

Tentamen i FEM för ingenjörstillämpningar (SE1025) den 17 mars 2010 kl. 8-13.

Resultat kommer att finnas tillgängligt senast den 7 april. Klagomål på rättningen skall vara framförda senast en månad därefter.

OBS! Tentand är skyldig att visa legitimation. Skriv endast på en sida av bladet. Skriv tydligt namn och personnummer på varje blad. Lösningar som är otydliga och svåra att följa kommer inte att bedömmas.

Hjälpmedel: Formelsamling i Hållfasthetslära, TEFYMA, BETA eller liknande och räknedosa.

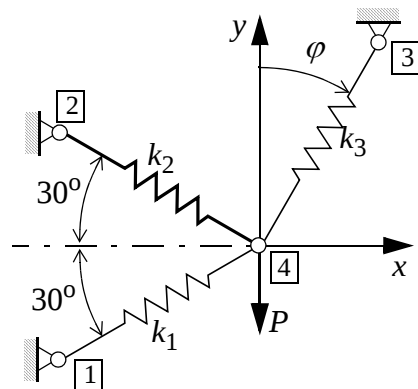
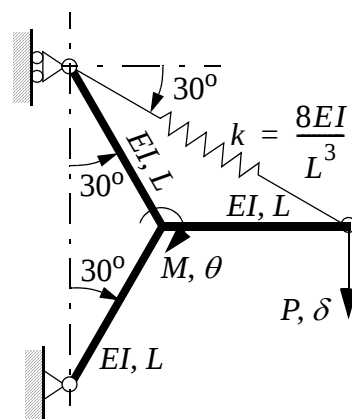
Examinator: Jonas Faleskog, tel. 790 8977.

Betygsgränser: F(underkänd) $p \leq 10$; FX(möjlighet till kompletteringstentamen) $p \geq 11$; E $p \geq 13$; D $p \geq 15$; C $p \geq 17$; B $p \geq 20$; A $p \geq 23$, där ($p = \text{tenamen} + \text{bonus}$).

1. [3 poäng] Ett ramverk bestående av tre balkar är förstärkt med en fjäder enligt figuren till höger. Då ramverket belastas med en punktkraft P och ett punktmoment M , blir den komplementära elastiska energin för strukturen

$$\bar{W} = \frac{L^3}{168EI} [21P^2 + 14P(M/L) + 12(M/L)^2].$$

Ta med hjälp av $\bar{W}$ fram uttrycket för strukturens elastiska energi, d.v.s. $W = W(\delta, \theta)$.



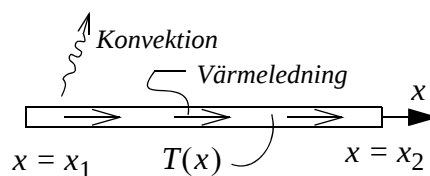
2. [5 poäng] Ett fackverk bestående av tre fjädrar belastas med en vertikal kraft P . Fjädrarnas fjäderkonstanter är $k_1 = 4k_0$, $k_2 = 8k_0$ och $k_3 = \eta k_0$, där $\eta \geq 2\sqrt{3}$ är en dimensionslös konstant och k_0 kan antas känd. Fjädern k_3 är roterad vinkeln φ relativt y-axeln. Bestäm φ så att nod 4 enbart förskjuts i kraften P 's riktning.

3. Figuren till höger visar en endimensionell modell av en kylfläns. Konvektiv värmeöverföring över kylflänsens begränsningsytor till omgivande medium bör därför beaktas i modellen. Omgivande medium har temperaturen T_∞ . Kylflänsen har tvärsnittsarean A och värmeledningstalet (värmekonduktiviteten) k . Värmeövergångstalet till omgivande medium är h och tvärsnittets omkrets är P . Temperaturen T [°C] i kylflänsen som funktion av läget ges vid stationärt tillstånd av lösningen till differentialekvationen

$$\frac{d}{dx} \left(kA \frac{dT}{dx} \right) - hP(T - T_\infty) = 0.$$

(a) [1 poäng] Visa att den svaga formen till differentialekvationen är

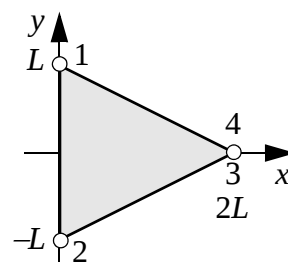
$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dv}{dx} kA \frac{dT}{dx} dx + \int_{x_1}^{x_2} v h P T dx = [v(-Q)]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} v h P T_\infty dx,$$



där v är en godtycklig funktion av x och Q ett värmeflöde, där $Q = -kAdT/dx$ (Fouriers lag) har utnyttjats vid ränderna.

