

Tentamen i FEM för ingenjörstillämpningar (SE1025) den 15 mars 2011 kl. 14-19.

Resultat kommer att finnas tillgängligt senast den 5 april. Klagomål på rättningen skall vara framförda senast en månad därefter.

OBS! Tentand är skyldig att visa legitimation. Skriv endast på en sida av bladet. Skriv tydligt namn och personnummer på varje blad. Lösningar som är otydliga och svåra att följa kommer inte att bedömas.

Hjälpmedel: Formelsamling i Hållfasthetslära, TEFYMA, BETA eller liknande och räknedosa.

Examinator: Jonas Faleskog, tel. 790 8977.

Betygsgränser: F(underkänd) $p \leq 10$; FX(möjlighet till kompletteringstentamen) $p \geq 11$; E $p \geq 13$; D $p \geq 15$; C $p \geq 17$; B $p \geq 20$; A $p \geq 23$, där ($p = \text{tentamen} + \text{bonus}$).

- 1.** [5 poäng] En struktur bestående av tre fjädrar belastas av två punktkrafter P_x och P_y , se Figur 1. Fjädrarna 2 och 3 har fjäderkonstanten k_0 och fjäder 1 har fjäderkonstanten k . Bestäm k , så att strukturens styvhet i y -led är η gånger styvheten i x -led ($\eta > 1$), dvs $P_y/\delta_y = \eta P_x/\delta_x$ skall gälla. Beräkna dessutom normalkraften i fjäder 1 som funktion av yttre punktkrafter och parametern η .

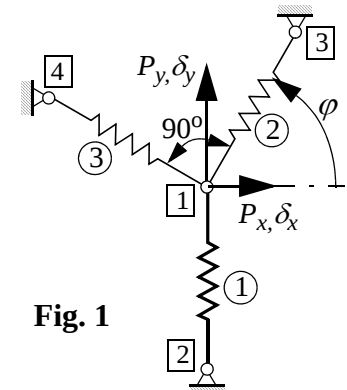
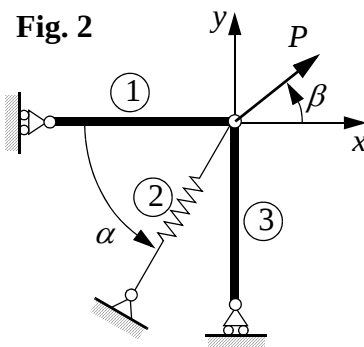


Fig. 1

Fig. 2



- 2.** [3 poäng] Ett fackverk bestående av 2 stänger och en fjäder belastas med en punktkraft P , se Figur 2. Visa med hjälp av virtuella arbetets princip att jämviktsekvationerna för fackverket blir

$$N_1 + N_2 \cos \alpha - P \cos \beta = 0$$

$$N_2 \sin \alpha + N_3 - P \sin \beta = 0,$$

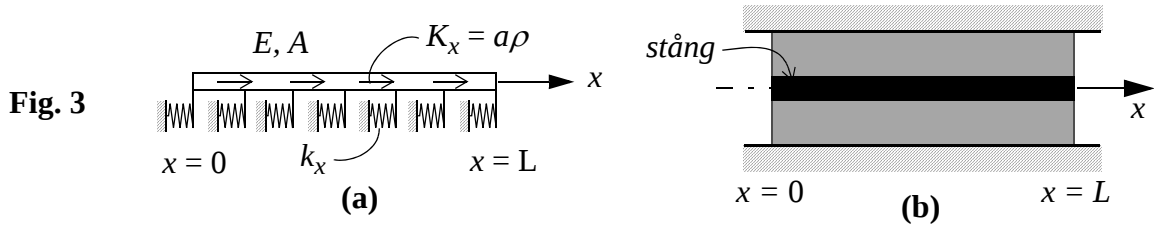
där N_i är elementens normalkrafter. *Ledning:* samband mellan stängernas förlängningar och kraftangreppspunktens förskjutning i x - respektive y -led behövs.

- 3.** Stången i Figur 3(a) är kopplad till omgivningen via en kontinuerlig linjärelastisk fjäder med en fjäderkonstant per längdenhet k_x [(N/m) / m]. Stången har elasticitetsmodulen E , tvärsnittsarean A , densiteten ρ och utsätts för en acceleration $a(x)$ i x -riktningen. Stångens förskjutningen $u(x)$ ges av lösningen till differentialekvationen

$$\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) - k_x u + a \rho A = 0,$$

där $N = EAu'$ gäller vid en rand med föreskriven normalkraft ($N = A\sigma$).

