONELLA ELEMENT



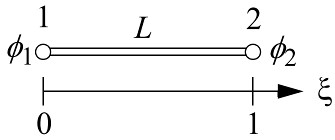
$$\mathbf{K}_e = k\begin{bmatrix} \mathbf{a} & -\mathbf{a} \\ -\mathbf{a} & \mathbf{a} \end{bmatrix} \quad \text{där} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} c^2 & sc \\ sc & s^2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} c = \cos\phi \\ s = \sin\phi \end{matrix}$$

$$\text{alternativt} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} l_{12}^2 & l_{12}m_{12} \\ l_{12}m_{12} & m_{12}^2 \end{bmatrix}$$

$$l_{12} = \cos\phi_x = (x_2 - x_1)/L$$
$$m_{12} = \cos\phi_y = (y_2 - y_1)/L$$
$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

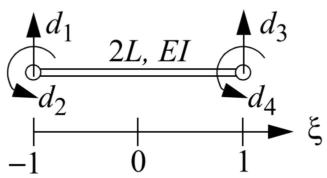
OLIKA FINITA ELEMENT

1D:



$$\phi(\xi) = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} N_1 = 1 - \xi \\ N_2 = \xi \end{matrix} \qquad \mathbf{B} = \frac{d\mathbf{N}}{dx} = \frac{1}{L}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Balkelement:



Utböjning: $w(\xi) = N_1 d_1 + N_2 d_2 + N_3 d_3 + N_4 d_4 = \mathbf{N}\mathbf{d}_e$, $\quad \mathbf{B} = \dfrac{d^2\mathbf{N}}{dx^2} = \dfrac{1}{L^2}\dfrac{d^2\mathbf{N}}{d\xi^2}$

$$N_1 = (2 - 3\xi + \xi^3)/4$$
$$N_2 = L(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3)/4$$
$$N_3 = (2 + 3\xi - \xi^3)/4$$
$$N_4 = L(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)/4$$

$$\int_{-1}^{1} \mathbf{B}^T\mathbf{B}L\,d\xi = \frac{1}{2L^3}\begin{bmatrix} 3 & 3L & -3 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & 2L^2 \\ -3 & -3L & 3 & -3L \\ 3L & 2L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \qquad \int_{-1}^{1} \mathbf{N}^T(\alpha + \beta\xi)L\,d\xi = \frac{\alpha}{3}\begin{bmatrix} 3L \\ L^2 \\ 3L \\ -L^2 \end{bmatrix} + \frac{\beta}{15}\begin{bmatrix} -6L \\ -L^2 \\ 6L \\ -L^2 \end{bmatrix}$$

Numerisk integration (Gauss-kvadratur):

$$I = \int_{-1}^{1} F(\xi)\,d\xi \approx \sum_{i=1}^{N_i} F(\xi_i)w_i \qquad I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \approx \sum_{i=1}^{N_i}\sum_{j=1}^{N_j} F(\xi_i,\eta_j)w_i w_j$$

$$I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta \approx \sum_{i=1}^{N_i}\sum_{j=1}^{N_j}\sum_{k=1}^{N_k} F(\xi_i,\eta_j,\zeta_k)w_i w_j w_k$$

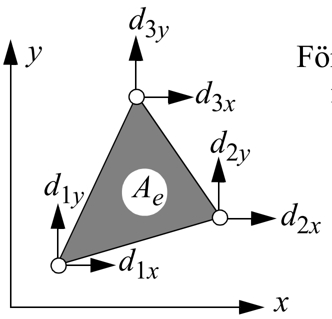
146 CHAPTER 7 FEM FOR TWO-DIMENSIONAL SOLIDS

Table 7.1. Gauss integration points and weight coefficients

m	ξ_j	w_j	Accuracy n
1	0	2	1
2	$-1/\sqrt{3}$, $1/\sqrt{3}$	1,1	3
3	$-\sqrt{0.6}$, 0, $\sqrt{0.6}$	5/9, 8/9, 5/9	5
4	−0.861136, −0.339981, 0.339981, 0.861136	0.347855, 0.652145, 0.652145, 0.347855	7
5	−0.906180, −0.538469, 0, 0.538469, 0.906180	0.236927, 0.478629, 0.568889, 0.478629, 0.236927	9
6	−0.932470, −0.661209, −0.238619, 0.238619, 0.661209, 0.932470	0.171324, 0.360762, 0.467914, 0.467914, 0.360762, 0.171324	11