- (b) [2 poäng] Ta fram FEM-ekvationen (välj viktfunktion enligt Galerkins metod) till den svaga formen ovan för ett element, d.v.s. identifiera storheterna i ekvationen $\mathbf{k}_e \mathbf{T}_e = \mathbf{f}_e$.
- (c) [5 poäng] I en tillämpning skall en kylfläns dimensioneras så att ett värmeflöde Q_0 kan ledas bort vid $x = x_1$. Randvillkoren ges av föreskrivna temperaturer: $T = T_0$ vid $x = x_1$ och $T = T_\infty$ vid $x = x_2$, där $T_0 > T_\infty$ och $x_2 - x_1 = L$. Konvektion över kylflänsens begränsningsyta styrs i hög grad. av värmeövergångstalet, h , som här relateras till övriga modellparametrar enligt: $h = 12\eta Ak/(PL^2)$, där L , k , A och P är konstanter. Genomför en FEM analys med två lika långa linjära element och bestäm den dimensionslösa parametern η , så att värmeflödet som leds bort via kylflänsen vid $x = x_1$ blir lika med Q_0 . Det räcker att ta fram den ekvation ur vilken η kan lösas!

4. [3 poäng] Vid modellering av plana problem kan det ibland som en nödlösning vara praktiskt att använda s.k. kollapsade 4-sidiga element. Figuren till höger visar ett sådant element, där noderna 3 och 4 har placerats i samma punkt. För ett kompressibelt, linjärelastiskt material blir styvhetsmatrisen för det aktuella elementet en inverterbar (ändlig) matris om än illakonditionerad. Visa att Jakobimatrissens determinant är positiv för $x < 2L$. Nodkoordinaterna framgår av figuren.

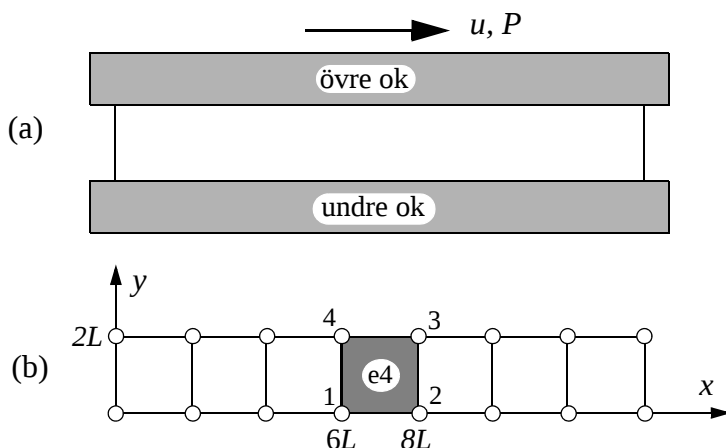


5. Ett skjuvprov av en rektangulär plåt ($14L \times 2L$, tjocklek h) enligt figur (a) nedan skall analyseras med FEM. Plåtens över- och undersida är fast inspända i vars sitt ok, där det undre hålls fast och det övre ges en horisontell förskjutning, u , som här kan anses som känd. Den rektangulära plåten modelleras med sju stycken 4-nodiga isoparametriska element (plan spänning), se figur (b) nedan. Materialet är isotropt linjärt elastiskt med elasticitetsmodulen E och Poisons tal $\nu = 1/3$. P.g.a. problemets karaktär behöver enbart ett element beaktas vid analysen. Styvhetsmatrisen för element nr. 4 visas i figur (c) nedan, där frihetsgraderna definieras av elementets lokala nodnumrering visad i figur (b).

