

Tentamen i FEM för ingenjörstillämpningar (SE1025) den 1 juni 2011 kl. 8-13.

Resultat kommer att finnas tillgängligt senast den 22 juni. Klagomål på rättningen skall vara framförda senast en månad därefter.

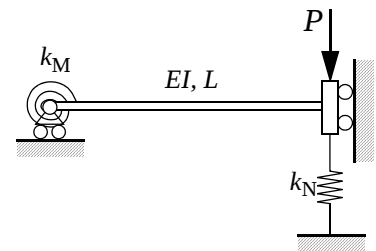
OBS! Tentand är skyldig att visa legitimation. Skriv endast på en sida av bladet. Skriv tydligt namn och personnummer på varje blad. Lösningar som är otydliga och svåra att följa kommer inte att bedömas.

Hjälpmedel: Formelsamling i Hållfasthetslära, TEFYMA, BETA eller liknande och räknedosa.

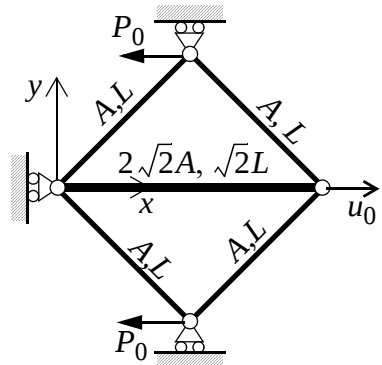
Examinator: Jonas Faleskog, tel. 790 8977.

Betygsgränser: F(underkänd) $p \leq 10$; FX(möjlighet till kompletteringstentamen) $p \geq 11$; E $p \geq 13$; D $p \geq 15$; C $p \geq 17$; B $p \geq 20$; A $p \geq 23$, där ($p = \text{tentamen} + \text{bonus}$).

- 1.** [3 poäng] En balk i en konstruktion kan modelleras enligt figuren till höger, där flexibiliteten av omkringliggande delar beskrivs mha en linjär fjäder, k_N (högerände), och en linjär momentfjäder, k_M (vänster ände). Balken har längden L och böjstyvhetsen EI , och fjäderkonstanterna är $k_M = EI/(\beta L)$ respektive $k_N = EI/(\alpha L^3)$, där α och β är positiva dimensionslösa konstanter. Bestäm förskjutningen i punkten där den yttre kraften P angriper mha av energimetod baserad på komplementär elastisk energi.



- 2.** [5 poäng] Figuren till höger visar ett fackverk bestående av fem stänger som belastas med två punktkrafter, vardera P_0 , och en föreskriven förskjutning u_0 . Alla stänger har elasticitetsmodulen E . De stänger som är roterade 45° relativt horisontalplanet har alla längden L och tvärsnittsarean A . Den horisontella stängen har längden $\sqrt{2}L$ och tvärsnittsarean $2\sqrt{2}A$. Bestäm nodernas förskjutningar. *OBS! problemet blir betydligt enklare att lösa om dess symmetri beaktas.*



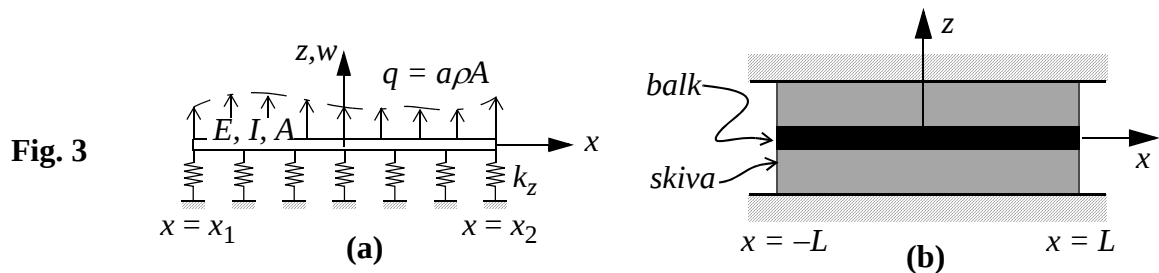
- 3.** Balken i Figur 3(a) är kopplad till omgivningen via en kontinuerlig linjärelastisk fjäder med en fjäderkonstant per längdenhet k_z [(N/m) / m]. Stången har elasticitetsmodulen E , yttröghetsmomentet I , tvärsnittsarean A , densiteten ρ och utsätts för en acceleration $a(x)$ i z -riktningen. Balkens förskjutningen i z -led, $w(x)$, ges av lösningen till differentialekvationen

