

Tentamen i FEM för ingenjörstillämpningar (SE1025) den 15 mars 2012 kl. 8-13.

Resultat kommer att finnas tillgängligt senast den 3 april. Klagomål på rättningen skall vara framförda senast en månad därefter.

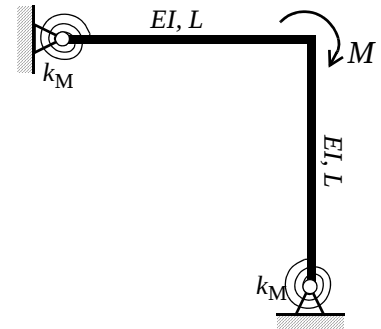
OBS! Tentand är skyldig att visa legitimation. Skriv endast på en sida av bladet. Skriv tydligt namn och personnummer på varje blad. Lösningar som är otydliga och svåra att följa kommer inte att bedömas.

Hjälpmedel: Formelsamling i Hållfasthetslära, TEFYMA, BETA eller liknande och räknedosa.

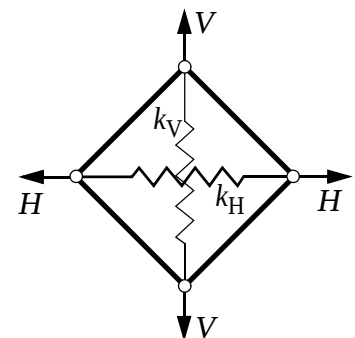
Examinator: Jonas Faleskog, tel. 790 8977.

Betygsgränser: F(underkänd) $p \leq 10$; FX(möjlighet till kompletteringstentamen) $p \geq 11$; E $p \geq 13$; D $p \geq 15$; C $p \geq 17$; B $p \geq 20$; A $p \geq 23$, där ($p = \text{tentamen} + \text{bonus}$).

- 1.** [3 poäng] En struktur bestående av två likadana balkar är sammanfogade i ett böjstyvt hörn, se figuren till höger. Vid hörnet angriper ett yttre moment M . Strukturens ändar är kopplade till omgivningen via momentfjädrar, båda med fjäderkonstanten $k_M = \alpha EI/L$, där $0 \leq \alpha \leq \infty$ är en dimensionslös konstant. Respektive balkdel har längden L och böjstyvheten EI . Bestäm hörnets rotation mha av energimetod baserad på komplementär elastisk energi (ev. bidrag till elastisk energi från normal- respektive tvärkrafter kan försummas). *Ledning: utnyttjande av problemets antisymmetri förenklar analysen, samt notera att hörnet enbart kommer att rotera ej förskjutas.*



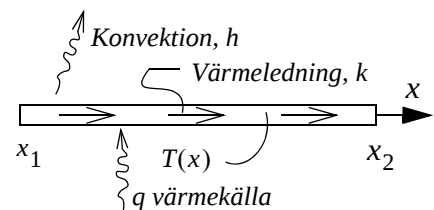
- 2.** [5 poäng] Ett fackverk av kvadratisk form består av fyra likadana stänger och två olika fjädrar enligt figuren till höger. Stängerna har alla längden L och dragstyvheten EA . Fjäderkonstanterna är $k_H = 4k_V = 2EA/L$. Bestäm Fackverkets förlängning i horisontell och vertikal led då fackverket belastas av krafterna H och V . *Ledning: om symmetri utnyttjas kan problemet reduceras till enbart tre element.*



- 3.** Differential-ekvationen för värmeledning (1D) kan skrivas som

$$\frac{d}{dx} \left(kA \frac{dT}{dx} \right) + qA - hP(T - T_\infty) = 0,$$

där T är temperaturen, k [W/m°C] materialets värmekonduktivitet, h [W/m²°C] värmeövergångstalet till omgivande medium, A tvärsnittsarea, P tvärsnittets omkrets, q [W/m³] en kontinuerligt distribuerad värmekälla och T_∞ är omgivande mediums temperatur.