Plana element (2D):

3-sidigt triangelelement:



Förskjutningar:

$$\begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \mathbf{d}_e = \mathbf{N}\mathbf{d}_e \qquad \mathbf{d}_e = \begin{bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \\ d_{3x} \\ d_{3y} \end{bmatrix}$$

$$N_1 = \frac{1}{2A_e}[(y_2 - y_3)(x - x_2) + (x_3 - x_2)(y - y_2)]$$

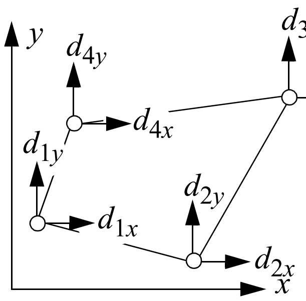
$$N_2 = \frac{1}{2A_e}[(y_3 - y_1)(x - x_3) + (x_1 - x_3)(y - y_3)]$$

$$N_3 = \frac{1}{2A_e}[(y_1 - y_2)(x - x_1) + (x_2 - x_1)(y - y_1)]$$

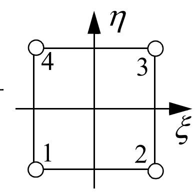
Töjningar:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{B}\,\mathbf{d}_e \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \partial N_i/\partial x & 0 \\ 0 & \partial N_i/\partial y \\ \partial N_i/\partial y & \partial N_i/\partial x \end{bmatrix}$$

4-sidigt isoparametriskt element:



$$x = \sum_i^4 N_i x_i \qquad y = \sum_i^4 N_i y_i$$



$$N_1 = (1-\xi)(1-\eta)/4, \quad N_2 = (1+\xi)(1-\eta)/4$$

$$N_3 = (1+\xi)(1+\eta)/4, \quad N_4 = (1-\xi)(1+\eta)/4$$

Förskjutningar:

$$\begin{bmatrix} u(\xi,\eta) \\ v(\xi,\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \mathbf{d}_e = \mathbf{N}\mathbf{d}_e$$

Töjningar:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{B}\,\mathbf{d}_e \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \partial N_i/\partial x & 0 \\ 0 & \partial N_i/\partial y \\ \partial N_i/\partial y & \partial N_i/\partial x \end{bmatrix}$$

där

$$\begin{bmatrix} \partial N_i/\partial x \\ \partial N_i/\partial y \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \partial N_i/\partial \xi \\ \partial N_i/\partial \eta \end{bmatrix} \qquad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \partial x/\partial \xi & \partial y/\partial \xi \\ \partial x/\partial \eta & \partial y/\partial \eta \end{bmatrix}$$

———— ○ ———— ○ ———— ○ ———— ○ ————

Spänningar:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{C}\varepsilon \qquad \mathbf{C} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \text{(P.S)} \qquad \mathbf{C} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \text{(P.D)}$$

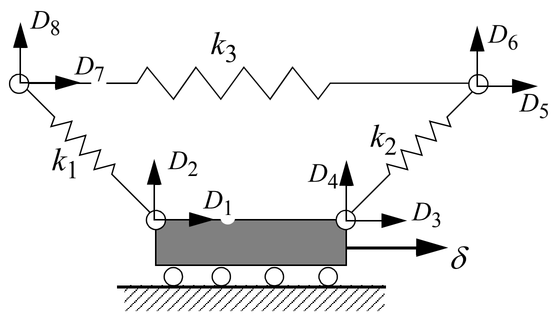
FEM Ekv. (ett element):

$$\left[\int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B}\, dV\right] \mathbf{d}_e = \left[\int_{S_e} \mathbf{N}^T \mathbf{t}\, dS + \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{K}\, dV\right]$$

t = spänningsvektor
K = volymskraft

LÖSNINGSFÖRSLAG: FEM FÖR INGENJÖRSTILLÄMPNINGAR, 5 JUNI, 2009

1.