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + k_z w - \rho A a = 0,$$

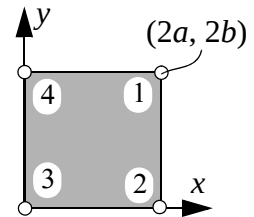
där $T = -(EIw'')$ och $M = -EIw''$ gäller vid rand med förskrivna tvärkraft respektive moment.

- (a) [3 poäng] Ta fram den svaga formen till differentialekv. ovan och härled FEM-ekvationen (anv. Galerkins metod) för ett element, dvs identifiera storheterna i ekvationen $\mathbf{k}_e \mathbf{d}_e = \mathbf{f}_e$.
- (b) [3 poäng] Figur 3(b) visar ett enkelt mekanisk system för att mäta acceleration som består av en elastisk balk fastsatt i en elastisk skiva vars styvhet modelleras som en kontinuerlig elastisk fjäder med $k_z = \eta EI/L^4$ ($\eta > 0$). Antag att balken utsätts för en konstant acceleration a (inverkan av skivans masströghet försummas här) och att EI , A och ρ är konstanter. Dessutom, för att förenkla analysen, kan vinkeländringen i balkens ändrar sättas till noll, dvs

$w'(-L) = w'(L) = 0$. Använd ett balkelement (2 frihetsgrader/nod) och ta fram ett uttryck för accelerationen a som funktion av förskjutningen i balkens mittpunkt, $\Delta = w(x=0)$, för fallet $\eta = 35/6$. Jämför med den exakta lösningen $a = \eta EI \Delta / (AL^4 \rho)$. OBS! tröghetskraften som accelerationen ger upphov till är den enda yttre kraft som belastar balken.

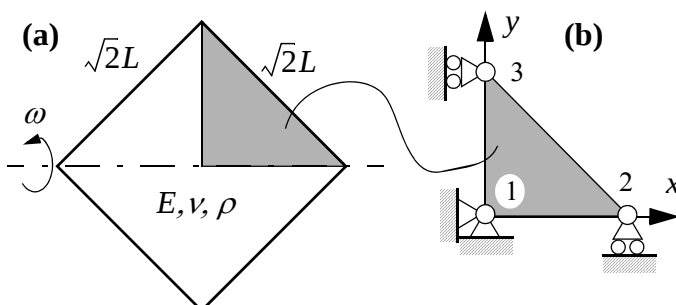


4. [4 poäng] I det bi-linjära isoparametriska elementet visat i figuren till höger är noderna felnumrerade, givet de formfunktioner som används för att beskriva geometri och förskjutningar i elementet, se Formelbladet nedan. Bestäm Jacobimatrissens determinant för det aktuella elementet. Varför blir en FEM-analys felaktig i detta fall?



5. En kvadratisk skiva med kantlängden $\sqrt{2}L$ och tjockleken h roterar kring sin diagonal med en konstant vinkelhastighet ω , se Figur (a) nedan. Skivans material är isotropt, linjärelastiskt med elasticitetsmodulen E , Poissons tal ν och densiteten ρ . Antag vidare att förhållanden av plan spänning råder och att $\nu = 3/10$. En mycket "grov" finita elementmodell av skivan där hänsyn till problemets symmetri har utnyttjats visas i Figur (b) nedan. Modellen består av ett enda triangel-element med linjär ansats för förskjutningen (CST-element). "Centrifugalkraftens" inverkan på skivan kan modelleras genom volymskraften $K_y = \rho \omega^2 y$. Elementets formfunktioner N_i och elementstyvhetsmatris $\mathbf{K}_e$ (plant spänningstillstånd) är givna i figuren.