(a) [1 poäng] Beräkna förskjutningen i punkten $x = 6L$, $y = L/2$.

(b) [2 poäng] Beräkna den resulterande kraft P (se figur (a)) som behöves för att förskjuta det övre oket sträckan u i horisontell led.

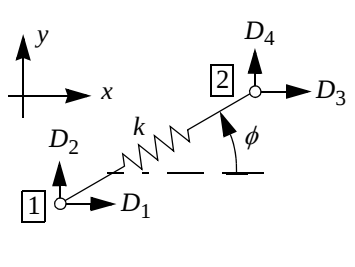
(c) [3 poäng] Beräkna spänningarna i elementet.



(c)
$$\mathbf{k}_4 = \frac{Eh}{16} \begin{bmatrix} 8 & 3 & -5 & 0 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 1 & -3 & -4 & 0 & -5 \\ -5 & 0 & 8 & -3 & 1 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 8 & 0 & -5 & 3 & -4 \\ -4 & -3 & 1 & 0 & 8 & 3 & -5 & 0 \\ -3 & -4 & 0 & -5 & 3 & 8 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 3 & -5 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 0 & 1 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

FORMELBLAD (komplement till kap. 21. i Formelsamling i Hållfasthetslära)

GLOBAL BESKRIVNING FÖR ENDIMENSIONELLA ELEMENT

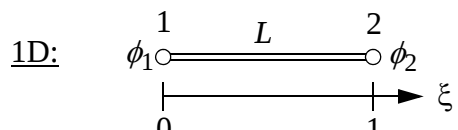


$$\mathbf{K}_e = k \begin{bmatrix} \mathbf{a} & -\mathbf{a} \\ -\mathbf{a} & \mathbf{a} \end{bmatrix} \quad \text{där} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} c^2 & sc \\ sc & s^2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} c = \cos \phi \\ s = \sin \phi \end{matrix}$$

$$\text{alternativt} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} l_{12}^2 & l_{12}m_{12} \\ l_{12}m_{12} & m_{12}^2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} l_{12} = \cos \phi_x = (x_2 - x_1)/L \\ m_{12} = \cos \phi_y = (y_2 - y_1)/L \\ L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{matrix}$$

OLIKA FINITA ELEMENT

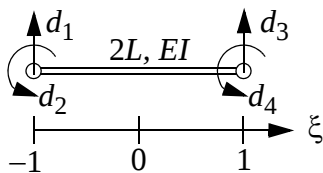
1D:



$$\phi(\xi) = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} N_1 = 1 - \xi \\ N_2 = \xi \end{matrix} \quad \mathbf{B} = \frac{d\mathbf{N}}{dx} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Användbara integraler: $\int_0^1 \mathbf{B}^T \mathbf{B} L d\xi = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \int_0^1 \mathbf{N}^T \mathbf{N} L d\xi = \frac{L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \int_0^1 \mathbf{N}^T L d\xi = \frac{L}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Balkelement: Utböjning: $w(\xi) = N_1 d_1 + N_2 d_2 + N_3 d_3 + N_4 d_4 = \mathbf{N} \mathbf{d}_e, \quad \mathbf{B} = \frac{d^2 \mathbf{N}}{dx^2} = \frac{1}{L^2} \frac{d^2 \mathbf{N}}{d\xi^2}$

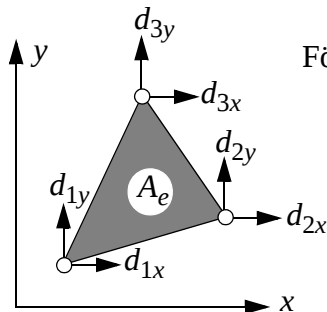


$$\begin{aligned} N_1 &= (2 - 3\xi + \xi^3)/4 \\ N_2 &= L(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3)/4 \\ N_3 &= (2 + 3\xi - \xi^3)/4 \\ N_4 &= L(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)/4 \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{B} L d\xi = \frac{1}{2L^3} \begin{bmatrix} 3 & 3L & -3 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & 2L^2 \\ -3 & -3L & 3 & -3L \\ 3L & 2L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \left(\alpha + \beta \left(\frac{1+\xi}{2} \right) \right) L d\xi = L\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ L/3 \\ 1 \\ -L/3 \end{bmatrix} + \frac{L\beta}{30} \begin{bmatrix} 9 \\ 4L \\ 21 \\ -6L \end{bmatrix}$$