- (a) [1 poäng] Visa att den svaga formen till differentialekvationen är

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dv}{dx} kA \frac{dT}{dx} dx + \int_{x_1}^{x_2} v h P T dx = [v(-Q)]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} v(qA + hPT_\infty) dx,$$

där v är en godtycklig funktion av x och $Q = -kAdT/dx$ (Fouriers lag).

- (b) [2 poäng] Härled FEM-ekvationen (anv. Galerkins metod) mha den svaga formen ovan för ett

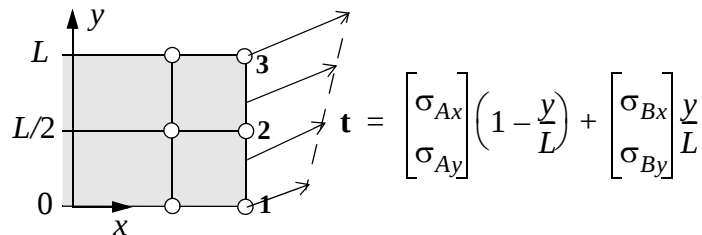
element, dvs identifiera storheterna i ekvationen $\mathbf{k}_e \mathbf{T}_e = \mathbf{f}_e$.

- (c) [4 poäng] I en tillämpning utsätts en maskindetalj som kan betraktas som en endimensionell struktur av längd $3L$ ($0 \leq x \leq 3L$) för en kontinuerligt utbredd värmekälla, $q = Q_0/(AL)$, över sträckan $L \leq x \leq 2L$ ($q = 0$ för $x < L$ och $x > 2L$). Maskindetaljen är isolerad från omgivningen i intervallet $0 < x < L$ (ingen konvektion över begränsningsytan, $h = 0$), medans värme kan överföras via konvektion över dess begränsningsyta i intervallet $2L < x < 3L$, där $hPL = 3kA/L$. Temperaturen hålls konstant och lika med T_0 i maskindetaljens ändar, dvs vid $x = 0$ och $x = 3L$. Storheterna A och k är konstanta och kan tillsammans med L anses kända. Genomför en FEM-analys av värmeledningsproblemet (stationärt tillstånd) mha tre lika långa element med en linjär T -fördelning i varje element. Bestäm nodtemperaturerna och hur stor del av det tillförda värmets som bortförs via maskindetaljen i intervallet $x \leq L$ respektive $x \geq 2L$, för specialfallet att $T_\infty = 0$ och $Q_0 = 12T_0Ak/L$. Notera, att då tillståndet är stationärt måste allt tillfört värme ledas bort.

4. [4 poäng] En plan plåts rand belastas med en spänningsvektor, $\mathbf{t}$, enligt figuren nedan. Randen har längden L och plåten tjockleken h . Plåten modelleras mha plana bi-linjära element i en FEM-analys där den aktuella randens nodnumrering framgår av figuren. Spänningsvektorn ger upphov till följande lastvektor

$$\mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} F_{1x} & F_{1y} & F_{2x} & F_{2y} & F_{3x} & F_{3y} & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_0 h L}{24} & 0 & \frac{\sigma_0 h L}{4} & 0 & \frac{5\sigma_0 h L}{24} & 0 & \dots \end{bmatrix},$$

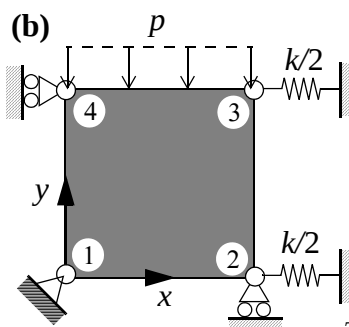
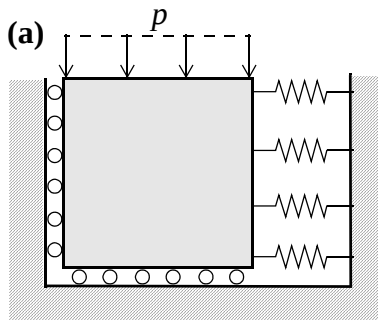
där σ_0 är en känd referensspänning. Bestäm storheterna σ_{Ax} , σ_{Ay} , σ_{Bx} och σ_{By} mha av den givna lastvektorn.