- (a) [3 poäng] Visa att den totala nodlastvektorn blir $\mathbf{F} = [0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 2] hL^3 \rho \omega^2 / 24 + \mathbf{F}_R$, där $\mathbf{F}_R$ innehåller de reaktionskrafter som uppstår pga föreskrivna förskjutningsrandvillkor.
- (b) [2 poäng] Beräkna samtliga nodförskjutningar $\mathbf{d}_e$ och reaktionskrafter $\mathbf{F}_R$.
- (c) [2 poäng] Beräkna spänningarna i elementet.



Nodförskjutningsvektor: $\mathbf{d}_e^T = [d_{1x} \ d_{1y} \ d_{2x} \ d_{2y} \ d_{3x} \ d_{3y}]$

Formfunktioner:

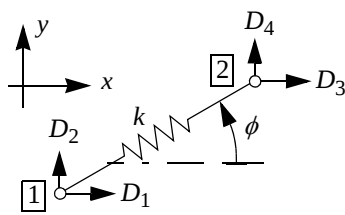
$$N_1 = 1 - \frac{x}{L} - \frac{y}{L}, \quad N_2 = \frac{x}{L}, \quad N_3 = \frac{y}{L}$$

Elementstyvhetsmatris:

$$\mathbf{K}_e = \frac{Eh}{182} \begin{bmatrix} 135 & 65 & -100 & -35 & -35 & -30 \\ 65 & 135 & -30 & -35 & -35 & -100 \\ -100 & -30 & 100 & 0 & 0 & 30 \\ -35 & -35 & 0 & 35 & 35 & 0 \\ -35 & -35 & 0 & 35 & 35 & 0 \\ -30 & -100 & 30 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$$

FORMELBLAD (komplement till Formelsamling i Hållfasthetslära)

GLOBAL BESKRIVNING FÖR ENDIMENSIONELLA ELEMENT

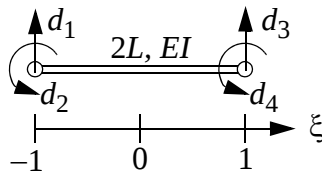


$$\mathbf{K}_e = k \begin{bmatrix} \mathbf{a} & -\mathbf{a} \\ -\mathbf{a} & \mathbf{a} \end{bmatrix} \quad \text{där} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} c^2 & sc \\ sc & s^2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} c = \cos \phi \\ s = \sin \phi \end{array}$$

$$\text{alternativt} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} l_{12}^2 & l_{12}m_{12} \\ l_{12}m_{12} & m_{12}^2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} l_{12} = \cos \phi_x = (x_2 - x_1)/L \\ m_{12} = \cos \phi_y = (y_2 - y_1)/L \\ L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{array}$$

OLIKA FINITA ELEMENT

1D, Balkelement: Utböjning: $w(\xi) = N_1 d_1 + N_2 d_2 + N_3 d_3 + N_4 d_4 = \mathbf{N} \mathbf{d}_e$, $\mathbf{B} = \frac{d^2 \mathbf{N}}{dx^2} = \frac{1}{L^2} \frac{d^2 \mathbf{N}}{d\xi^2}$



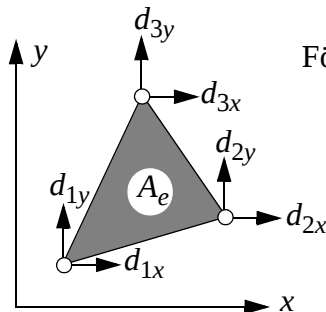
$$N_1 = (2 - 3\xi + \xi^3)/4, \quad N_2 = L(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3)/4$$

$$N_3 = (2 + 3\xi - \xi^3)/4, \quad N_4 = L(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)/4$$

$$\int_{-L}^L \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx = \frac{1}{2L^3} \begin{bmatrix} 3 & 3L & -3 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & 2L^2 \\ -3 & -3L & 3 & -3L \\ 3L & 2L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad \int_{-L}^L \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx = \frac{L}{105} \begin{bmatrix} 78 & 22L & 27 & -13L \\ 22L & 8L^2 & 13L & -6L^2 \\ 27 & 13L & 78 & -22L \\ -13L & -6L^2 & -22L & 8L^2 \end{bmatrix} \quad \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T L d\xi = L \begin{bmatrix} 1 \\ L/3 \\ 1 \\ -L/3 \end{bmatrix}$$

Plana element (2D):

3-sidigt triangelement:



Förskjutningar:

$$\begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \mathbf{d}_e = \mathbf{N} \mathbf{d}_e \quad \mathbf{d}_e = \begin{bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \\ d_{3x} \\ d_{3y} \end{bmatrix}$$

$$N_1 = \frac{1}{2A_e} [(y_2 - y_3)(x - x_2) + (x_3 - x_2)(y - y_2)]$$

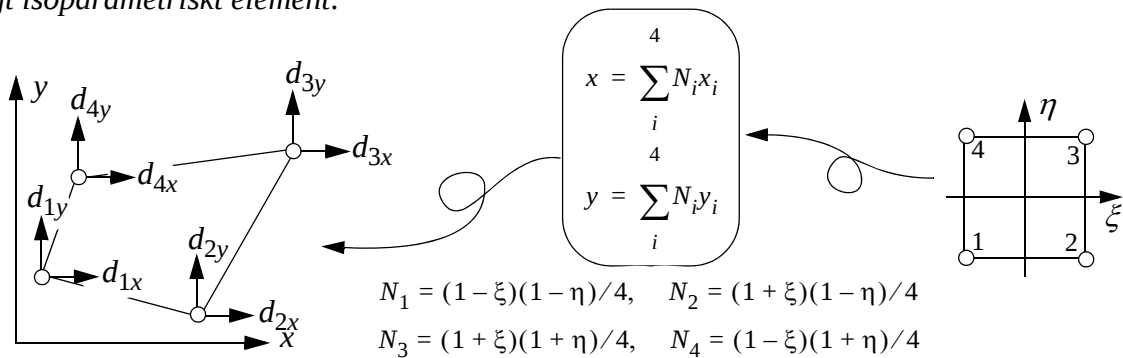
$$N_2 = \frac{1}{2A_e} [(y_3 - y_1)(x - x_3) + (x_1 - x_3)(y - y_3)]$$

$$N_3 = \frac{1}{2A_e} [(y_1 - y_2)(x - x_1) + (x_2 - x_1)(y - y_1)]$$

Töjningar:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{d}_e \quad \mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_3] \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial y \\ \partial N_i / \partial y & \partial N_i / \partial x \end{bmatrix}$$

4-sidigt isoparametriskt element:



$$N_1 = (1 - \xi)(1 - \eta)/4, \quad N_2 = (1 + \xi)(1 - \eta)/4$$

$$N_3 = (1 + \xi)(1 + \eta)/4, \quad N_4 = (1 - \xi)(1 + \eta)/4$$

Förskjutningar:

$$\begin{bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \mathbf{d}_e = \mathbf{N} \mathbf{d}_e$$

Töjningar:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{d}_e \quad \mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_4] \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial y \\ \partial N_i / \partial y & \partial N_i / \partial x \end{bmatrix}$$

$$\text{där } \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x \\ \partial N_i / \partial y \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial \xi \\ \partial N_i / \partial \eta \end{bmatrix} \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial y / \partial \xi \\ \partial x / \partial \eta & \partial y / \partial \eta \end{bmatrix}$$

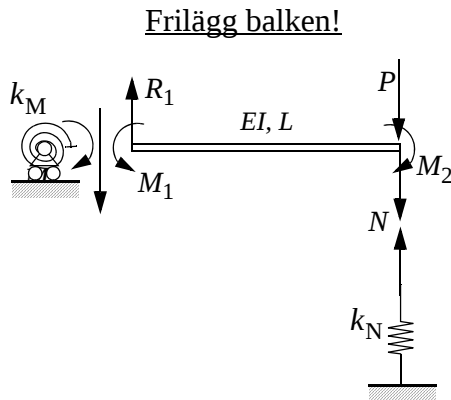
Spänningar:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon} \quad \mathbf{C} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix} \text{ (P.S)} \quad \mathbf{C} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix} \text{ (P.D)}$$

$$\text{FEM Ekv. (ett element): } \left[\int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \right] \mathbf{d}_e = \left[\int_{S_e} \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS + \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{K} dV \right] \quad \mathbf{t} = \text{spänningsvektor} \\ \mathbf{K} = \text{volymkraft}$$

LÖSNINGSFÖRSLAG: FEM FÖR INGENJÖRSTILLÄMPNINGAR, 1 JUNI, 2011

1.



