

Tentamen i FEM för ingenjörstillämpningar (SE1025) den 3 juni 2010 kl. 8-13.

Resultat kommer att finnas tillgängligt senast den 24 juni. Klagomål på rättningen skall vara framförda senast en månad därefter.

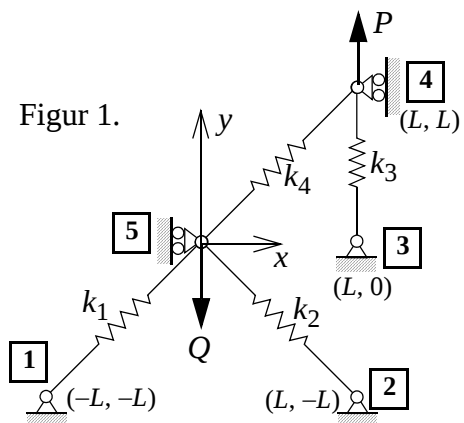
OBS! Tentand är skyldig att visa legitimation. Skriv endast på en sida av bladet. Skriv tydligt namn och personnummer på varje blad. Lösningar som är otydliga och svåra att följa kommer inte att bedömmas.

Hjälpmedel: Formelsamling i Hållfasthetslära, TEFYMA, BETA eller liknande och räknedosa.

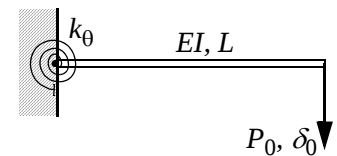
Examinator: Jonas Faleskog, tel. 790 8977.

Betygsgränser: F(underkänd) $p \leq 10$; FX(möjlighet till kompletteringstentamen) $p \geq 11$; E $p \geq 13$; D $p \geq 15$; C $p \geq 17$; B $p \geq 20$; A $p \geq 23$, där ($p = \text{tentamen} + \text{bonus}$).

1. [5 poäng] Fackverket i Figur 1 består av 4 fjäderelement med fjäderkonstanterna: $k_1 = k_2 = k_4 = 2k$ och $k_3 = 3k/2$. Koordinaterna för de fem noderna framgår av Figur 1. Fackverket belastas med två krafter (P , Q) som angriper i noderna 4 respektive 5. Antag att P är känd. Bestäm Q så att normalkraften i fjäderelementet 3 blir noll.

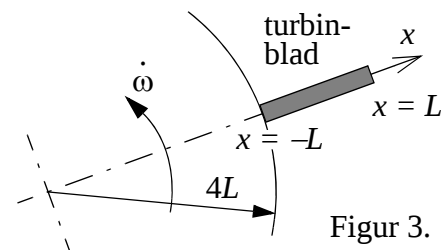


2. [3 poäng] En balk som är fast inspänd i en vägg belastas med en punktkraft P_0 enligt Figur 2. Balken har böjstyvheten EI och längden L . Då väggen ej är helt stel utan något flexibel, förskjuts lastangreppspunkten $\delta_0 = (1 + \alpha)P_0 L^3 / (3EI)$, där $\alpha > 0$ (en stel vägg ges av fallet $\alpha = 0$). Väggens flexibilitet modelleras här av en linjär momentfjäder med fjäderkonstanten $k_\theta = \bar{k}_\theta 2EI/L$. Bestäm med hjälp av lämplig energimetod (komplementär elastisk energi och Castiglianos 2:a sats) väggens flexibilitet, d.v.s. bestäm $\bar{k}_\theta$ som funktion av α .



Figur 2.

3. Figur 3 visar ett turbinblad på en turbin. Rotorbladet har böjstyvheten EI , längden $2L$, tvärsnittsarean A och densiteten ρ . I det aktuella fallet accelererar turbinen med en konstant vinkelacceleration $\dot{\omega}$. Baserat på Euler-Bernoullis balkteori kan jämvikt för turbinblad formuleras med hjälp av virtuella arbetets princip enligt



Figur 3.

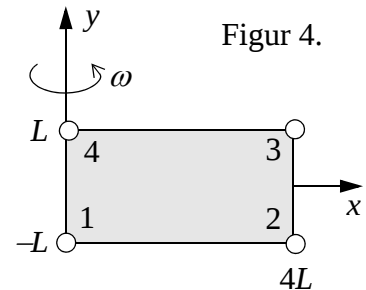
$$EI \int_{-L}^L \delta w'' w'' dx = \rho A \dot{\omega} 5L \int_{-L}^L \delta w \left(1 + \frac{x}{5L}\right) dx,$$

där vänsterled och högerled motsvarar inre, respektive yttre krafter virtuella arbete för en virtuell utböjning δw kring jämviktsläget givet av w . Dessutom antages här att EI , A och ρ ej varierar längs balken.