5. Ovansidan av en kvadratisk plåt ($2L \times 2L$, tjocklek h) belastas av ett konstant yttryck p . Plåtens vänstra och undre kant, respektive, hålls på plats av friktionsfria stela underlag. Utmed den högra kanten finns ett fjädrande stöd med den totala fjäderkonstanten $k = Eh$, se figur (a) nedan. Plåten är fri och obelastad ut ur planet. En FEM-analys skall genomföras mha ett enda bi-linjärt 4-nods element enligt figur (b) nedan. Materialet är linjärt elastiskt med elasticitetsmodulen E och Poissons tal $\nu = 1/3$. Styvhetsmatrisen för 4-nods elementet är given i figur (c) i relation till den givna elementförskjutningsvektorn $\mathbf{d}_e$.

(a) [3 poäng] Beräkna nodförskjutningarna. Notera att $d_{2x} = d_{3x}$ och $d_{3y} = d_{4y}$ pga symmetri.

(b) [3 poäng] Beräkna spänningarna i elementet. Är lösningen exakt?



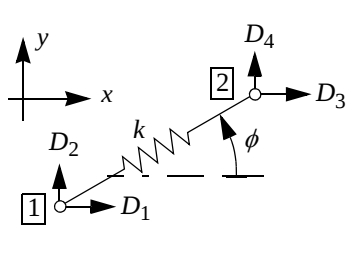
(c)

$$\mathbf{k}_e = \frac{Eh}{16} \begin{bmatrix} 8 & 3 & -5 & 0 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 1 & -3 & -4 & 0 & -5 \\ -5 & 0 & 8 & -3 & 1 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 8 & 0 & -5 & 3 & -4 \\ -4 & -3 & 1 & 0 & 8 & 3 & -5 & 0 \\ -3 & -4 & 0 & -5 & 3 & 8 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 3 & -5 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 & 0 & 1 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}_e^T = \begin{bmatrix} d_{1x} & d_{1y} & d_{2x} & d_{2y} & d_{3x} & d_{3y} & d_{4x} & d_{4y} \end{bmatrix}$$

FORMELBLAD (komplement till Formelsamling i Hållfasthetslära)

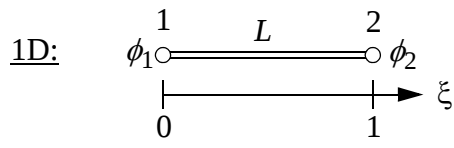
GLOBAL BESKRIVNING FÖR ENDIMENSIONELLA ELEMENT



$$\mathbf{K}_e = k \begin{bmatrix} \mathbf{a} & -\mathbf{a} \\ -\mathbf{a} & \mathbf{a} \end{bmatrix} \quad \text{där} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} c^2 & sc \\ sc & s^2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} c = \cos \phi \\ s = \sin \phi \end{matrix}$$

$$\text{alternativt} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} l_{12}^2 & l_{12}m_{12} \\ l_{12}m_{12} & m_{12}^2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} l_{12} = \cos \phi_x = (x_2 - x_1)/L \\ m_{12} = \cos \phi_y = (y_2 - y_1)/L \\ L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{matrix}$$

