

Tentamen i FEM för ingenjörstillämpningar (SE1025) den 8 juni 2012 kl. 8-13.

Resultat kommer att finnas tillgängligt senast den 29 juni. Klagomål på rättningen skall vara framförda senast en månad därefter.

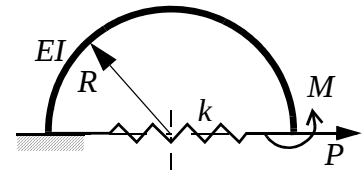
OBS! Tentand är skyldig att visa legitimation. Skriv endast på en sida av bladet. Skriv tydligt namn och personnummer på varje blad. Lösningar som är otydliga och svåra att följa kommer inte att bedömas.

Hjälpmedel: Formelsamling i Hållfasthetslära, TEFYMA, BETA eller liknande och räknedosa.

Examinator: Jonas Faleskog, tel. 790 8977.

Betygsgränser: F(underkänd) $p \leq 10$; FX(möjlighet till kompletteringstentamen) $p \geq 11$; E $p \geq 13$; D $p \geq 15$; C $p \geq 17$; B $p \geq 20$; A $p \geq 23$, där ($p = \text{tentamen} + \text{bonus}$).

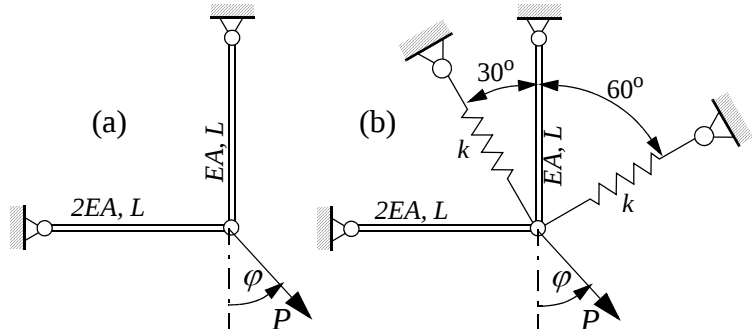
- 1.** [3 poäng] En enkelkrökt balk i form av en halvcirkel med radien R är förstärkt med en fjäder, k . Strukturens vänstra ände sitter fast i ett stelt fundament och dess högra ände belastas med en punktkraft, P , och ett punktmoment, M , enligt figuren till höger. Balkens böjstyvhet är EI och fjädern har styvheten $k = \eta EI/R^3$, där $\eta \geq 0$ är en dimensionslös konstant. Systemets komplementära elastiska energi ges av



$$\bar{W} = \frac{R(\pi R^2 P^2 + 8RPM + (2 - \eta(8 - \pi))M^2)}{2EI(2 + \pi\eta)}.$$

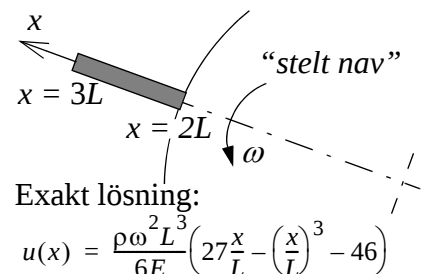
Bestäm normalkraften som uppstår i fjädern när strukturen belastas av P och M .

- 2.** [5 poäng] Ett fackverk bestående av två stänger enligt figur (a) till höger har visat sig vara för vekt i en tillämpning. Det förstärkts därför med två fjädrar, båda med fjäderkonstanten k , se figur (b) till höger. Bestäm k , så att den vertikala förskjutningen till följd av kraften P minskar med en faktor 4. Stängernas dragstyvhet och längder framgår av figuren.



- 3.** Figuren till höger visar en endimensionell modell av ett turbinblad som har tvärsnittsarean A , längden L , elasticitetsmodulen E och densiteten ρ . Turbinbladet roterar med en konstant vinkelhastighet ω . Förskjutningen i axiell led, u , ges av lösningen till differentialekvationen (stark form)

$$\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) + A\rho\omega^2 x = 0,$$



där E , A och ρ kan variera med positionen x .