Randvillkor: $D_2 = D_4 = D_6 = D_7 = D_8 = 0$

$D_1 = D_3 = \delta$ (*förskriven förskjutning*)

=> R_1, R_3 (*reaktionskrafter*)

Elementstyvhetsmatriser: $\mathbf{K}_i = k_i \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i & -\mathbf{a}_i \\ -\mathbf{a}_i & \mathbf{a}_i \end{bmatrix}$

$$\mathbf{a}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Red. Ekvations-syst. (Ekv. 1, 3, 5):

$$\begin{bmatrix} k_1/2 & 0 & 0 \\ 0 & k_2/2 & -k_2/2 \\ 0 & -k_2/2 & k_2/2 + k_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta \\ \delta \\ D_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_3 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} D_5 = \dfrac{k_2}{k_2 + 2k_3}\delta \\ R_1 = \delta k_1/2 \\ R_3 = \delta k_2 k_3/(k_2 + 2k_3) \end{cases}$$

Kraften som krävs för att förskjuta maskindelen δ blir: $R_1 + R_3 = \left(\dfrac{k_1}{2} + \dfrac{k_2 k_3}{k_2 + 2k_3}\right)\delta$

2.

Ansatsen utvärderad i noderna ger:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= c_0 \\ u_2 &= c_0 + 2c_1 - c_2 \\ u_3 &= c_0 + c_1 + c_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} c_0 = u_1 \\ c_1 = (u_2 + u_3 - 2u_1)/3 \\ c_2 = (2u_3 - u_1 - u_2)/3 \end{cases}$$

Insatt i ansatsen ger:

$$u(x, y) = \underbrace{\frac{1}{3}\left(3 - \frac{2x}{L} - \frac{y}{L}\right)}_{N_1} u_1 + \underbrace{\frac{1}{3}\left(\frac{x}{L} - \frac{y}{L}\right)}_{N_2} u_2 + \underbrace{\frac{1}{3}\left(\frac{x}{L} + \frac{2y}{L}\right)}_{N_3} u_3$$

Formfunktioner: N_1 N_2 N_3

3.

Castiglianos 1:a sats:

$$P_i = \frac{\partial W}{\partial \delta_i} \Rightarrow \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{3}{13}\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 80 & 12 \\ 12 & 7 \end{bmatrix}}_{\text{Styvhetsmatris } \mathbf{k}}\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}$$

Castiglianos 2:a sats:

$$\delta_i = \frac{\partial \overline{W}}{\partial P_i} \Rightarrow \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{96}\frac{L^3}{EI}\begin{bmatrix} 7 & -12 \\ -12 & 80 \end{bmatrix}}_{\text{Flexibilitetsmatris } \alpha}\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

Om idenstiska relationer: $\mathbf{I} = \mathbf{k}\alpha = \dfrac{3}{13}\dfrac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 80 & 12 \\ 12 & 7 \end{bmatrix}\dfrac{1}{96}\dfrac{L^3}{EI}\begin{bmatrix} 7 & -12 \\ -12 & 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ok!

4(a).

Multiplicera med viktfkn.: $\displaystyle\int_{-L}^{L} v\left[(EIw'')'' + \rho_0 gA\left(1+\frac{x}{2L}\right)\right]\mathrm{d}x = 0 \quad (1)$

Partialintegrera: $\displaystyle\int_{-L}^{L} v[(EIw'')'']\mathrm{d}x = [v(EAw'')']_{-L}^{L} - \int_{-L}^{L} v'[(EIw'')']\mathrm{d}x =$

$$= [v(EAw'')']_{-L}^{L} - [v'(EAw'')]_{-L}^{L} + \int_{-L}^{L} v''EIw''\mathrm{d}x \quad (2)$$

(2) insatt i (1) med $T = -(EIw'')'$ och $M = -EIw''$ ger svag form:

$$\int_{-L}^{L} v''EIw''\mathrm{d}x = [vT]_{-L}^{L} - [v'M]_{-L}^{L} - \rho_0 gA\int_{-L}^{L} v\left(1+\frac{x}{2L}\right)\mathrm{d}x$$

4(b). Förskjutningsansats: $w = \mathbf{N}\mathbf{d}_e \qquad \dfrac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{\mathrm{d}^2\mathbf{N}}{\mathrm{d}x^2}\mathbf{d}_e = \mathbf{B}\mathbf{d}_e$