Plana element (2D):

3-sidigt triangelement:



Förskjutningar:

$$\begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \mathbf{d}_e = \mathbf{N} \mathbf{d}_e \quad \mathbf{d}_e = \begin{bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \\ d_{3x} \\ d_{3y} \end{bmatrix}$$

$$N_1 = \frac{1}{2A_e} [(y_2 - y_3)(x - x_2) + (x_3 - x_2)(y - y_2)]$$

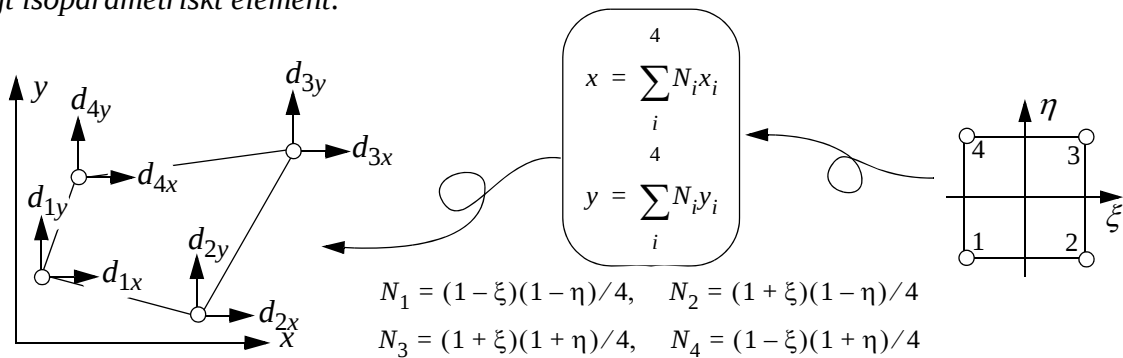
$$N_2 = \frac{1}{2A_e} [(y_3 - y_1)(x - x_3) + (x_1 - x_3)(y - y_3)]$$

$$N_3 = \frac{1}{2A_e} [(y_1 - y_2)(x - x_1) + (x_2 - x_1)(y - y_1)]$$

Töjningar:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{d}_e \quad \mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_3] \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial y \\ \partial N_i / \partial y & \partial N_i / \partial x \end{bmatrix}$$

4-sidigt isoparametriskt element:



$$\text{Förskjutningar:} \quad \begin{bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \mathbf{d}_e = \mathbf{N} \mathbf{d}_e$$

$$\text{Töjningar:} \quad \epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{d}_e \quad \mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_4] \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial y \\ \partial N_i / \partial y & \partial N_i / \partial x \end{bmatrix}$$

$$\text{där} \quad \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x \\ \partial N_i / \partial y \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial \xi \\ \partial N_i / \partial \eta \end{bmatrix} \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial y / \partial \xi \\ \partial x / \partial \eta & \partial y / \partial \eta \end{bmatrix}$$

Spänningar:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{C} \epsilon \quad \mathbf{C} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \text{ (P.S)} \quad \mathbf{C} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \text{ (P.D)}$$

$$\text{FEM Ekv. (ett element):} \quad \left[\int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \right] \mathbf{d}_e = \left[\int_{S_e} \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS + \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{K} dV \right] \quad \mathbf{t} = \text{spänningsvektor} \quad \mathbf{K} = \text{volymkraft}$$

LÖSNINGSFÖRSLAG: FEM FÖR INGENJÖRSTILLÄMPNINGAR, 17 MARS, 2010

1.Alternativ 1: Castiglianos 2:a sats ger

$$\begin{bmatrix} \delta \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial \bar{W} / \partial P \\ \partial \bar{W} / \partial M \end{bmatrix} = \frac{L^3}{168EI} \begin{bmatrix} 42 & 14/L \\ 14/L & 24/L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ M \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} P \\ M \end{bmatrix} = \frac{EI}{29L^3} \begin{bmatrix} 144 & -84L \\ -84L & 252L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ \theta \end{bmatrix}$$