- (a) [1 poäng] Visa att den svaga formen är

$$\int_{2L}^{3L} \frac{dv}{dx} EA \frac{du}{dx} dx = [v(\sigma A)]_{2L}^{3L} + \int_{2L}^{3L} v A \rho \omega^2 x dx,$$

där $v = v(x)$ är en godtycklig viktfunction och sambandet $\sigma = Eu'$ har utnyttjats.

(b) [2 poäng] Härled FEM-ekvationen (anv. Galerkins metod) mha den svaga formen ovan för ett element, dvs identifiera storheterna i ekvationen $\mathbf{k}_e \mathbf{d}_e = \mathbf{f}_e$.

(c) [4 poäng] Dela in turbinbladet i två linjära 2-noders stångelement av samma längd. Antag att storheterna E , A och ρ är givna konstanter och att turbinbladets axiella förskjutning vid $x = 2L$ är noll. Genomför en FEM-analys och beräkna turbinbladets totala förlängning. Jämför lösningen med den exakta lösningen given i figuren ovan till höger.

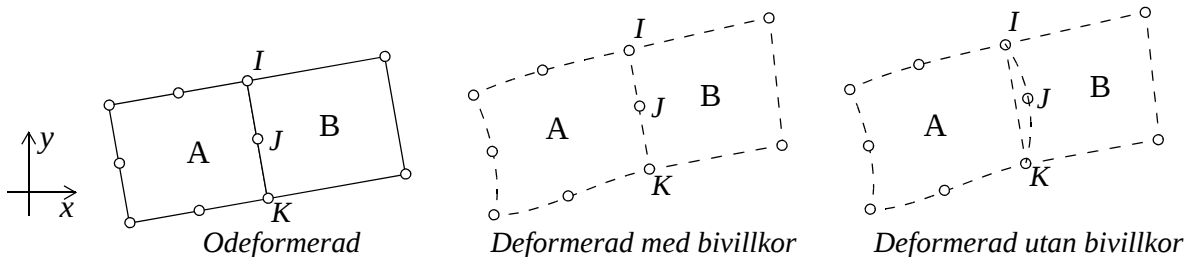
Ledning: positionen i ett element kan beskrivas enligt $x = x_1(1 - \xi) + x_2\xi$, ($0 \leq \xi \leq 1$), där x_1 och x_2 motsvarar elementets nodkoordinater. Användbara integraler är:

$$\int_0^1 (1 - \xi)^2 d\xi = \int_0^1 \xi^2 d\xi = 2 \int_0^1 (1 - \xi)\xi d\xi = \frac{1}{3}.$$

4. [4 poäng] Figuren nedan visar en modelleringssituation i 2D som uppstår vid övergång från ett "bikvadratisk" 8-noders isoparametriskt element (A) till ett "bilinjärt" 4-noders isoparametriskt element (B). För att säkerställa att nätet är kompatibelt vid deformation måste bivillkor formuleras för frihetsgraderna i noden J med hjälp frihetsgraderna för noderna I och K , annars kan överlappning/glapp uppstå mellan elementen som i exemplet längst till höger nedan. En typisk form för sådana bivillkor är

$$A_1^i u_i^J + A_2^i u_i^I + A_3^i u_i^K = 0 \quad i = x, y,$$

där A_1^i , A_2^i och A_3^i är koefficienter som matas in i FEM-programmet och i anger frihetsgrad i x -led eller y -led. Låt $A_1^x = A_1^y = 1$ och bestäm A_2^x , A_3^x , A_2^y och A_3^y så att nätet uppfyller kompatibilitet vid deformation. Noden J ligger i odeformerat läge mittemellan noderna I och K .