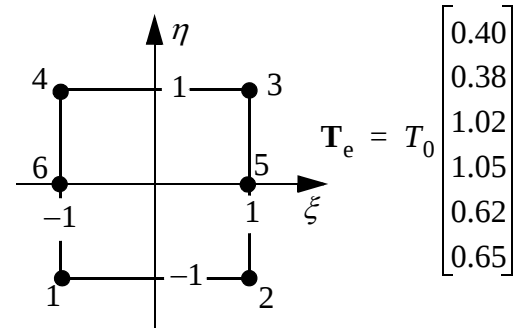
- (a) [3 poäng] Ta fram den svaga formen till differentialekv. ovan och härled FEM-ekvationen (anv. Galerkins metod) för ett element, dvs identifiera storheterna i ekvationen $\mathbf{k}_e \mathbf{d}_e = \mathbf{f}_e$.
- (b) [3 poäng] Figur 3(b) visar ett enkelt mekanisk system för att mäta acceleration som består av en elastisk stång fastsatt i en elastisk cylinder. Cylinderns styvhet modelleras här som en kontinuerlig elastisk fjäder med $k_x = \eta EA/L^2$ ($\eta > 0$). Antag att stången är utsatt för en konstant acceleration a (inverkan av cylinderns densitet försummas här). Antag vidare att E , A och ρ är konstanter. Dela in stången i två linjära element och ta fram ett uttryck för accelerationen a som funktion av förskjutningen vid höger ände, $\Delta = u(x = L)$, för fallet $\eta = 24$. Jämför med den exakta lösningen $a = \eta E \Delta / (\rho L^2)$. OBS! tröghetskraften som accelerationen ger upphov till är den enda yttre kraft som belastar stången, dvs stångens ändar är fria.



4. [4 poäng] Figuren till höger visar ett element med linjär interpolation i ξ -led och kvadratisk interpolation i η -led. Elementet används i en värmeledningsanalys där temperaturen uppvisar starkt variation i η -led och svag variation i ξ -led. Formfunktionerna för noderna 2 och 3 är:

$$N_2 = -(1 + \xi)\eta(1 - \eta)/4$$

$$N_3 = (1 + \xi)\eta(1 + \eta)/4$$



Ta fram formfunktionen för nod 5 och bestäm tempe-

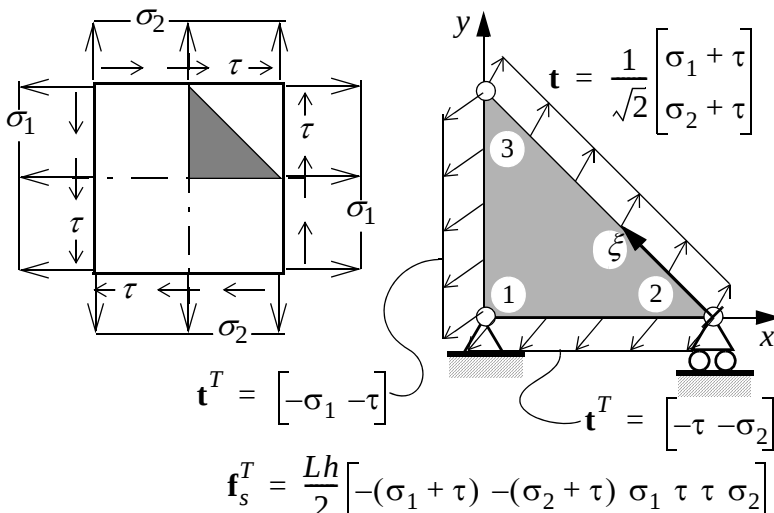
raturen i punkten $\{\xi = 1, \eta = 0.5\}$, där elementets temperaturvektor, $\mathbf{T}_e$, är given i Figuren (nodernatemperaturernas position i $\mathbf{T}_e$ följer nodnumreringen och där T_0 är en referenstemperatur).