Insatt i $\bar{W}$, som för ett linjärt elastiskt material är lika med W , ger

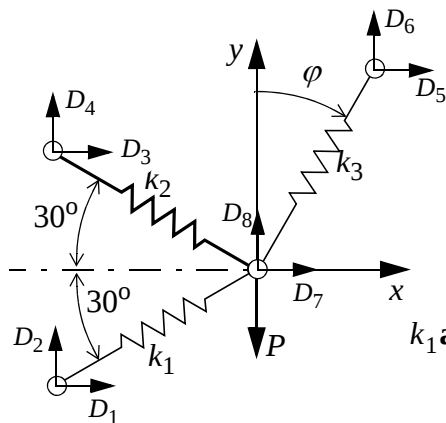
$$W = \frac{6EI}{29L^3} (12\delta^2 - 14\delta\theta L + 21(\theta L)^2)$$

Alternativ 2: Allmänt gäller för en linjärt elastiskt struktur att (OBS! $\bar{W}$ är kvadratisk i P och M)

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i Q_i = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j q_i k_{ij} q_j = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{k} \mathbf{q} \quad \text{där} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \delta \\ \theta \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{k} = \alpha^{-1}$$

där komponenterna i α fås enligt

$$\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial Q_i \partial Q_j} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Castig.} \\ \text{2:a sats} \end{array} \right\} = \frac{\partial}{\partial Q_i} q_j = \frac{\partial}{\partial Q_i} \sum_k \alpha_{jk} Q_k = \alpha_{ji} = \alpha_{ij} \Rightarrow \alpha = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial P^2} & \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial P \partial M} \\ \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial M \partial P} & \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial M^2} \end{bmatrix}$$

vilket ger W enligt ovan.**2.**Randvillkor: $D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D_5 = D_6 = 0$

$$F_8 = -P$$

Elementstyvhetmatriser: $\mathbf{K}_i = k_i \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i & -\mathbf{a}_i \\ -\mathbf{a}_i & \mathbf{a}_i \end{bmatrix}$

$$k_1 \mathbf{a}_1 = k_0 \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}, k_2 \mathbf{a}_2 = 2k_0 \begin{bmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}, k_3 \mathbf{a}_3 = \eta k_0 \begin{bmatrix} s^2 & sc \\ sc & c^2 \end{bmatrix}$$

$$s = \sin \varphi, c = \cos \varphi$$

Red. Ekvationssyst. (Ekv. 7, 8):

$$\begin{bmatrix} k_1 \mathbf{a}_1 + k_2 \mathbf{a}_2 + k_3 \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_7 \\ D_8 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 9 + \eta s^2 & -\sqrt{3} + \eta sc \\ -\sqrt{3} + \eta sc & 3 + \eta c^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_{\text{red}}} \begin{bmatrix} D_7 \\ D_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -P \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} D_7 \\ D_8 \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{K}_{\text{red}}|} \begin{bmatrix} 3 + \eta c^2 & \sqrt{3} - \eta sc \\ \sqrt{3} - \eta sc & 9 + \eta s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -P \end{bmatrix}$$

Villkor: $D_7 = 0$

$$\Rightarrow \sqrt{3} - \eta \sin \varphi \cos \varphi = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} - \frac{\eta}{2} \sin 2\varphi = 0$$

Lösningar: $\eta = 2\sqrt{3} \quad \varphi = \pi/4$

$$\eta > 2\sqrt{3} \quad \varphi = \frac{1}{2} \arcsin(2\sqrt{3}/\eta) \quad \text{eller} \quad \varphi = \frac{1}{2} [\pi - \arcsin(2\sqrt{3}/\eta)]$$

3.