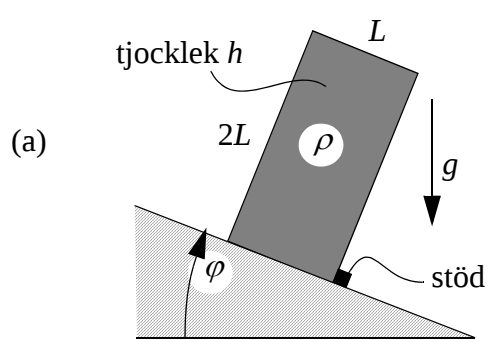
5. En rektangulär skiva ($L \times 2L$, tjocklek h) står mot ett stöd på ett lutande underlag, se figur (a) nedan. Skivan belastas av sin egentyngd. Materialet har densiteten ρ och är isotropt, linjärt elastiskt med elasticitetsmodulen E och Poissons tal ν . Plan spänning antas råda i skivan och att $\nu = 0$. Figur (b) nedan visar en förenklad FEM-modell av skivan bestående av ett 4-sidigt bilinjärt isoparametriskt element. OBS! notera att förskjutningsrandvillkoren förutsätter att underlaget är friktionsfritt och att vinkeln inte är större än att skivan är i kontakt med underlaget. Egentyngden kan modelleras som en volymkraft $(K_x, K_y) = \rho g(\sin \varphi, -\cos \varphi)$, där tyngdaccelerationen g kan anses känd. Elementets styvhetsmatris och resulterande förskjutningsvektor är givna i figur (c) nedan.

(a) [2 poäng] Visa att egentyngdens bidrag till lastvektorkomponenterna i nod 1 är:

$$f_{b1x} = \frac{1}{2}hL^2\rho g\sin\varphi \text{ respektive } f_{b1y} = -\frac{1}{2}hL^2\rho g\cos\varphi.$$

(b) [2 poäng] Beräkna reaktionskrafterna i nod 1. För vilken vinkel φ kan skivan förväntas välla?

(c) [2 poäng] Beräkna förskjutningsvektorn $\mathbf{u}$ i punkten $\{x = L, y = 3L/2\}$.



(c)

$$\mathbf{K}_e = \frac{Eh}{8} \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 & -1 & -3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & -2 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & 6 & -1 & 2 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 2 & 1 & 6 & 1 & -5 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 & 1 & -5 & 1 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

(b)

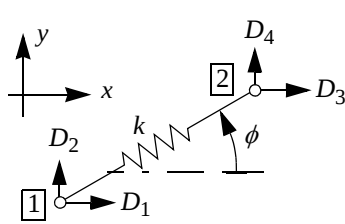
Elementets Jacobimatrix:

$$\mathbf{J} = L \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}_e = \begin{bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \\ d_{3x} \\ d_{3y} \\ d_{4x} \\ d_{4y} \end{bmatrix} = \frac{\rho g L^2}{6E} \left(\begin{bmatrix} 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 80 \\ -24 \\ 75 \\ 24 \end{bmatrix} \sin \varphi - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 12 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix} \cos \varphi \right)$$

FORMELBLAD (komplement till Formelsamling i Hållfasthetslära)

GLOBAL BESKRIVNING FÖR ENDIMENSIONELLA ELEMENT



$$\mathbf{K}_e = k \begin{bmatrix} \mathbf{a} & -\mathbf{a} \\ -\mathbf{a} & \mathbf{a} \end{bmatrix} \quad \text{där} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} c^2 & sc \\ sc & s^2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} c = \cos \phi \\ s = \sin \phi \end{matrix}$$

$$\text{alternativt} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} l_{12}^2 & l_{12}m_{12} \\ l_{12}m_{12} & m_{12}^2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} l_{12} = \cos \phi_x = (x_2 - x_1)/L \\ m_{12} = \cos \phi_y = (y_2 - y_1)/L \\ L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{matrix}$$