5. En kvadratisk plåt ($2L \times 2L$) med tjockleken h belastas med en kombination av normal- och skjuvspänningar på ränderna. En exakt analys av plåten kan utföras med hjälp av ett enda linjärt 3-sidigt plant CST-element enligt FEM-modellen i figuren nedan. I modellen införs lasterna som spänningsvektorer $\mathbf{t}$ verkande på respektive elementsida. Materialet är isotropt, linjärt elastiskt med elasticitetsmodulen E och Poissons tal $\nu = 1/3$. Elementets formfunktioner N_i och elementstyvhetismatris $\mathbf{k}_e$ (plant spänningstillstånd) är givna i figuren.

- (a) [3 poäng] Ta fram bidraget från spänningsvektorn verkande på sidan mellan noderna 2 och 3 till nodlastvektorn $\mathbf{f}_s$. Vid beräkning av de konsistenta nodkrafterna kan med fördel den normaliserade dimensionslösa koordinaten ξ utnyttjas, där $\xi = 0$ i nod 2 och $\xi = 1$ i nod 3, vilket ger sambanden $x = L(1 - \xi)$ och $y = L\xi$ (OBS! notera att $\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{2}Ld\xi$).

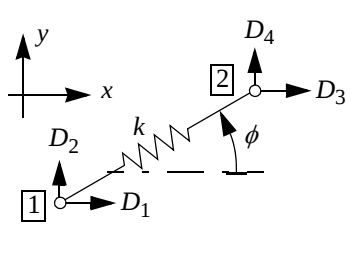
- (b) [2 poäng] Beräkna samtliga nodförskjutningar $\mathbf{d}_e$ (OBS! lastvektorn från utbredda laster verkande på elementets ränder, $\mathbf{f}_s$, är given i figuren.)

- (c) [2 poäng] Beräkna töjningarna i elementet och visa att de överensstämmer med den exakta lösningen, d.v.s. $E\varepsilon_x = \sigma_1 - \sigma_2/3$, $E\varepsilon_y = \sigma_2 - \sigma_1/3$ och $E\gamma_{xy} = 8\tau/3$.



FORMELBLAD (komplement till kap. 21. i Formelsamling i Hållfasthetslära)

GLOBAL BESKRIVNING FÖR ENDIMENSIONELLA ELEMENT

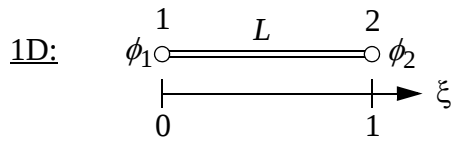


$$\mathbf{K}_e = k \begin{bmatrix} \mathbf{a} & -\mathbf{a} \\ -\mathbf{a} & \mathbf{a} \end{bmatrix} \quad \text{där} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} c^2 & sc \\ sc & s^2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} c = \cos \phi \\ s = \sin \phi \end{matrix}$$

$$\text{alternativt} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} l_{12}^2 & l_{12}m_{12} \\ l_{12}m_{12} & m_{12}^2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} l_{12} = \cos \phi_x = (x_2 - x_1)/L \\ m_{12} = \cos \phi_y = (y_2 - y_1)/L \\ L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{matrix}$$

OLIKA FINITA ELEMENT

1D:

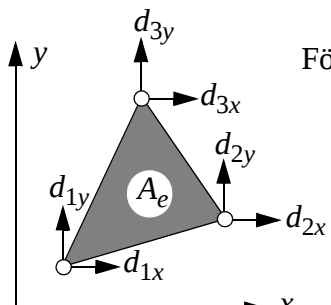


$$\phi(\xi) = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} N_1 = 1 - \xi \\ N_2 = \xi \end{matrix} \quad \mathbf{B} = \frac{d\mathbf{N}}{d\xi} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Användbara integraler: $\int_0^1 \mathbf{B}^T \mathbf{B} L d\xi = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \int_0^1 \mathbf{N}^T \mathbf{N} L d\xi = \frac{L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \int_0^1 \mathbf{N}^T L d\xi = \frac{L}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

2D:

3-sidigt triangelement:



Förskjutningar: $\begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \mathbf{d}_e = \mathbf{N} \mathbf{d}_e \quad \mathbf{d}_e = \begin{bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \\ d_{3x} \\ d_{3y} \end{bmatrix}$

$$N_1 = \frac{1}{2A_e} [(y_2 - y_3)(x - x_2) + (x_3 - x_2)(y - y_2)]$$

$$N_2 = \frac{1}{2A_e} [(y_3 - y_1)(x - x_3) + (x_1 - x_3)(y - y_3)]$$

$$N_3 = \frac{1}{2A_e} [(y_1 - y_2)(x - x_1) + (x_2 - x_1)(y - y_1)]$$

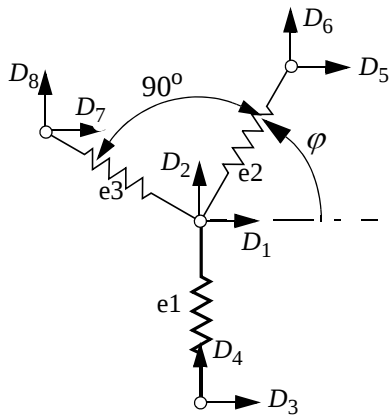
Töjningar: $\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{d}_e \quad \mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3] \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial y \\ \partial N_i / \partial y & \partial N_i / \partial x \end{bmatrix}$

Spänningar:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad \mathbf{C} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \text{ (P.S)} \quad \mathbf{C} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \text{ (P.D)}$$

FEM Ekv. (ett element): $\left[\int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \right] \mathbf{d}_e = \left[\int_{S_e} \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS + \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{K} dV \right] \quad \begin{matrix} \mathbf{t} = \text{spänningsvektor} \\ \mathbf{K} = \text{volymkraft} \end{matrix}$

LÖSNINGSFÖRSLAG: FEM FÖR INGENJÖRSTILLÄMPNINGAR, 15 MARS, 2011

1Randvillkor:

$$F_1 = P_x, \quad F_2 = P_y; \quad D_3 = D_4 = D_5 = D_6 = D_7 = D_8 = 0$$

Elementstyvhetsmatriser:

$$\mathbf{K}_i = k_i \begin{bmatrix} \mathbf{a} & -\mathbf{a} \\ -\mathbf{a} & \mathbf{a} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} c_\phi^2 & s_\phi c_\phi \\ s_\phi c_\phi & s_\phi^2 \end{bmatrix}, \quad c_\phi = \cos \phi, \quad s_\phi = \sin \phi$$

$$\underline{\text{e1:}} \quad k_1 = k, \quad \mathbf{a}_1 = \{\phi = 90^\circ\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\text{e2\& e3:}} \quad k_2 = k_3 = k_0$$

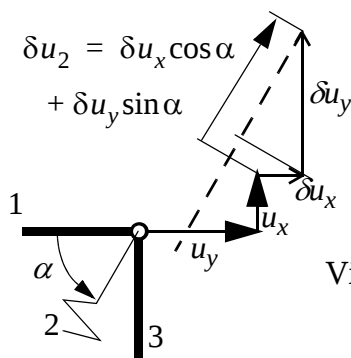
$$\mathbf{a}_2 = \{\phi = \varphi\} = \begin{bmatrix} c_\varphi^2 & s_\varphi c_\varphi \\ s_\varphi c_\varphi & s_\varphi^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \left\{ \phi = \varphi + \frac{\pi}{2} \right\} = \begin{bmatrix} s_\varphi^2 & -s_\varphi c_\varphi \\ -s_\varphi c_\varphi & c_\varphi^2 \end{bmatrix}$$

Reducerat Ekv. syst. med $D_1 = \delta_x, D_2 = \delta_y$

$$[k\mathbf{a}_1 + k_0(\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3)] \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} k_0 & 0 \\ 0 & k_0 + k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix}$$

$$\text{Villkor: } \frac{P_y}{\delta_y} = \eta \frac{P_x}{\delta_x} \Rightarrow \boxed{k = (\eta - 1)k_0}$$

$$\text{Normalkraft i element 1: } N_1 = k\delta_y = k \frac{P_y}{k_0 + k} = \frac{(\eta - 1)}{\eta} P_y$$

2

$$\text{Kompatibilitet: } \delta u_1 = \delta u_x, \quad \delta u_2 = \delta u_x \cos \alpha + \delta u_y \sin \alpha$$

$$\delta u_3 = \delta u_y$$

$$\text{Inre virt. arb.: } \delta A^i = \delta u_1 N_1 + \delta u_2 N_2 + \delta u_3 N_3$$

$$\text{Yttre virt. arb.: } \delta A^e = \delta u_x \cos \beta P + \delta u_y \sin \beta P$$