- (a) Multiplicera O.D.E. med viktfunction och integrera över domänen:
- $$\int_{x_1}^{x_2} v \left[\frac{d}{dx} \left(kA \frac{dT}{dx} \right) - hP(T - T_\infty) \right] dx = 0 \quad (1)$$

Partialintegrera:

$$\int_{x_1}^{x_2} v \left[\frac{d}{dx} \left(kA \frac{dT}{dx} \right) \right] dx = \left[v \left(kA \frac{dT}{dx} \right) \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{dv}{dx} \left(kA \frac{dT}{dx} \right) dx \quad (2)$$

(2) insatt i (1) med $-Q = kA \frac{dT}{dx}$ ger svag form:

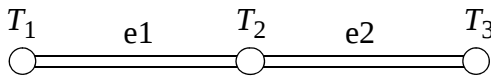
$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dv}{dx} kA \frac{dT}{dx} dx + \int_{x_1}^{x_2} v h P T dx = [v(-Q)]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} v h P T_\infty dx$$

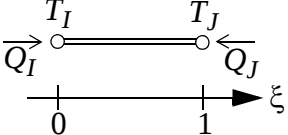
- (b) Temperaturansats: $T = \mathbf{N} \mathbf{T}_e$ $\frac{dT}{dx} = \frac{d\mathbf{N}}{dx} \mathbf{T}_e = \mathbf{B} \mathbf{T}_e$
 Viktfunktion: $v = \mathbf{N} \mathbf{b}_e = \mathbf{b}_e^T \mathbf{N}^T$ $\frac{dv}{dx} = \mathbf{b}_e^T \frac{d\mathbf{N}^T}{dx} = \mathbf{b}_e^T \mathbf{B}^T$

Insatt i den svaga formen ger:

$$\mathbf{b}_e^T \left[\underbrace{\int_{x_1}^{x_2} \mathbf{B}^T kA \mathbf{B} dx + \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{N}^T h P \mathbf{N} dx}_{\mathbf{k}_e} \right] \mathbf{T}_e = \mathbf{b}_e^T \left[\underbrace{\int_{x_1}^{x_2} \mathbf{N}^T h P T_\infty dx + [\mathbf{N}^T (-Q)]_{x_1}^{x_2}}_{\mathbf{f}_e} \right]$$

men $\mathbf{b}_e^T$ är godtycklig $\Rightarrow \mathbf{k}_e \mathbf{T}_e = \mathbf{f}_e$

- (c) FEM - modell:
- 

Linjära element:  Temp. ansats: $T(\xi) = [1 - \xi \quad \xi] \begin{bmatrix} T_I \\ T_J \end{bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{T}_e$
 OBS! värmeflödena, Q_I , Q_J , riktade in i elementet.

Elementmatriser (båda elementen):

$$\mathbf{k}_e = \int_0^1 \mathbf{B}^T kA \mathbf{B} l_e d\xi + \int_0^1 \mathbf{N}^T h P \mathbf{N} l_e d\xi = \left\{ l_e = \frac{L}{2} \right\} = \frac{2kA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{hPL}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_e = \int_0^1 \mathbf{N}^T h P T_\infty l_e d\xi = \frac{hPT_\infty L}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Med $hPL = \frac{12\eta kA}{L}$ fås $\mathbf{k}_e = \frac{kA}{L} \begin{bmatrix} 2(\eta+1) & \eta-2 \\ \eta-2 & 2(\eta+1) \end{bmatrix}$, $\mathbf{f}_e = \frac{3\eta AkT_\infty}{L} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Assemblering ger Ekv. systemet:

$$\frac{kA}{L} \begin{bmatrix} 2(\eta+1) & \eta-2 & 0 \\ \eta-2 & 4(\eta+1) & \eta-2 \\ 0 & \eta-2 & 2(\eta+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 = T_0 \\ T_2 \\ T_3 = T_\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ 0 \\ Q_3 \end{bmatrix} + \frac{3\eta AkT_\infty}{L} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ekv. (2) ger $T_2 = \frac{6\eta T_\infty - (\eta-2)(T_0 - T_\infty)}{4(\eta+1)}$