(a) [2 poäng] Utgå ifrån jämvikt formulerad enligt virtuella arbetets princip ovan och ta fram FEM-ekvationen, enligt Galerkins metod för valet av virtuell utböjningsfunktion, d.v.s. identifiera storheterna i ekvationen $\mathbf{k}_e \mathbf{d}_e = \mathbf{f}_e$.

- (b) [5 poäng] Analysera turbinbladet m.h.a. av **ett** tvånoders balkelement (2 frihetsgrader/nod) och bestäm: (i) utböjning och vinkeländring i turbladets ytterände ($x = L$) och (ii) turbinbladets inspänningsmoment, d.v.s. reaktionsmomentet vid $x = -L$ (OBS! här måste en yttre punktlastvektor adderas till lastvektorn, vilken ej är explicit medtagen i uttrycket för virtuella arbetets princip ovan).

4. [4 poäng] En rektangulär plåt ($4L \times 2L$, tjocklek h) med densiteten ρ roterar kring sin vänstra kant (y -axeln) med en konstant vinkelhastighet ω , se Figur 4. Plåten modelleras med ett plant bi-linjärt element. Bestäm tröghetskraftens bidrag (från rotationen) till elementlastvektorns komponenter tillhörande nod 2, där integralen skall beräknas numeriskt mha Gauss-kvadratur. Tröghetskraften modelleras här som en volymkraft: $K_x = \rho \omega^2 x$. Välj så många integrationspunkter som krävs för exakt utvärdering av integralen. *Ledning: om m integrationspunkter används, kan ett polynom av gradtal $2m - 1$ integreras exakt.*



Figur 4.

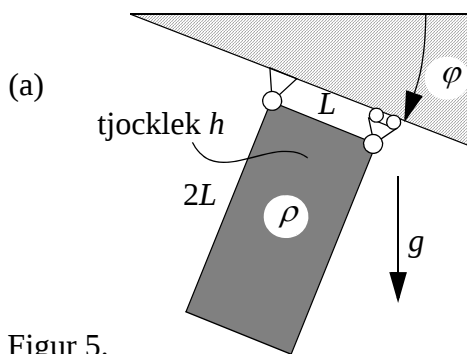
5. En rektangulär skiva ($L \times 2L$, tjocklek h), belastad av sin egentyngd, är via två punkter upphängd i ett lutande tak, där den högra punkten kan röra sig parallellt med taket, se Figur 5(a) nedan. Materialet har densiteten ρ och är isotropt, linjärt elastiskt (E , ν). Plan spänning råder i skivan och $\nu = 0$. Figur 5(b) nedan visar en förenklad FEM-modell av skivan bestående av ett enda 4-sidigt bilinjärt isoparametriskt element. Egentyngden kan modelleras som en volymkraft (K_x, K_y) = $\rho g(-\sin \phi, \cos \phi)$, där tyngdaccelerationen g kan anses känd. Elementets styvhetsmatris och resulterande förskjutningsvektor är givna i figur (c) nedan.

- (a) [3 poäng] Visa att egentyngdens bidrag till lastvektorkomponenterna i nod 1 är:

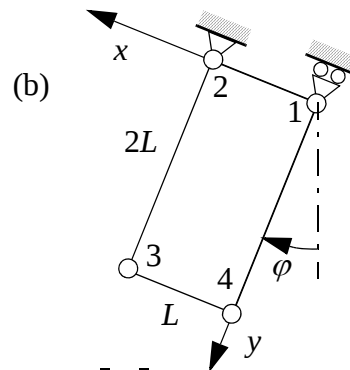
$$f_{b1x} = -\frac{1}{2}hL^2\rho g \sin \phi \text{ respektive } f_{b1y} = \frac{1}{2}hL^2\rho g \cos \phi .$$

- (b) [2 poäng] Beräkna reaktionskrafterna i nod 1.

- (c) [1 poäng] Beräkna förskjutningsvektorn $\mathbf{u}$ i punkten $\{x = L/2, y = 2L\}$.



Figur 5.