Virtuella arbetets princip: $\delta A^i = \delta A^e$ med kompatibilitet insatt ger

$$\Rightarrow \delta u_x (N_1 + N_2 \cos \alpha - P \cos \beta) + \delta u_y (N_2 \sin \alpha + N_3 - P \sin \beta) = 0$$

Då δu_x och δu_y är godtyckliga fås jämviktsekvationerna

$$N_1 + N_2 \cos \alpha - P \cos \beta = 0; \quad N_2 \sin \alpha + N_3 - P \sin \beta = 0$$

3(a)

Svag form (multiplicera ODE med godtycklig viktfn. $v(x)$, låt l vara elementets längd):

$$\int_0^l v[(EAu')' - k_x u + a\rho A] dx = 0 \quad (1)$$

Partialintegrera 1: termen: $\int_0^l v(EAu')' dx = [v(EAu')]_0^l - \int_0^l v'(EAu') dx \quad (2)$

Ek. (2), där $EAu' = A\sigma$ gäller vid ränderna, insatt i (1) ger den svaga formen enligt

$$\int_0^l [v'(EAu') + vk_x u] dx = [v(A\sigma)]_0^l + \int_0^l va\rho A dx$$

FEM-Ekv. ett element (approximativ lösning av svag form):

Förskjutningsansats: $u(x) = \mathbf{N}\mathbf{d}_e \Rightarrow u' = \mathbf{B}\mathbf{d}_e$ där $\mathbf{B} = \frac{d\mathbf{N}}{dx}$ ($\mathbf{d}_e$, elementets nodförskjutningsvektor)

Viktfn. (val enl. Galerkin): $v(x) = \mathbf{N}\mathbf{b}_e = \mathbf{b}_e^T \mathbf{N}^T \Rightarrow v' = \mathbf{B}\mathbf{b}_e = \mathbf{b}_e^T \mathbf{B}^T$ ($\mathbf{b}_e$, en vektor med godtyckliga komp.)

Insatt i svag form ger:

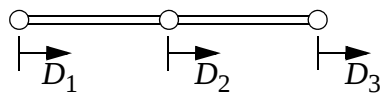
$$\mathbf{b}_e \left[\underbrace{\int_0^l \mathbf{B}^T E A \mathbf{B} dx + \int_0^l \mathbf{N}^T k_x \mathbf{N} dx}_{\mathbf{k}_e} \right] \mathbf{d}_e = \mathbf{b}_e \left[\underbrace{[\mathbf{N}^T (A\sigma)]_0^l}_{\mathbf{f}_s} + \underbrace{\int_0^l \mathbf{N}^T a \rho A dx}_{\mathbf{f}_b} \right]$$

Då $\mathbf{b}_e$ är en godtycklig vektor fås: $\mathbf{k}_e \mathbf{d}_e = \mathbf{f}_s + \mathbf{f}_b = \mathbf{f}_e$

3(b)

FEM-analys, två lika långa linjära element: $\mathbf{N} = [1 - \xi \quad \xi], \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix}$

Diskretisering: $x = 0 \quad x = L/2 \quad x = L$



R.V.: $F_{S1} = F_{S3} = 0$ (inga yttre punktkrafter på randen)

Elementmatriser:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 = \int_0^l \mathbf{B}^T E A \mathbf{B} dx + \int_0^l \mathbf{N}^T k_x \mathbf{N} dx = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{lk_x}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \left\{ l = \frac{L}{2}, k_x = \frac{\eta EA}{L^2} \right\} = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\eta EA}{12L} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \{ \eta = 24 \} = \frac{6EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_{b1} = \mathbf{f}_{b2} = \int_0^l \mathbf{N}^T a \rho A dx = \left\{ l = \frac{L}{2} \right\} = \frac{a \rho A L}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ekvations-system:

$$\frac{6EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \frac{a \rho A L}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \frac{a \rho L^2}{24E} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} D_3 = \Delta \\ a = \frac{24E\Delta}{\rho L^2} \end{cases}$$

Samma som den exakta lösningen!
OBS! notera att $du/dx = 0$, dvs det är fråga om stelkroppsrörelse!