OLIKA FINITA ELEMENT

1D:

$$\phi(\xi) = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} N_1 = 1 - \xi \\ N_2 = \xi \end{matrix} \quad \mathbf{B} = \frac{d\mathbf{N}}{d\xi} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Användbara integraler: $\int_0^1 \mathbf{B}^T \mathbf{B} L d\xi = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \int_0^1 \mathbf{N}^T \mathbf{N} L d\xi = \frac{L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \int_0^1 \mathbf{N}^T L d\xi = \frac{L}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Plant element (2D):

4-sidigt isoparametriskt element:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^4 N_i x_i \\ y &= \sum_{i=1}^4 N_i y_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_1 &= (1 - \xi)(1 - \eta)/4, & N_2 &= (1 + \xi)(1 - \eta)/4 \\ N_3 &= (1 + \xi)(1 + \eta)/4, & N_4 &= (1 - \xi)(1 + \eta)/4 \end{aligned}$$

Förskjutningar: $\begin{bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \mathbf{d}_e = \mathbf{N} \mathbf{d}_e$

Töjningar: $\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{d}_e \quad \mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_4] \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial y \\ \partial N_i / \partial y & \partial N_i / \partial x \end{bmatrix}$

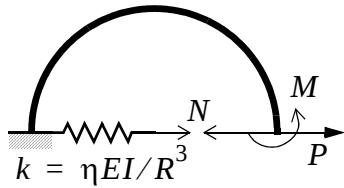
där $\begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x \\ \partial N_i / \partial y \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial \xi \\ \partial N_i / \partial \eta \end{bmatrix} \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial y / \partial \xi \\ \partial x / \partial \eta & \partial y / \partial \eta \end{bmatrix}$

Spänningar:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad \mathbf{C} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix} \text{ (P.S)} \quad \mathbf{C} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix} \text{ (P.D)}$$

FEM Ekv. (ett element): $\left[\int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \right] \mathbf{d}_e = \left[\int_{S_e} \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS + \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{K} dV \right] \quad \begin{matrix} \mathbf{t} = \text{spänningsvektor} \\ \mathbf{K} = \text{volymkraft} \end{matrix}$

LÖSNINGSFÖRSLAG: FEM FÖR INGENJÖRSTILLÄMPNINGAR, 8 JUNI, 2012

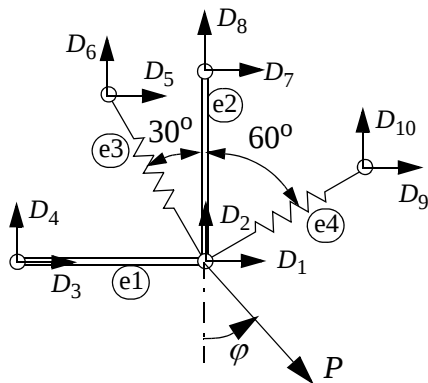
1.

Castiglianos 2:a sats ger förskjutningen i P:s riktning enligt

$$\delta = \frac{\partial \bar{W}}{\partial P} = \frac{R^2(\pi RP + 4M)}{EI(2 + \pi\eta)}$$

Då δ även är den förlängning som uppstår i fjädern fås normalkraften som

$$N = k\delta = \eta \frac{(\pi P + 4M/R)}{(2 + \pi\eta)}$$

2.Randvillkor: $D_3 = D_4 = D_5 = D_6 = D_7 = D_8 = D_9 = D_{10} = 0$

$$F_1 = P \sin \varphi, \quad F_2 = -P \cos \varphi$$

Elementstyvhetsmatriser: $\mathbf{K}_i = k_i \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i & -\mathbf{a}_i \\ -\mathbf{a}_i & \mathbf{a}_i \end{bmatrix}$

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = 2k_0 = 2 \frac{EA}{L}, \quad k_2 = k_0, \quad k_3 = k_4 = k$$

Reducerat ekvationssystem (Ekv. 1, 2):

$$\begin{bmatrix} k_0(2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) + k(\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k_0 + k & 0 \\ 0 & k_0 + k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \sin \varphi \\ -P \cos \varphi \end{bmatrix} \Rightarrow D_2 = \frac{-P \cos \varphi}{k_0 + k}$$

Enligt villkor: $D_2|_{k \neq 0} = \frac{1}{4} D_2|_{k=0} \Rightarrow k = 3k_0 = 3 \frac{EA}{L}$

3.