OLIKA FINITA ELEMENT

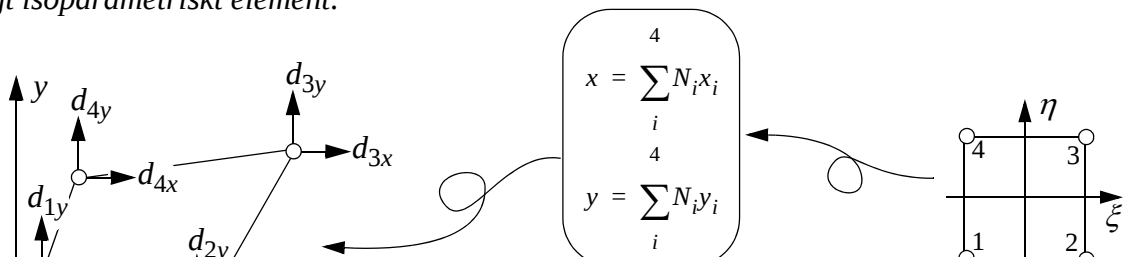
1D: 

$$\phi(\xi) = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} N_1 = 1 - \xi \\ N_2 = \xi \end{matrix} \quad \mathbf{B} = \frac{d\mathbf{N}}{dx} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Användbara integraler: $\int_0^1 \mathbf{B}^T \mathbf{B} L d\xi = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \int_0^1 \mathbf{N}^T \mathbf{N} L d\xi = \frac{L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \int_0^1 \mathbf{N}^T L d\xi = \frac{L}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Plant element (2D):

4-sidigt isoparametriskt element:



$$\begin{matrix} 4 \\ x = \sum_i N_i x_i \\ i \\ 4 \\ y = \sum_i N_i y_i \\ i \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} N_1 = (1 - \xi)(1 - \eta)/4, & N_2 = (1 + \xi)(1 - \eta)/4 \\ N_3 = (1 + \xi)(1 + \eta)/4, & N_4 = (1 - \xi)(1 + \eta)/4 \end{matrix}$$

Förskjutningar: $\begin{bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \mathbf{d}_e = \mathbf{N} \mathbf{d}_e$

Töjningar: $\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{d}_e \quad \mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_4] \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial y \\ \partial N_i / \partial y & \partial N_i / \partial x \end{bmatrix}$

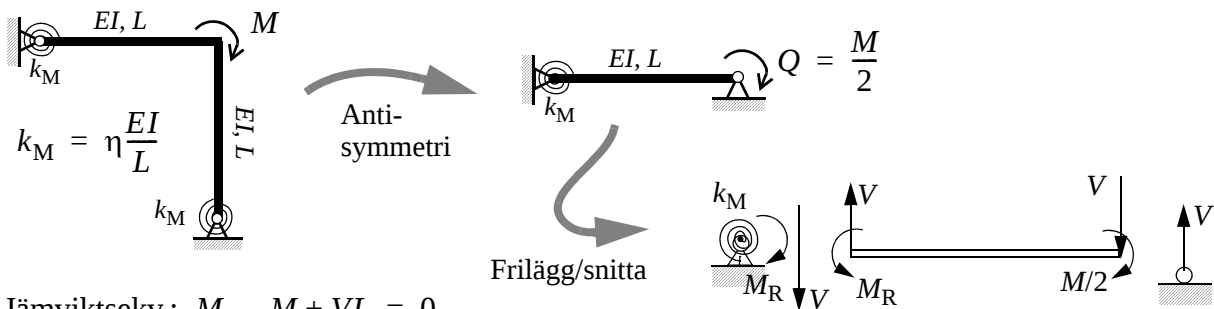
där $\begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x \\ \partial N_i / \partial y \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial \xi \\ \partial N_i / \partial \eta \end{bmatrix} \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial y / \partial \xi \\ \partial x / \partial \eta & \partial y / \partial \eta \end{bmatrix}$

Spänningar:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad \mathbf{C} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix} \text{ (P.S)} \quad \mathbf{C} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix} \text{ (P.D)}$$

FEM Ekv. (ett element): $\left[\int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \right] \mathbf{d}_e = \left[\int_{S_e} \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS + \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{K} dV \right] \quad \begin{matrix} \mathbf{t} = \text{spänningsvektor} \\ \mathbf{K} = \text{volymkraft} \end{matrix}$

LÖSNINGSFÖRSLAG: FEM FÖR INGENJÖRSTILLÄMPNINGAR, 15 MARS, 2012

1.