Kommentar: för godtyckliga η fås med $\bar{\eta} = \eta/24$

$$\frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 2\bar{\eta} + 1 & \bar{\eta} - 1 & 0 \\ \bar{\eta} - 1 & 4\bar{\eta} + 2 & \bar{\eta} - 1 \\ 0 & \bar{\eta} - 1 & 2\bar{\eta} + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \frac{a \rho A L}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \frac{a \rho L^2}{24\bar{\eta}E} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{a \rho L^2}{\eta E} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4

För nod 5 gäller att:

$$N_5(\xi = -1, \eta) = N_5(\xi, \eta = -1) = N_5(\xi, \eta = 1) = 0 \Rightarrow N_5 = C(1 + \xi)(1 - \eta^2)$$

$$N_5(\xi = 1, \eta = 0) = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{N_5 = \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2)}$$

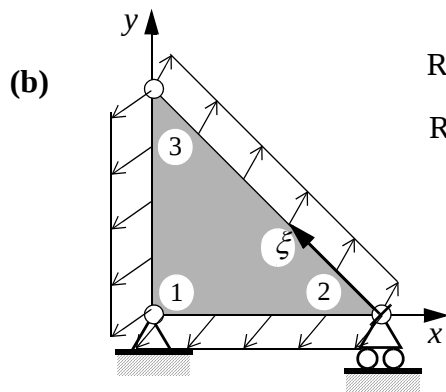
Temperaturen i pkt. $\xi = 1, \eta = 0.5$:

$$\begin{aligned} T(\xi = 1, \eta = 0.5) &= \mathbf{N}|_{\xi=1, \eta=0.5} \mathbf{T}_e = N_2 T_2 + N_3 T_3 + N_5 T_5 = \\ &= \frac{T_0}{8}(-0.38 + 3 \cdot 1.02 + 6 \cdot 0.62) = 0.8 T_0 \end{aligned}$$

5

(a) Bidrag till nodlastvektorn $\mathbf{f}_s$ från spänningsvektorn verkande på sidan mellan noderna 2 och 3:

$$\int_{S_{23}} (\mathbf{N}^T \mathbf{t})|_{23} dS = \begin{cases} dS = h\sqrt{2}Ld\xi \\ N_1 = 0 \\ N_2 = 1 - \xi \\ N_3 = \xi \end{cases} = \int_0^1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 - \xi & 0 \\ 0 & 1 - \xi \\ \xi & 0 \\ 0 & \xi \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sigma_1 + \tau \\ \sigma_2 + \tau \end{bmatrix} h\sqrt{2}Ld\xi = \frac{Lh}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_1 + \tau \\ \sigma_2 + \tau \\ \sigma_1 + \tau \\ \sigma_2 + \tau \end{bmatrix}$$



$$\text{Randvillkor: } d_{1x} = d_{1y} = d_{2y} = 0$$

Reducerat ekvationssystem (Ekv. 3,5,6):

$$\frac{3Eh}{16} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{2x} \\ d_{3x} \\ d_{3y} \end{bmatrix} = \frac{Lh}{2} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \tau \\ \sigma_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} d_{2x} \\ d_{3x} \\ d_{3y} \end{bmatrix} = \frac{L}{3E} \begin{bmatrix} 3\sigma_1 - \sigma_2 \\ 8\tau \\ 3\sigma_2 - \sigma_1 \end{bmatrix}$$

(c) Töjningar: $\varepsilon = \mathbf{B} \mathbf{d}_e = [\mathbf{B}_1 \ \mathbf{B}_2 \ \mathbf{B}_3] \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \end{bmatrix} = \begin{cases} \mathbf{d}_1^T = [0 \ 0] \\ \mathbf{d}_1^T = [d_{2x} \ 0] \\ \mathbf{d}_1^T = [d_{3x} \ d_{3y}] \end{cases} = \mathbf{B}_2 \mathbf{d}_2 + \mathbf{B}_3 \mathbf{d}_3$

$$\text{där } \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}_2 = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_3 = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{2x} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{3x} \\ d_{3y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{2x}/L \\ d_{3y}/L \\ d_{3x}/L \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} \sigma_1 - \sigma_2/3 \\ \sigma_2 - \sigma_1/3 \\ 8\tau/3 \end{bmatrix} \quad \text{Stämmer med den exakta lösningen!}$$