(a) Mult. O.D.E. med viktfkn. & integrera: $\int_{2L}^{3L} v \left[\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) + A \rho \omega^2 x \right] dx = 0 \quad (1)$

Partialintegration ger: $\int_{2L}^{3L} v \left[\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) \right] dx = \left[v \left(EA \frac{du}{dx} \right) \right]_{2L}^{3L} - \int_{2L}^{3L} \frac{dv}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) dx \quad (2)$

(2) insatt i (1) med $\sigma = E \frac{du}{dx}$ ger svag form: $\int_{2L}^{3L} \frac{dv}{dx} EA \frac{du}{dx} dx = [v(\sigma A)]_{2L}^{3L} + \int_{2L}^{3L} v A \rho \omega^2 x dx$

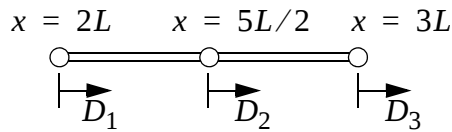
(b) Förskjutningsansats: $u = \mathbf{N} \mathbf{d}_e \quad \frac{du}{dx} = \frac{d\mathbf{N}}{dx} \mathbf{d}_e = \mathbf{B} \mathbf{d}_e$

Viktfunktion: $v = \mathbf{N} \mathbf{b}_e = \mathbf{b}_e^T \mathbf{N}^T \quad \frac{dv}{dx} = \mathbf{b}_e^T \frac{d\mathbf{N}^T}{dx} = \mathbf{b}_e^T \mathbf{B}^T$

Insatt i svag form, för ett element med längden $x_2 - x_1$, ger FEM-ekv. för element enligt

$$\mathbf{b}_e^T \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} \mathbf{B}^T E A \mathbf{B} dx}_{\mathbf{k}_e} \mathbf{d}_e = \mathbf{b}_e^T \underbrace{\left[\mathbf{N}^T(\sigma A) \right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{N}^T \rho \omega^2 x A dx}_{\mathbf{f}_e}$$

Då $\mathbf{b}_e^T$ innehåller godtyckliga koefficienter fås FEM-Ekv. som $\mathbf{k}_e \mathbf{T}_e = \mathbf{f}_e$

3(c). FEM-analys med två linjära element:R.V.: $D_1 = 0$ ($\Rightarrow$ Reaktionskraft)

Elementmatriser:

$$\text{Elem. 1: } \mathbf{K}_1 = \frac{EA}{L/2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{f}_{b1} = \int_0^1 \begin{bmatrix} 1-\xi \\ \xi \end{bmatrix} A\rho\omega^2 \left(2L(1-\xi) + \frac{5L}{2}\xi \right) \frac{L}{2} d\xi = \frac{A\rho\omega^2 L^2}{24} \begin{bmatrix} 13 \\ 14 \end{bmatrix}$$

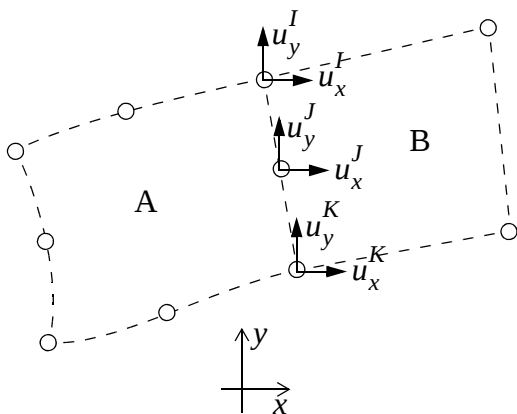
$$\text{Elem. 2: } \mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_1; \quad \mathbf{f}_{b2} = \int_0^1 \begin{bmatrix} 1-\xi \\ \xi \end{bmatrix} A\rho\omega^2 \left(\frac{5L}{2}(1-\xi) + 3L\xi \right) \frac{L}{2} d\xi = \frac{A\rho\omega^2 L^2}{24} \begin{bmatrix} 16 \\ 17 \end{bmatrix}$$