Jämviktsekv.: $M_R - M + VL = 0$

1 jämviktsekv. och 2 obekanta (M_R, V) $\Rightarrow$ Statiskt obestämt!

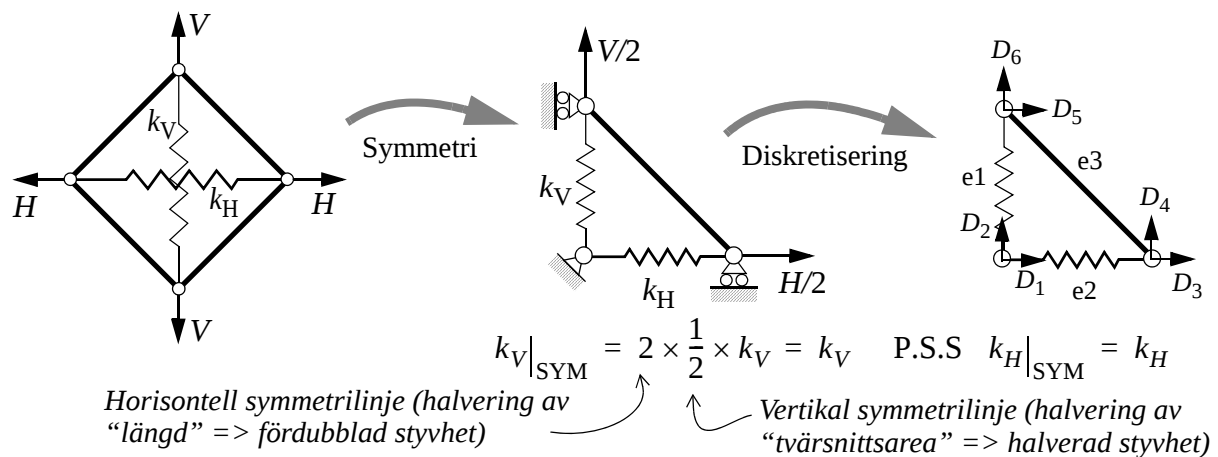
Kompl. elast. energi: $\bar{W} = \frac{L}{6EI}(M_R^2 + M_R Q + Q^2) + \frac{M_R^2}{2k_M} = \frac{L}{6EI}(Q^2 + M_R Q + M_R^2(1 + \frac{3}{\eta}))$

Minsta arb. princip: $\frac{\partial \bar{W}}{\partial M_R} = 0 \Rightarrow M_R = -\frac{Q\eta}{2(3 + \eta)}$

Hörnets vinkeländring: $\theta = \frac{\partial \bar{W}}{\partial Q} = \frac{L}{6EI}(M_R + 2Q) = \frac{QL(4 + \eta)}{4EI(3 + \eta)} = \left\{ Q = \frac{M}{2} \right\} = \frac{QL(4 + \eta)}{8EI(3 + \eta)}$

Specialfall: Momentfria ändar ($\eta = 0$): $\theta = \frac{ML}{6EI}$ Fast inspända ändar ($\eta \rightarrow \infty$): $\theta = \frac{ML}{8EI}$

Alternativt kan problemet lösas med $Q = M$ och med styvheter multiplicerade med faktorn 2!

2.

Randvillkor: $D_1 = D_2 = D_4 = D_5 = 0$; $F_3 = H/2$, $F_6 = V/2$

Elementstyvhetsmatriser: $\mathbf{K}_e = k_i \begin{bmatrix} \mathbf{a} & -\mathbf{a} \\ -\mathbf{a} & \mathbf{a} \end{bmatrix}$, $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} c^2 & sc \\ sc & s^2 \end{bmatrix}$, $c = \cos \phi$, $s = \sin \phi$

e1: $k_1 = \frac{EA}{2L}$, $\mathbf{a}_1 = \{\phi = 90^\circ\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e2: $k_2 = \frac{2EA}{L}$, $\mathbf{a}_2 = \{\phi = 0^\circ\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

e3: $k_3 = \frac{EA}{L}$, $\mathbf{a}_3 = \{\phi = -45^\circ\} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