Ekv. (1) ger sedan med $Q_1 = Q_0$ en ekvation för den dimensionslösa modellparametern η

$$\overline{Q}_0 = 2(\eta+1) + (\eta-2) \left[\frac{6\eta \overline{T}_\infty - (\eta-2)(1 - \overline{T}_\infty)}{4(\eta+1)} \right] - 3\eta \overline{T}_\infty \quad \text{där} \quad \overline{Q}_0 = \frac{Q_0 L}{kAT_0} \quad \text{och} \quad \overline{T}_\infty = \frac{T_\infty}{T_0}$$

Med lösningen: $\eta = \frac{2}{7(1 - \overline{T}_\infty)} \left[\overline{Q}_0 - 5(1 - \overline{T}_\infty) \pm \sqrt{18(1 - \overline{T}_\infty)^2 + \overline{Q}_0(\overline{Q}_0 - 3(1 - \overline{T}_\infty))} \right]$

4.

Kollapsat 4-sidigt isoparametriskt element (sidan mellan nod 3 och 4 är kollapsad):

$$\left. \begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^4 N_i x_i = L(1 + \eta) \\ y &= \sum_{i=1}^4 N_i y_i = \frac{L}{2}(\eta - 1)\xi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{L}{2} \begin{bmatrix} 0 & \eta - 1 \\ 2 & \xi \end{bmatrix} \Rightarrow |\mathbf{J}| = \frac{L^2}{2}(1 - \eta)$$

Men $x = L(1 + \eta) \Rightarrow \eta = (x/L - 1)$ vilket ger $|\mathbf{J}| = \frac{L}{2}(2L - x) > 0$ för $x < 2L$ V.S.V

5.

För alla element (inklusive nr. 4) gäller att förskjutningsvektorn, $\mathbf{d}_e^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ u \ 0 \ u \ 0]$

(a) Förskjutningsvektorn i punkten $\{x = 6L, y = L/2\} \Leftrightarrow \{\xi = -1, \eta = -1/2\}$:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{d}_e = \begin{bmatrix} \xi = -1 \\ \eta = -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u/4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b) Nodernas reaktionskrafter i element 4 fås enligt: $\mathbf{R} = \mathbf{k}_4 \mathbf{d}_e \Rightarrow R_{x3} = R_{x4} = \frac{3Ehu}{16}$

Med totalt sju element som deformeras på samma sätt fås relationen:

$$\frac{P}{7} = R_{x3} + R_{x4} \Rightarrow P = \frac{21Ehu}{8}$$

(c) Spänningarna i element 4 (och de övriga elementen):

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{C} \varepsilon = \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{d}_e = \mathbf{C} (\mathbf{B}_1 \mathbf{d}_1 + \mathbf{B}_2 \mathbf{d}_2 + \mathbf{B}_3 \mathbf{d}_3 + \mathbf{B}_4 \mathbf{d}_4)$$

$$\text{där } \mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_2 = 0; \mathbf{d}_3 = \mathbf{d}_4 = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{B}_3 = \frac{1}{4L} \begin{bmatrix} 1 + \eta & 0 \\ 0 & 1 + \xi \\ 1 + \xi & 1 + \eta \end{bmatrix}; \mathbf{B}_4 = \frac{1}{4L} \begin{bmatrix} -(1 + \eta) & 0 \\ 0 & 1 - \xi \\ 1 - \xi & -(1 + \eta) \end{bmatrix}$$

$$\text{Plan spänning och } \nu = 1/3 \text{ ger den elastiska styvhetsmatrisen } \mathbf{C} = \frac{3E}{8} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{C} (\mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_4) \mathbf{d}_3 = \mathbf{C} \frac{1}{4L} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{C} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{u}{2L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3Eu}{16L} \end{bmatrix}$$

Jämförelse med analytisk lösning, där $\sigma_{xy} = G\gamma_{xy}$

$$\text{Med } G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = \left\{ \nu = \frac{1}{3} \right\} = \frac{3E}{8} \text{ och } \gamma_{xy} = \frac{u}{2L} \text{ fås att } \sigma_{xy} = \frac{3Eu}{16L}$$

D.v.s. samma som i FEM-lösningen!