Elementets
Jacobimatrix:

$$\mathbf{J} = L \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

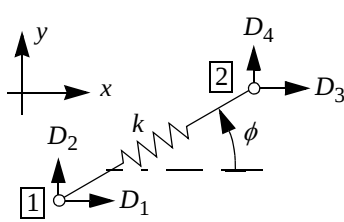
(c)

$$\mathbf{K}_e = \frac{Eh}{8} \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 & -1 & -3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & -2 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & 6 & -1 & 2 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 2 & 1 & 6 & 1 & -5 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 & 1 & -5 & 1 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}_e = \begin{bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \\ d_{3x} \\ d_{3y} \\ d_{4x} \\ d_{4y} \end{bmatrix} = \frac{\rho g L^2}{6E} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 12 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix} \cos \phi - \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 80 \\ -24 \\ 75 \\ 24 \end{bmatrix} \sin \phi \right)$$

FORMELBLAD

GLOBAL BESKRIVNING FÖR ENDIMENSIONELLA ELEMENT

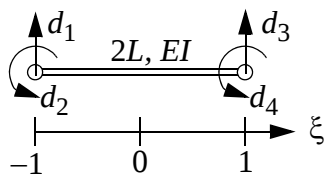


$$\mathbf{K}_e = k \begin{bmatrix} \mathbf{a} & -\mathbf{a} \\ -\mathbf{a} & \mathbf{a} \end{bmatrix} \quad \text{där} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} c^2 & sc \\ sc & s^2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} c = \cos \phi \\ s = \sin \phi \end{matrix}$$

$$\text{alternativt } \mathbf{a} = \begin{bmatrix} l_{12}^2 & l_{12}m_{12} \\ l_{12}m_{12} & m_{12}^2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} l_{12} = \cos \phi_x = (x_2 - x_1)/L \\ m_{12} = \cos \phi_y = (y_2 - y_1)/L \\ L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{matrix}$$

Balelement:

$$\text{Utböjning: } w(\xi) = N_1 d_1 + N_2 d_2 + N_3 d_3 + N_4 d_4 = \mathbf{N} \mathbf{d}_e, \quad \mathbf{B} = \frac{d^2 \mathbf{N}}{d\xi^2} = \frac{1}{L^2} \frac{d^2 \mathbf{N}}{d\xi^2}$$



$$N_1 = (2 - 3\xi + \xi^3)/4$$

$$N_2 = L(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3)/4$$

$$N_3 = (2 + 3\xi - \xi^3)/4$$

$$N_4 = L(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)/4$$

$$\int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{B} L d\xi = \frac{1}{2L^3} \begin{bmatrix} 3 & 3L & -3 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & 2L^2 \\ -3 & -3L & 3 & -3L \\ 3L & 2L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T (\alpha + \beta \xi) L d\xi = L \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ L/3 \\ 1 \\ -L/3 \end{bmatrix} + \frac{L\beta}{15} \begin{bmatrix} -6 \\ -L \\ 6 \\ -L \end{bmatrix}$$

Numerisk integration (Gauss-kvadratur):

$$I = \int_{-1}^1 F(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^N F(\xi_i) w_i \quad I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N F(\xi_i, \eta_j) w_i w_j$$

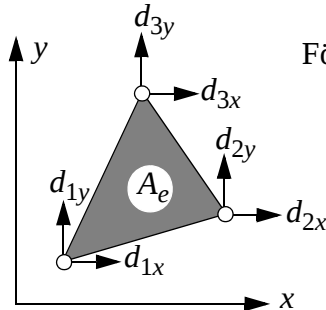
$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \approx \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N F(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) w_i w_j w_k$$

Table 7.1. Gauss integration points and weight coefficients

m	ξ_j	w_j	Accuracy n
1	0	2	1
2	$-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}$	1, 1	3
3	$-\sqrt{0.6}, 0, \sqrt{0.6}$	5/9, 8/9, 5/9	5
4	$-0.861136, -0.339981, 0.339981, 0.861136$	0.347855, 0.652145, 0.652145, 0.347855	7
5	$-0.906180, -0.538469, 0, 0.538469, 0.906180$	0.236927, 0.478629, 0.568889, 0.478629, 0.236927	9
6	$-0.932470, -0.661209, -0.238619, 0.238619, 0.661209, 0.932470$	0.171324, 0.360762, 0.467914, 0.467914, 0.360762, 0.171324	11

Plana element (2D):

3-sidigt triangelement:



Förskjutningar:

$$\begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \mathbf{d}_e = \mathbf{N} \mathbf{d}_e \quad \mathbf{d}_e = \begin{bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \\ d_{3x} \\ d_{3y} \end{bmatrix}$$

$$N_1 = \frac{1}{2A_e} [(y_2 - y_3)(x - x_2) + (x_3 - x_2)(y - y_2)]$$

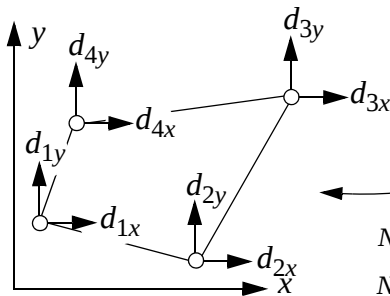
$$N_2 = \frac{1}{2A_e} [(y_3 - y_1)(x - x_3) + (x_1 - x_3)(y - y_3)]$$

$$N_3 = \frac{1}{2A_e} [(y_1 - y_2)(x - x_1) + (x_2 - x_1)(y - y_1)]$$

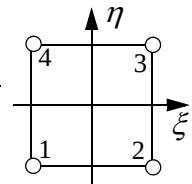
Töjningar:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{d}_e \quad \mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_3] \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial y \\ \partial N_i / \partial y & \partial N_i / \partial x \end{bmatrix}$$

4-sidigt isoparametriskt element:



$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^4 N_i x_i \\ y &= \sum_{i=1}^4 N_i y_i \end{aligned}$$



$$N_1 = (1 - \xi)(1 - \eta)/4, \quad N_2 = (1 + \xi)(1 - \eta)/4$$

$$N_3 = (1 + \xi)(1 + \eta)/4, \quad N_4 = (1 - \xi)(1 + \eta)/4$$

Förskjutningar:

$$\begin{bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \mathbf{d}_e = \mathbf{N} \mathbf{d}_e$$

Töjningar:

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{d}_e \quad \mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_4] \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial y \\ \partial N_i / \partial y & \partial N_i / \partial x \end{bmatrix}$$

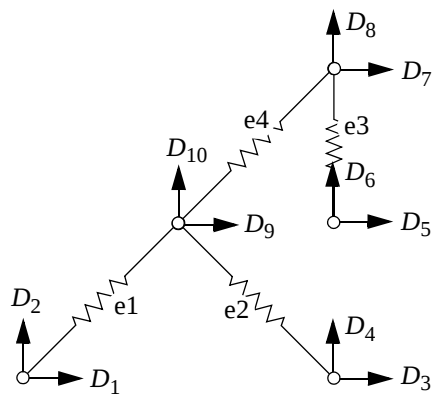
$$\text{där } \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x \\ \partial N_i / \partial y \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial \xi \\ \partial N_i / \partial \eta \end{bmatrix} \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial y / \partial \xi \\ \partial x / \partial \eta & \partial y / \partial \eta \end{bmatrix}$$

Spänningar:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{C} \epsilon \quad \mathbf{C} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix} \text{ (P.S)} \quad \mathbf{C} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix} \text{ (P.D)}$$

$$\text{FEM Ekv. (ett element): } \left[\int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \right] \mathbf{d}_e = \left[\int_{S_e} \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS + \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{K} dV \right] \quad \mathbf{t} = \text{spänningsvektor} \quad \mathbf{K} = \text{volymkraft}$$

LÖSNINGSFÖRSLAG: FEM FÖR INGENJÖRSTILLÄMPNINGAR, 3 JUNI, 2010

1.Randvillkor:

$$D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D_5 = D_6 = D_7 = D_9 = 0$$

$$F_8 = P, \quad F_{10} = -Q$$

Elementstyvhetsmatriser:

$$\mathbf{K}_e = k_i \begin{bmatrix} \mathbf{a} & -\mathbf{a} \\ -\mathbf{a} & \mathbf{a} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} c^2 & sc \\ sc & s^2 \end{bmatrix}, \quad c = \cos \phi, \quad s = \sin \phi$$

$$\underline{\text{e1\& e4:}} \quad k_1 = k_4 = 2k, \quad \mathbf{a} = \{\phi = 45^\circ\} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

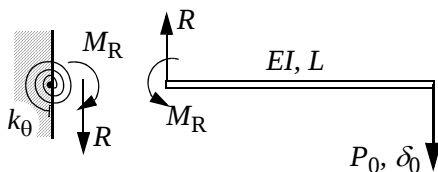
$$\underline{\text{e2:}} \quad k_2 = 2k, \quad \mathbf{a} = \{\phi = (-45)^\circ\} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{\text{e3:}} \quad k_3 = \frac{3}{2}k, \quad \mathbf{a} = \{\phi = 90^\circ\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assemblering:

$$\mathbf{K} = k \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/2 & 0 & -3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3/2 & 1 & 5/2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Ekv. (8) & (10):

$$k \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_8 \\ D_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ -Q \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} D_8 \\ D_{10} \end{bmatrix} = \frac{2}{13k} \begin{bmatrix} 3P - Q \\ P - \frac{5Q}{2} \end{bmatrix}$$