2. forts.Styvhetismatris
för systemet:

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_2 & -4\mathbf{a}_2 & -\mathbf{a}_1 \\ -4\mathbf{a}_2 & 4\mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3 & -2\mathbf{a}_3 \\ -\mathbf{a}_1 & -2\mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_3 \end{bmatrix}$$

Reducerat Ekv.-
system (3) & (6): $\frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_3 \\ D_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H/2 \\ V/2 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} D_3 \\ D_6 \end{bmatrix} = \frac{L}{9EA} \begin{bmatrix} 2H - V \\ 5V - H \end{bmatrix}$$

Horisontell förlängning: $2D_3 = \frac{2L(2H - V)}{9EA}$ Vertikal förlängning: $2D_6 = \frac{2L(5V - H)}{9EA}$

3.

(a) Mult. O.D.E. med viktfkn. & integrera: $\int_{x_1}^{x_2} v \left[\frac{d}{dx} \left(kA \frac{dT}{dx} \right) + qA - hP(T - T_\infty) \right] dx = 0 \quad (1)$

Partialintegration ger: $\int_{x_1}^{x_2} v \left[\frac{d}{dx} \left(kA \frac{dT}{dx} \right) \right] dx = \left[v \left(kA \frac{dT}{dx} \right) \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{dv}{dx} \left(kA \frac{dT}{dx} \right) dx \quad (2)$

Ekv. (2) insatt i Ekv. (1) med $-Q = kA \frac{dT}{dx}$ ger svag form enligt:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dv}{dx} kA \frac{dT}{dx} dx + \int_{x_1}^{x_2} v h P T dx = [v(-Q)]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} v q A dx + \int_{x_1}^{x_2} v h p T_\infty dx$$

(b) Temperaturansats: $T = \mathbf{N} \mathbf{T}_e \quad \frac{dT}{dx} = \frac{d\mathbf{N}}{dx} \mathbf{T}_e = \mathbf{B} \mathbf{T}_e$

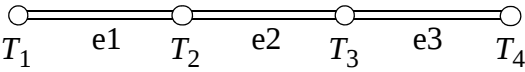
Viktfunktion: $v = \mathbf{N} \mathbf{b}_e = \mathbf{b}_e^T \mathbf{N}^T \quad \frac{dv}{dx} = \mathbf{b}_e^T \frac{d\mathbf{N}^T}{dx} = \mathbf{b}_e^T \mathbf{B}^T$

Insatt i svag form, med $x_1 = 0$ och $x_2 = l_e$ (elementlängd) ger FEM-ekv. för ett element enl.

$$\mathbf{b}_e^T \left[\underbrace{\int_0^{l_e} \mathbf{B}^T k A \mathbf{B} dx + \int_0^{l_e} \mathbf{N}^T h P \mathbf{N} dx}_0 \right] \mathbf{T}_e = \mathbf{b}_e^T \left[\underbrace{[\mathbf{N}^T(-Q)]_0^{l_e}}_0 + \underbrace{\int_0^{l_e} \mathbf{N}^T q A dx + \int_0^{l_e} \mathbf{N}^T h p T_\infty dx}_0 \right]$$

$\mathbf{k}_e \qquad \mathbf{f}_e$

Då $\mathbf{b}_e^T$ är godtycklig erhålls FEM-Ekv. som $\mathbf{k}_e \mathbf{T}_e = \mathbf{f}_e$

(c) FEM - modell:  $\text{R.V.: } T_1 = T_4 = T_0 \Rightarrow Q_{R1}, Q_{R4} \text{ "Reaktionsflöden"}$