2 jämviktsekv. och 4 obekanta (M_1, M_2, R_1, N)
 $\Rightarrow$ Statiskt obestämt!

Komplementär elastisk energi:

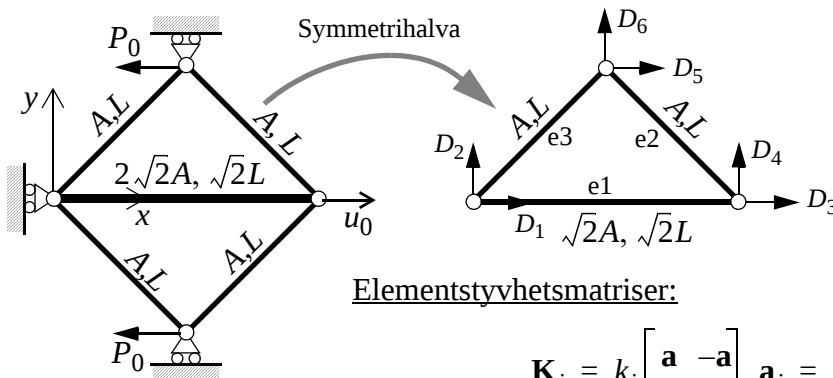
$$\bar{W} = \frac{L}{6EI}(M_1^2 + M_1M_2 + M_2^2) + \frac{M_1^2}{2k_M} + \frac{N^2}{2k_N}$$

$$\text{där } k_N = \frac{EI}{\alpha L^3}, k_M = \frac{EI}{\beta L}$$

Minsta arb. princip: $\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{W}}{\partial M_1} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{W}}{\partial M_2} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} M_1 &= \frac{6\alpha PL}{1 + 12\alpha + 4\beta + 12\alpha\beta} \\ M_2 &= \frac{6\alpha(1 + 2\beta)PL}{1 + 12\alpha + 4\beta + 12\alpha\beta} \end{aligned}$

Förskjutning i kraftangreppspunkten: $\delta = \frac{\partial \bar{W}}{\partial P} = \frac{\alpha L^3}{EI} \left(P + \left(\frac{M_2 - M_1}{L} \right) \right) = \frac{\alpha(1 + 4\beta)PL^3}{1 + 12\alpha + 4\beta + 12\alpha\beta}$

2.



Randvillkor:

$$\begin{aligned} D_1 &= D_2 = D_4 = D_6 = 0 \\ D_3 &= u_0 \\ F_5 &= -P_0 \end{aligned}$$

Elementstyvhetsmatriser:

$$\mathbf{K}_i = k_i \begin{bmatrix} \mathbf{a} & -\mathbf{a} \\ -\mathbf{a} & \mathbf{a} \end{bmatrix}, \mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} c^2 & sc \\ sc & s^2 \end{bmatrix}, c = \cos \phi, s = \sin \phi$$

e1: $k_1 = k = \frac{E\sqrt{2}A}{\sqrt{2}L} = \frac{EA}{L}, \mathbf{a}_1 = \{\phi = 0^\circ\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

e2 & e3: $k_1 = k = \frac{EA}{L}, \mathbf{a}_2 = \{\phi = -45^\circ\} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \{\phi = 45^\circ\} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Assemblering av styvhetsmatris: $\mathbf{K} = k \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3 & -\mathbf{a}_1 & -\mathbf{a}_3 \\ -\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 & -\mathbf{a}_2 \\ -\mathbf{a}_3 & -\mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}$

Reducerat Ekv. syst. (3,5):

$$\frac{k}{2} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ D_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_3 \\ -P_0 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{k}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} D_5 = \begin{bmatrix} R_3 \\ -P_0 \end{bmatrix} - \frac{k}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} u_0 \Rightarrow \begin{cases} D_5 = \frac{u_0}{2} - \frac{P_0}{k} \\ R_3 = \frac{5ku_0}{4} + \frac{P_0}{2} \end{cases}$$

3(a).