Normalkraft i element 3: $N = k_3 \delta$ där $k_3 = 3k/2$, $\delta = D_8$ Alltså $N = 0 \Rightarrow D_8 = 0 \Rightarrow Q = 3P$ **2.**Frilägg balken!2 jämviktsekv. och 2 obekanta (M_R , R) $\Rightarrow$ Statiskt bestämt, där jämvikt ger att

$$R = P_0, \quad M_R = P_0 L$$

Komplementär elastisk energi:

$$\bar{W} = \frac{LM_R^2}{6EI} + \frac{M_R^2}{2k_0} = \frac{P_0^2 L^3}{6EI} + \frac{P_0^2 L^3}{4EI \bar{k}_0}$$

$$\text{Förskjutning (enl. villkor):} \quad \delta_0 = \frac{\partial \bar{W}}{\partial P_0} = \frac{P_0 L^3}{3EI} + \frac{P_0 L^3}{2EI \bar{k}_0} = (1 + \alpha) \frac{P_0 L^3}{3EI} \Rightarrow \bar{k}_0 = \frac{3}{2\alpha}$$

3(a).**3(b).**

Förskjutningsansats: $w(x) = \mathbf{N} \mathbf{d}_e \Rightarrow w'' = \mathbf{B} \mathbf{d}_e$ där $\mathbf{B} = \frac{d^2 \mathbf{N}}{dx^2}$

Här är $\mathbf{d}_e$ elementets förskjutningsvektor och $\mathbf{N}$ innehåller tillhörande formfunktioner.

Virtuell förskjutning, ansatt (Galerkin): $\delta w(x) = \mathbf{N} \beta_e \Rightarrow \delta w'' = \mathbf{B} \beta_e$ där $\mathbf{B} = \frac{d^2 \mathbf{N}}{dx^2}$

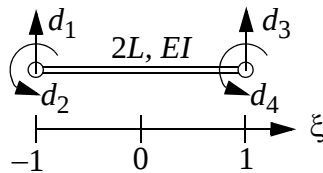
Här är β_e en godtycklig vektor av samma dimension som $\mathbf{d}_e$

Insatt i virtuella arbetets princip ger sedan FEM-ekv. för ett element, enligt

$$\underbrace{\beta_e^T \left(EI \int_{-L}^L \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx \right)}_{\mathbf{k}_e} \mathbf{d}_e = \underbrace{\beta_e^T \left(\rho A \dot{\omega} 5L \int_{-L}^L \mathbf{N}^T \left(1 + \frac{x}{5L} \right) dx \right)}_{\mathbf{f}_e}$$

Då β_e är en vektor med godtyckliga koefficienter fås FEM-ekv. som: $\mathbf{k}_e \mathbf{d}_e = \mathbf{f}_e$

FEM, element-indelning:



Elementstyvhetmatris:

$$\mathbf{k} = EI \int_{-L}^L \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx = \frac{EI}{2L^3} \begin{bmatrix} 3 & 3L & -3 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & 2L^2 \\ -3 & -3L & 3 & -3L \\ 3L & 2L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Förskjutningsrandvillkor: $d_1 = d_2 = 0$

Lastvektor, beakta enbart utbredd last:

$$\mathbf{F}_{\text{utbredd}} = 5 \rho A \dot{\omega} L \int_{-L}^L \mathbf{N}^T \left(1 + \frac{x}{5L} \right) dx = 5 \rho A \dot{\omega} L \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \left(1 + \frac{1}{5} \xi \right) L d\xi = \frac{\rho A \dot{\omega} L^2}{5} \begin{bmatrix} 23 \\ 8L \\ 27 \\ 26L/3 \end{bmatrix}$$

Med förskjutningsrandvillkoren ($d_1 = d_2 = 0$), fås det reducerade ekv.syst.

$$\text{Ekv. (3, 4): } \frac{EI}{2L^3} \begin{bmatrix} 3 & -3L \\ -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \frac{\rho A \dot{\omega} L^2}{5} \begin{bmatrix} 27 \\ 26L/3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \frac{\rho A \dot{\omega} L^4}{15EI} \begin{bmatrix} 164L \\ 110 \end{bmatrix}$$

Ekv. (1) ger sedan reaktionsmomentet (M_R) vid $x = -L$ enligt

$$\frac{EI}{2L^3} \frac{\rho A \dot{\omega} L^4}{15EI} (-3 \cdot 164L + 3L \cdot 110) = \frac{23}{5} \rho A \dot{\omega} L^2 + M_R \Rightarrow M_R = \frac{4}{5} \rho A \dot{\omega} L^2$$

4.