Linjära element: $\mathbf{N} = [1 - \xi \quad \xi] \Rightarrow \mathbf{B} = \frac{1}{l_e} [-1 \quad 1] \quad \text{där } l_1 = l_2 = l_3 = L$

Elementmatriser: $\mathbf{k}_v = \int_0^L \mathbf{B}^T k A \mathbf{B} dx = \frac{kA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_k = \int_0^L \mathbf{N}^T h P \mathbf{N} dx = \frac{hPL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ (enbart el. 3)}$

$$\Rightarrow \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_v, \quad \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_v + \mathbf{k}_k = \left\{ hPL = \frac{3kA}{L} \right\} = \frac{kA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1/2 \\ -1/2 & 2 \end{bmatrix}$$

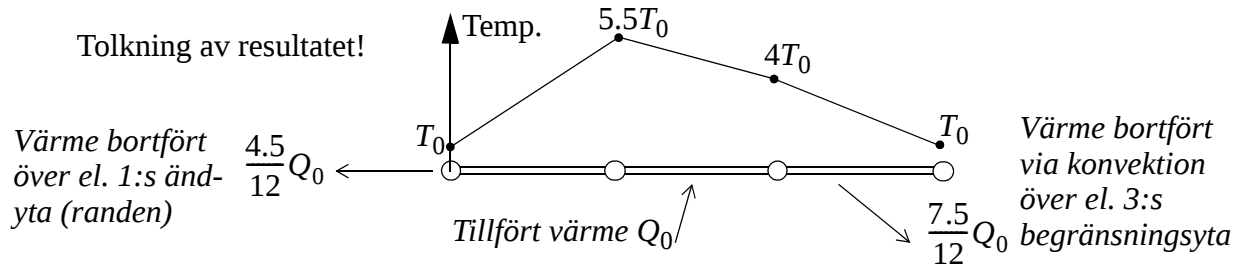
$$\int_0^L \mathbf{N}^T q A dx = \left\{ q = 12 \frac{kT_0}{L^2} \right\} = \frac{AkT_0}{L} \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} \text{ (enbart el. 2)} \quad \int_0^L \mathbf{N}^T h p T_\infty dx = \{ T_\infty = 0 \} = 0$$

3(c) forts.

Ekv. system:
$$\frac{Ak}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{R1} \\ 0 \\ 0 \\ Q_{R4} \end{bmatrix} + \frac{AkT_0}{L} \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$
 Ekv. (2) & (3) ger:

$$\begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.5 \\ 4 \end{bmatrix} T_0$$

Ekv. (1) & (4) ger: $Q_{R1} = -\frac{45AkT_0}{10L} = -\frac{4.5}{12}Q_0$ (Dvs. riktat ut ifrån ändytan), $Q_{R4} = 0$

**4.**

Då $F_{iy} = 0 \Rightarrow \sigma_{Ay} = \sigma_{By} = 0$

Allmänt, en spänningsvektor linjärt fördelad längs en elementkant med normal i x-riktningen:

tjocklek h

$$t_x = t_A N_2(\xi = 1, \eta) + t_B N_3(\xi = 1, \eta) = t_A \frac{(1-\eta)}{2} + t_B \frac{(1+\eta)}{2}$$

$$f_{3x} = \int_{-1}^1 N_3(\xi = 1, \eta) t_x \frac{L}{4} h d\eta = \frac{t_A + 2t_B}{3} \frac{hL}{4}$$

$$f_{2x} = \int_{-1}^1 N_2(\xi = 1, \eta) t_x \frac{L}{4} h d\eta = \frac{2t_A + t_B}{3} \frac{hL}{4}$$