Viktfunktion: $v = \mathbf{N}\mathbf{b}_e = \mathbf{b}_e^T\mathbf{N}^T \qquad \dfrac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2} = \mathbf{b}_e^T\dfrac{\mathrm{d}^2\mathbf{N}^T}{\mathrm{d}x^2} = \mathbf{b}_e^T\mathbf{B}^T$

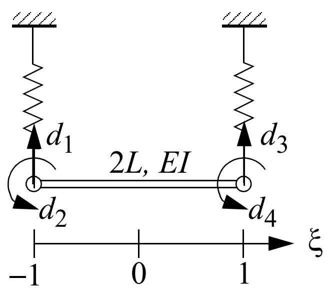
Insatt i svag form ger:

$$\mathbf{b}_e^T\underbrace{\left[\int_{-L}^{L}\mathbf{B}^TEI\mathbf{B}\mathrm{d}x\right]}_{\mathbf{k}_e}\mathbf{d}_e = \mathbf{b}_e^T\underbrace{\left[[\mathbf{N}^TT]_{-L}^{L} - \left[\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}^T}{\mathrm{d}x}M\right]_{-L}^{L} - \rho_0 gA\int_{-L}^{L}\mathbf{N}^T\left(1+\frac{x}{2L}\right)\mathrm{d}x\right]}_{\mathbf{f}_e}$$

men $\mathbf{b}_e^T$ är godtycklig $\Rightarrow \mathbf{k}_e\mathbf{d}_e = \mathbf{f}_e$

4(c).

FEM, element-indelning:



Elementstyvhetsmatriser:

$$\mathbf{K}_{\text{balk}} = \int_{-L}^{L}\mathbf{B}^TEI\mathbf{B}\mathrm{d}x = \frac{EI}{2L^3}\begin{bmatrix} 3 & 3L & -3 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & 2L^2 \\ -3 & -3L & 3 & -3L \\ 3L & 2L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{\text{fjäder}} = \frac{EI}{2L^3}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ Bidrar enbart med styvhet i DOF d_1 & d_3

Förskjutningsrandvillkor: $d_2 = d_4 = 0$

Lastvektor, beakta enbart utbredd last: $\mathbf{F}_{\text{utbredd}} = -\rho_0 gA\displaystyle\int_{-L}^{L}\mathbf{N}^T\left(1+\frac{x}{2L}\right)\mathrm{d}x = -\frac{\rho_0 gAL}{30}\begin{bmatrix} 24 \\ 9L \\ 36 \\ -11L \end{bmatrix}$

Reducerat ekvationssystem, Ekv. (1,3):

$$\frac{EI}{2L^3}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 \\ d_3 \end{bmatrix} = -\frac{\rho_0 gAL}{5}\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix} d_1 \\ d_3 \end{bmatrix} = -\frac{\rho_0 gAL^4}{20EI}\begin{bmatrix} 19 \\ 21 \end{bmatrix}$$

Balkens utböjning i punkten $x = 0$ (ξ=0) fås m.h.a. förskjutningsansatsen (approximativt) enligt:

$$w(\xi = 0) = N_1(0)d_1 + N_3(0)d_3 = -\frac{\rho_0 gAL^4}{EI}$$

5(a). 3 DOF, t.ex. $d_{1x} = d_{1y} = d_{4x} = 0$ eller $d_{1x} = d_{4x} = d_{4y} = 0$.

5(b). Bidrag från spänningsvektorn:

$$\mathbf{f}_s = \int_{S_{23}} \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{t}\,\mathrm{d}S = \begin{Bmatrix} dS = h\mathrm{d}y = hb\mathrm{d}\eta \\ \xi = 1, y = b\eta \end{Bmatrix} = \int_{-1}^{1} \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\Big|_{\xi=1}\left(\sigma_N\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \sigma_M\begin{bmatrix}\eta\\0\end{bmatrix}\right)hb\,\mathrm{d}\eta$$