Svag form (multiplicera ODE med godtycklig viktfkn. $v(x)$):

$$\int_{x_1}^{x_2} v[(EIw'')'' + k_z w - a\rho A] dx = 0 \quad (1)$$

Partialintegrera 1: termen: $\int_{x_1}^{x_2} v(EIw'')'' dx = [vM]_{x_1}^{x_2} - [vT]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} v''(EIw'') dx \quad (2)$

(2) insatt i (1) ger $\int_{x_1}^{x_2} [v''(EIw'') + vk_z w] dx = [vT]_{x_1}^{x_2} - [vM]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} va\rho A dx$

FEM-Ekv. ett element (approximativ lösning av svag form):

Förskjutningsansats: $w(x) = \mathbf{N}\mathbf{d}_e \Rightarrow w'' = \mathbf{B}\mathbf{d}_e$ där $\mathbf{B} = \frac{d^2 \mathbf{N}}{dx^2}$ ($\mathbf{d}_e$, elementets nodförskjutningsvektor)

Viktfkn. (val enl. Galerkin): $v(x) = \mathbf{N}\mathbf{b}_e = \mathbf{b}_e^T \mathbf{N}^T \Rightarrow v'' = \mathbf{B}\mathbf{b}_e = \mathbf{b}_e^T \mathbf{B}^T$ ($\mathbf{b}_e$, en vektor med godtyckliga komp.)

Insatt i svag form med $x_1 = -L$ och $x_2 = L$ (elem. längd satt till $2L$) ger:

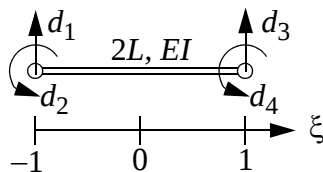
$$\mathbf{b}_e \left[\underbrace{\int_{-L}^L \mathbf{B}^T EI \mathbf{B} dx + \int_{-L}^L \mathbf{N}^T k_z \mathbf{N} dx}_{\mathbf{k}_e} \right] \mathbf{d}_e = \mathbf{b}_e \left[\underbrace{[\mathbf{N}^T T]_{-L}^L - \left[\frac{d\mathbf{N}^T}{dx} M \right]_{-L}^L}_{\mathbf{f}_s} \right] + \underbrace{\int_{-L}^L \mathbf{N}^T a \rho A dx}_{\mathbf{f}_b}$$

Då $\mathbf{b}_e$ är en godtycklig vektor fås: $\mathbf{k}_e \mathbf{d}_e = \mathbf{f}_s + \mathbf{f}_b = \mathbf{f}_e$

3(b).

FEM-analysis:

ett balkelement:



Randvillkor: $d_2 = d_4 = 0$

Elementstyvhetismatris: $\mathbf{K} = \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T EI \mathbf{B} L d\xi + \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T k_z \mathbf{N} L d\xi = \frac{EI}{2L^3} \begin{bmatrix} 3 & 3L & -3 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & 2L^2 \\ -3 & -3L & 3 & -3L \\ 3L & 2L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} + \frac{k_z L}{105} \begin{bmatrix} 78 & 22L & 27 & -13L \\ 22L & 8L^2 & 13L & -6L^2 \\ 27 & 13L & 78 & -22L \\ -13L & -6L^2 & -22L & 8L^2 \end{bmatrix}$

Lastvektor: $\mathbf{F}_b = \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T a \rho A L d\xi = a \rho A L \begin{bmatrix} 1 \\ L/3 \\ 1 \\ -L/3 \end{bmatrix}$

Reducerat ekvationssystem (1,3) med $k_z = \frac{\eta EI}{L^4} = \left\{ \eta = \frac{35}{6} \right\} = \frac{35EI}{6L^4}$

$$\frac{35EI}{6L^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_3 \end{bmatrix} = a \rho A L \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} d_1 \\ d_3 \end{bmatrix} = \frac{6a\rho A L^4}{35EI} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

I punkten $x = 0$ gäller att $\Delta = w(x = 0) = \sum_{i=0}^4 N_i(\xi = 0) d_i = \frac{6a\rho A L^4}{35EI} \Rightarrow a = \frac{35EI\Delta}{6\rho A L^4}$

4. Koordinaterna i det isoparametriska elementet ges av interpolationen (koord.-transformationen):

$$\left. \begin{aligned} x(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 N_i x_i = 2a(N_1 + N_2) = a(1 - \xi) \\ y(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 N_i y_i = 2b(N_1 + N_4) = b(1 - \eta) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ -a & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |\mathbf{J}| = -ab$$

Den felaktiga nodnumreringen leder till en "negativ" elementstyvhetmatris. T.ex. för en fjäder innebär det att en positiv normalkraft i fjädern leder till en negativ fjäderförlängning.