Koordinat-transformation:
$$\left. \begin{aligned} x &= 2L(1 + \xi) \\ y &= L\eta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2L & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix} \Rightarrow |\mathbf{J}| = 2L^2$$

Bidrag från volymslast till elementlastvektorn:
$$\mathbf{f}_b = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{f}_v |\mathbf{J}| h d\xi d\eta \quad \text{där} \quad \mathbf{f}_v = \begin{bmatrix} \rho \omega^2 2L(1 + \xi) \\ 0 \end{bmatrix}$$

För nod 2 gäller:
$$f_{2x} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_2 \rho \omega^2 2L(1 + \xi) 2L^2 h d\xi d\eta, \quad f_{2y} = 0 \quad \text{där} \quad N_2 = \frac{(1 + \xi)(1 - \eta)}{4}$$

$$\Rightarrow f_{2x} = \rho \omega^2 L^3 h I \quad \text{där} \quad I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad F(\xi, \eta) = (1 + \xi)^2 (1 - \eta)$$

Gauss-kvadratur (2 pkt. i ξ -led och 1pkt. i η -led ger exakt lösning):

ξ -led: $\xi_1 = -1/\sqrt{3}, w_{\xi_1} = 1; \quad \xi_2 = 1/\sqrt{3}, w_{\xi_2} = 1 \quad \eta$ -led: $\eta_1 = 0, w_{\eta_1} = 2$

$$I = F(\xi_1, \eta_1) \cdot 2 \cdot 1 + F(\xi_2, \eta_1) \cdot 2 \cdot 1 = 16/3 \Rightarrow f_{3y} = 16\rho\omega^2 L^3 h/3$$

5.

(a) Egentyngdens bidrag till elementlastvektorn är:
$$\mathbf{f}_b = \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{f}_v dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{f}_v h |\mathbf{J}| d\xi d\eta$$

För nod 1 gäller att:
$$\begin{bmatrix} f_{b1x} \\ f_{b1y} \end{bmatrix} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_1 \begin{bmatrix} -\rho g \sin \varphi \\ \rho g \cos \varphi \end{bmatrix} h |\mathbf{J}| d\xi d\eta$$

där $|\mathbf{J}| = \frac{L^2}{2}, N_1 = \frac{(1 - \xi)(1 - \eta)}{4} \Rightarrow \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_1 d\xi d\eta = 1$

d.v.s.
$$\begin{bmatrix} f_{b1x} \\ f_{b1y} \end{bmatrix} = \frac{\rho g h L^2}{2} \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix} \quad \text{V.S.V.}$$

(b) Ekvationssystem: $\mathbf{K}_e \mathbf{d}_e = \mathbf{f} \quad \text{där} \quad \mathbf{f} = \mathbf{f}_p + \mathbf{f}_b$

$$\mathbf{f}_p^T = [0 \ R_{1y} \ R_{2x} \ R_{2y} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \quad \mathbf{f}_b^T = [f_{b1x} \ f_{b1y} \ f_{b2x} \ f_{b2y} \ f_{b3x} \ f_{b3y} \ f_{b4x} \ f_{b4y}]$$

Reaktionskrafterna i nod 1 ges av Ekv. (1) och (2) (OBS! $R_{1x} = 0$) enligt

$$\begin{bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \end{bmatrix} = \frac{Eh}{8} \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 & -1 & -3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & -2 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{d}_e - \begin{bmatrix} f_{b1x} \\ f_{b1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho g h L^2 (\cos \varphi - 2 \sin \varphi) \end{bmatrix}$$

(c) Förskjutningsvektorn i punkten $\left\{ x = \frac{L}{2}, y = 2L \right\} \Leftrightarrow \{ \xi = 0, \eta = 1 \}$ ges av

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \mathbf{N}|_{\xi=0, \eta=1} \mathbf{d}_e = \frac{\rho g L^2}{E} \begin{bmatrix} -\frac{155}{12} \sin \varphi \\ 2 \cos \varphi \end{bmatrix}$$