Assemblering av elementmatriser ges ekvationssystemet

$$\frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 = 0 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \frac{A\rho\omega^2 L^2}{24} \begin{bmatrix} 13 \\ 30 \\ 17 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \frac{\rho\omega^2 L^3}{48E} \begin{bmatrix} 47 \\ 64 \end{bmatrix}$$

Reaktionskraft

Turbinbladets totala förskjutning är $4\rho\omega^2 L^3/(3E)$ D.v.s. samma som den exakta lösningen, men förskjutningen inuti varje element avviker från den exakta lösningen.

4.

Förskjutningen utmed sidan $I-K$ i element B interpoleras med hjälp av en linjär funktion. Eftersom noden J ligger mittemellan noder I och K måste förskjutningarna i nod J anta medelvärdet av förskjutningarna i noderna I och K för att överlappning/glapp ej skall inträffa, d.v.s.

$$u_x^J = \frac{1}{2}(u_x^I + u_x^K), \quad u_y^J = \frac{1}{2}(u_y^I + u_y^K)$$

Alltså fås att koefficienterna blir:

$$A_2^x = A_3^x = A_2^y = A_3^y = -\frac{1}{2}$$

5.

(a) Egentyngdens bidrag till elementlastvektorn är: $\mathbf{f}_b = \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{f}_v dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{f}_v h |\mathbf{J}| d\xi d\eta$

För nod 1 gäller att:
$$\begin{bmatrix} f_{b1x} \\ f_{b1y} \end{bmatrix} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_1 \begin{bmatrix} \rho g \sin \varphi \\ -\rho g \cos \varphi \end{bmatrix} h |\mathbf{J}| d\xi d\eta$$

där $|\mathbf{J}| = \frac{L^2}{2}$, $N_1 = \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} \Rightarrow \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_1 d\xi d\eta = 1$

d.v.s.
$$\begin{bmatrix} f_{b1x} \\ f_{b1y} \end{bmatrix} = \frac{\rho g h L^2}{2} \begin{bmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{bmatrix} \quad \text{V.S.V.}$$

(b) Ekvationssystem: $\mathbf{K}_e \mathbf{d}_e = \mathbf{f}$ där $\mathbf{f} = \mathbf{f}_p + \mathbf{f}_b$

$$\mathbf{f}_p^T = \begin{bmatrix} 0 & R_{1y} & R_{2x} & R_{2y} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_b^T = \begin{bmatrix} f_{b1x} & f_{b1y} & f_{b2x} & f_{b2y} & f_{b3x} & f_{b3y} & f_{b4x} & f_{b4y} \end{bmatrix}$$

Reaktionskrafterna i nod 1 ges av Ekv. (1) och (2) (OBS! $R_{1x} = 0$) enligt

$$\begin{bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \end{bmatrix} = \frac{Eh}{8} \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 & -1 & -3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & -2 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{d}_e - \begin{bmatrix} f_{b1x} \\ f_{b1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho g h L^2 (\cos \varphi - 2 \sin \varphi) \end{bmatrix}$$

Skivan kan förväntas välta då $f_{b1y} < 0 \Rightarrow \cos \varphi - 2 \sin \varphi < 0 \Rightarrow \varphi > \arctan \frac{1}{2}$

(c) Förskjutningsvektorn i punkten $\{x = L, y = 3L/2\} \Leftrightarrow \{\xi = 1, \eta = 1/2\}$ ges av

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \mathbf{N}|_{\xi=1, \eta=1/2} \mathbf{d}_e = \frac{\rho g L^2}{E} \begin{bmatrix} 10 \sin \varphi \\ -3 \sin \varphi - \frac{3}{2} \cos \varphi \end{bmatrix}$$