5(a).

Bidraget från volymskraften fås enligt: $\mathbf{F}_b = \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{K} dV$

Här är $K_y = \rho \omega^2 y$, dvs enbart komponenterna i y-riktningen är skilda från noll!

$$\begin{aligned} F_{b1y} &= \int_0^L \left(\int_0^{(L-x)} \left(1 - \frac{x}{L} - \frac{y}{L} \right) \rho \omega^2 y h dy \right) dx = \frac{\rho \omega^2 h}{6L} \int_0^L (L-x)^3 dx = \frac{\rho \omega^2 h L^3}{24} \\ F_{b2y} &= \int_0^L \left(\int_0^{(L-x)} \frac{x}{L} \rho \omega^2 y h dy \right) dx = \frac{\rho \omega^2 h}{2L} \int_0^L x(L-x)^2 dx = \frac{\rho \omega^2 h L^3}{24} \\ F_{b3y} &= \int_0^L \left(\int_0^{(L-x)} \frac{y}{L} \rho \omega^2 y h dy \right) dx = \frac{\rho \omega^2 h}{3L} \int_0^L (L-x)^3 dx = \frac{\rho \omega^2 h L^3}{12} \end{aligned}$$

Med föreskrivna förskjutningar i frihetsgraderna $d_{1x}, d_{1y}, d_{2y}, d_{3x}$ erhålls reaktionskrafter, dvs

$$\mathbf{F}_R = \begin{bmatrix} F_{R1x} & F_{R1y} & 0 & F_{R2y} & F_{R3x} & 0 \end{bmatrix}$$

Totala nodlastvektorn blir: $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} h L^3 \rho \omega^2 / 24 + \mathbf{F}_R$

5(b).

Reducerat ekvationssystem med

hänsyn tagen till randvillkoren

Ek.(3, 6):

$$\frac{Eh}{91} \begin{bmatrix} 50 & 15 \\ 15 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{2x} \\ d_{3y} \end{bmatrix} = \frac{\rho \omega^2 h L^3}{24} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} d_{2x} \\ d_{3y} \end{bmatrix} = \frac{\rho \omega^2 L^3}{60E} \begin{bmatrix} -3 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Reaktionskrafter: Ek. (1): $R_{1x} = \frac{Eh}{182} (-100d_{2x} - 30d_{3y}) = 0$

Ek. (2): $R_{1y} = \frac{Eh}{182} (-30d_{2x} - 100d_{3y}) - F_{b1y} = -\frac{\rho \omega^2 h L^3}{8}$

Ek. (4): $R_{1y} = -F_{b2y} = -\frac{\rho \omega^2 h L^3}{24}$, Ek. (5): $R_{1x} = 0$

5(c). Spänningarna i elementet ges av $\sigma = \mathbf{C}\varepsilon$ där $\varepsilon = \mathbf{B}\mathbf{d}_e = \mathbf{B}_1\mathbf{d}_1 + \mathbf{B}_2\mathbf{d}_2 + \mathbf{B}_3\mathbf{d}_3$

$$\text{här gäller att } \mathbf{d}_1 = \mathbf{0}; \mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} d_{2x} \\ d_{2y} \end{bmatrix} = \frac{\rho\omega^2 L^3}{60E} \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{d}_3 = \begin{bmatrix} d_{3x} \\ d_{3y} \end{bmatrix} = \frac{\rho\omega^2 L^3}{60E} \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial y \\ \partial N_i / \partial y & \partial N_i / \partial x \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}_2 = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_3 = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \left\{ \nu = \frac{1}{3} \right\} = \frac{E}{91} \begin{bmatrix} 100 & 30 & 0 \\ 30 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 35 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{91} \begin{bmatrix} 100 & 30 & 0 \\ 30 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 35 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} \right) \frac{\rho\omega^2 L^3}{60E} = \frac{\rho\omega^2 L^2}{6} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$