Här gäller att $N_1 = N_4 = 0,\quad N_2 = (1-\eta)/2,\quad N_3 = (1+\eta)/2$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1}\frac{(1-\eta)}{2}\mathrm{d}\eta = \int_{-1}^{1}\frac{(1+\eta)}{2}\mathrm{d}\eta = 1 \qquad \int_{-1}^{1}\frac{(1-\eta)}{2}\eta\,\mathrm{d}\eta = -\int_{-1}^{1}\frac{(1+\eta)}{2}\eta\,\mathrm{d}\eta = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow f_{s2x} = bh\left(\sigma_N - \frac{\sigma_M}{3}\right),\quad f_{s3x} = bh\left(\sigma_N + \frac{\sigma_M}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{f}_s^{\mathrm{T}} = hb\sigma_N\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} + hb\frac{\sigma_M}{3}\begin{bmatrix}0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

5(c). Normalspänningar: $\sigma = \mathbf{C}\varepsilon$ där $\varepsilon = \mathbf{B}\mathbf{d}_e$

Nodförskjutningsvektorn (given):

$$\mathbf{d}_e = \begin{bmatrix}\mathbf{d}_1\\\mathbf{d}_2\\\mathbf{d}_3\\\mathbf{d}_4\end{bmatrix} \text{ där } \mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_4 = \mathbf{0}, \quad \begin{cases} \mathbf{d}_2 = \dfrac{2b}{E}\sigma_{\mathrm{N}}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \dfrac{4b}{3E}\sigma_M\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \\ \mathbf{d}_3 = \dfrac{2b}{E}\sigma_{\mathrm{N}}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \dfrac{4b}{3E}\sigma_M\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} \end{cases}$$

B-matrisen: $\mathbf{B} = \begin{bmatrix}\mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4\end{bmatrix}$

Med Jacobi-matrisen $\mathbf{J} = \begin{bmatrix}\partial x/\partial\xi & \partial y/\partial\xi \\ \partial x/\partial\eta & \partial y/\partial\eta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b & 0\\0 & b\end{bmatrix}$

$$\text{fås}\quad \mathbf{B}_2 = \frac{1}{4b}\begin{bmatrix}1-\eta & 0\\ 0 & -(1+\xi)\\ -(1+\xi) & 1-\eta\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}_3 = \frac{1}{4b}\begin{bmatrix}1+\eta & 0\\ 0 & 1+\xi\\ 1+\xi & 1+\eta\end{bmatrix}$$

Töjningar:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix}\varepsilon_x\\\varepsilon_y\\\gamma_{xy}\end{bmatrix} = \mathbf{B}_2\mathbf{d}_2 + \mathbf{B}_3\mathbf{d}_3 = \frac{1}{4b}\frac{2b}{E}\sigma_{\mathrm{N}}\begin{bmatrix}[(1-\eta)+(1+\eta)]\\ \varepsilon_{yN}\\ \gamma_{xyN}\end{bmatrix} + \frac{1}{4b}\frac{4b}{3E}\sigma_M\begin{bmatrix}[-(1-\eta)+(1+\eta)]\\ \varepsilon_{yM}\\ \gamma_{xyM}\end{bmatrix}$$

$$= \frac{\sigma_{\mathrm{N}}}{E}\begin{bmatrix}1\\\varepsilon_{yN}\\\gamma_{xyN}\end{bmatrix} + \frac{\sigma_M}{3E}\begin{bmatrix}2\eta\\\varepsilon_{yM}\\\gamma_{xyM}\end{bmatrix}$$

Spänningar:

$$\sigma = \begin{bmatrix}\sigma_x\\\sigma_y\\\tau_{xy}\end{bmatrix} = \underset{\text{plan spänning }(\nu = 0)}{\mathbf{C}}\varepsilon = \begin{bmatrix}E & 0 & 0\\0 & E & 0\\0 & 0 & E/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\sigma_{\mathrm{N}}}{E} + \dfrac{2}{3}\dfrac{\sigma_M}{E}\eta\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sigma_{\mathrm{N}} + \dfrac{2}{3}\sigma_M\eta\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix}$$

Lösningen är exakt för spänningen som är konstant över tvärsnittet (σ_N) och approximativ för spänningen som varierar linjärt över tvärsnittet (σ_M). För den senare är den exakta lösningen lika med $\sigma_M\eta$.