OBS! $f_{2x} + f_{3x} = \frac{t_A + t_B}{2} \frac{hL}{2}$

Aktuellt problem:

$$\left. \begin{array}{l} \begin{array}{l} \text{Top element: } t_B = \sigma_{Bx}, t_A = (\sigma_{Ax} + \sigma_{Bx})/2 \\ \text{Bottom element: } t_B = (\sigma_{Ax} + \sigma_{Bx})/2, t_A = \sigma_{Ax} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} F_{3x} = \frac{hL}{12} \left(\frac{\sigma_{Ax}}{2} + \frac{5\sigma_{Bx}}{2} \right) \\ F_{2x} = \frac{hL}{12} (2\sigma_{Ax} + \sigma_{Bx}) + \frac{hL}{12} (\sigma_{Ax} + 2\sigma_{Bx}) \\ F_{1x} = \frac{hL}{12} \left(\frac{5\sigma_{Ax}}{2} + \frac{\sigma_{Bx}}{2} \right) \end{array}$$

Med givna nodkrafter fås:

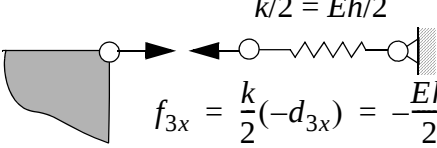
$$\left. \begin{array}{l} F_{1x} = \frac{hL}{12} \left(\frac{5\sigma_{Ax}}{2} + \frac{\sigma_{Bx}}{2} \right) = \frac{\sigma_0 hL}{24} \\ F_{3x} = \frac{hL}{12} \left(\frac{\sigma_{Ax}}{2} + \frac{5\sigma_{Bx}}{2} \right) = \frac{5\sigma_0 hL}{24} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \sigma_{Ax} = 0 \\ \sigma_{Bx} = \sigma_0 \end{array}$$

OBS! Uppfyller även Ekv. för F_{2x}

5.

(a) Den yttre lasten, dvs yttrycket ger upphov till nodkrafterna $f_{3y} = f_{4y} = -pLh$

För nodkrafterna f_{2x} och f_{3x} gäller:



$$f_{3x} = \frac{k}{2}(-d_{3x}) = -\frac{Eh}{2}d_{3x}$$

På samma sätt: $f_{2x} = \frac{k}{2}(-d_{2x}) = -\frac{Eh}{2}d_{2x}$

Reducerat ekvations-system (3,5,6,8):

$$\frac{Eh}{16} \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 8 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{2x} \\ d_{3x} \\ d_{3y} \\ d_{4y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Ehd_{2x}/2 \\ -Ehd_{3x}/2 \\ -pLh \\ -pLh \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{Eh}{16} \begin{bmatrix} 16 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 16 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{2x} \\ d_{3x} \\ d_{3y} \\ d_{4y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -pLh \\ -pLh \end{bmatrix}$$

Utnyttja symmetrin och låt $d_{2x} = d_{3x} = u$ och $d_{3y} = d_{4y} = v$, vilket ger det förenklade systemet

$$\frac{Eh}{16} \begin{bmatrix} 17 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -pLh \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{pL}{9E} \begin{bmatrix} 3 \\ -17 \end{bmatrix}$$

(b) Spänningar beräknas för det aktuella problemet enligt:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{d}_e = \mathbf{C} \left(\mathbf{B}_2 \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{B}_3 \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \mathbf{B}_4 \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} \right)$$

Där $\mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} N_{I,x} & 0 \\ 0 & N_{I,y} \\ N_{I,y} & N_{I,x} \end{bmatrix}$, här gäller att $N_{I,x} = \frac{N_{I,\xi}}{L}$, $N_{I,y} = \frac{N_{I,\eta}}{L}$

För plan spänning med $v = \frac{1}{3}$ fås att $\mathbf{C} = \frac{E}{8} \begin{bmatrix} 9 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \begin{bmatrix} (N_{2,x} + N_{3,x})u \\ (N_{3,y} + N_{4,y})v \\ (N_{2,y} + N_{3,y})u + (N_{3,x} + N_{4,x})v \end{bmatrix} = \frac{E}{8} \begin{bmatrix} 9 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u/(2L) \\ v/(2L) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p/6 \\ -p \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kommentar: last och geometri leder till homogen spänningen i plåten, alltså är FEM lösningen exakt!