KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Lösningsförslag med bedömningskriterier till kontrollskrivning 1
Måndagen den 28 januari, 2013

(1) Bestäm och skissera (rita) den största möjliga definitionsmängden till funktionen

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

Bestäm också om definitionsmängden är en kompakt mängd. **(4 p)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

Kvadratrotsuttrycken

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 1} \quad \text{och} \quad \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

är bara definierade när argumentet till resp. kvadratrot är större än eller lika med 0, dvs.

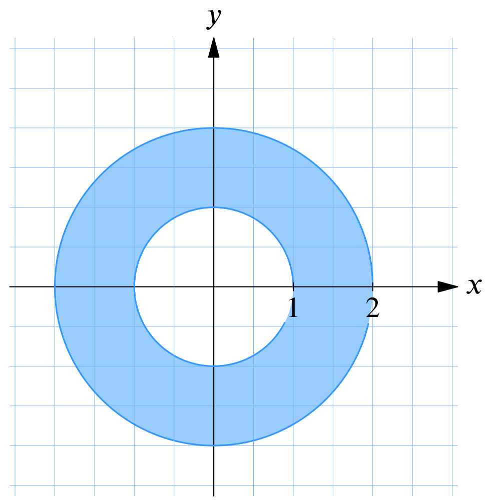
$$x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \quad \text{och} \quad 4 - x^2 - y^2 \geq 0.$$

Samlar vi x och y i ena ledet kan olikheterna sammanfattas som

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 4. \qquad (*)$$

Det område som består av punkter (x, y) som uppfyller denna olikhet utgör den största möjliga definitionsmängden till f.

Eftersom uttrycket $x^2 + y^2$ är lika med kvadraten på avståndet från punkten (x, y) till origo så ger $(*)$ området mellan cirklarna med radie 1 och 2 centrerade kring origo.



Randen till detta område består av de två cirklarna och eftersom de ingår i området (punkter på cirklarna uppfyller $(*)$) så är området en sluten mängd.

Vidare är området begränsat eftersom alla punkter har ett avstånd till origo som är högst lika med 2. Området är alltså slutet och begränsat och därmed en kompakt mängd.

(2) Givet funktionen $f(x, y) = x^2 + 2xy - y^2$ och parameterkurvan

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t, \sin t, \cos 2t + \sin 2t)$$

där $0 \leq t \leq 2\pi$.

a) Visa att parameterkurvan ligger på funktionsytan $z = f(x, y)$. **(1 p)**

b) Bestäm en ekvation för det plan som tangerar funktionsytan $z = f(x, y)$ i punkten $(-1, 0, 1)$. **(1 p)**

c) Visa att tangenten till parameterkurvan i punkten $(-1, 0, 1)$ är vinkelrät mot normalen till tangentplanet i deluppgift b. **(2 p)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

a) Parameterkurvan ligger på funktionsytan om alla dess punkter uppfyller funktionsytans ekvation $z = f(x, y)$.

En godtycklig punkt på parameterkurvan har koordinaterna

$$(x, y, z) = (\cos t, \sin t, \cos 2t + \sin 2t),$$

där $0 \leq t \leq 2\pi$, och uträkningen

$$\begin{aligned} f(x, y) = f(\cos t, \sin t) &= \cos^2 t + 2\cos t \sin t - \sin^2 t \\ &= (\cos^2 t - \sin^2 t) + 2\cos t \sin t \\ &= \{ \text{ Formeln för dubbla vinkeln } \} \\ &= \cos 2t + \sin 2t \\ &= z \end{aligned}$$

visar att punkten uppfyller ekvationen $z = f(x, y)$ och därmed ligger på denna yta.

b) Funktionsytan kan ses som nivåytan $F(x, y, z) = 0$, där $F(x, y, z) = z - f(x, y)$.

I punkten $\boldsymbol{P} = (-1, 0, 1)$ har nivåytan normalen

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n} = \nabla F(-1, 0, 1) &= \Big(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\Big) \Big|_{(x,y,z)=(-1,0,1)} \\ &= \Big(-2x - 2y, -2x + 2y, 1\Big) \Big|_{(x,y,z)=(-1,0,1)} \\ &= (2, 2, 1) \end{aligned}$$

och tangentplanets ekvation $\boldsymbol{n} \cdot [\boldsymbol{r} - \overrightarrow{OP}\,] = 0$ blir därmed

$$(2, 2, 1) \cdot \big[(x, y, z) - (-1, 0, 1)\big] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 2y + z = -1.$$

c) Parameterkurvan passerar genom punkten $(-1, 0, 1)$ när $t = \pi$ och i denna punkt har därför parameterkurvan riktningsvektorn

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}(\pi) &= \frac{d}{dt}\big(\cos t, \sin t, \cos 2t + \sin 2t\big)\Big|_{t=\pi} \\ &= \big(-\sin t, \cos t, -2\sin 2t + 2\cos 2t\big)\Big|_{t=\pi} \\ &= \big(-\sin \pi, \cos \pi, -2\sin 2\pi + 2\cos 2\pi\big) \\ &= (0, -1, 2) \end{aligned}$$

som också är riktningen på tangenten.

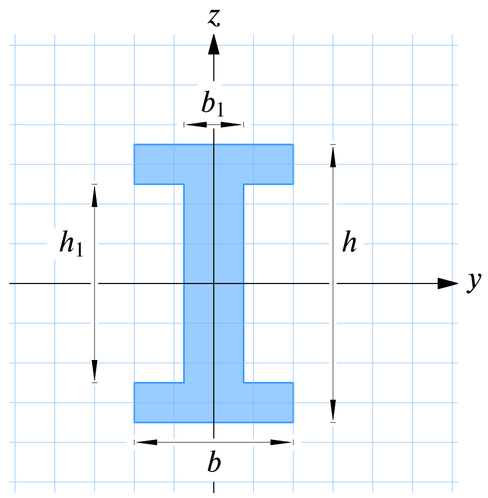
Denna riktning $\boldsymbol{v}$ är vinkelrät mot tangentplanets normal $\boldsymbol{n}$ eftersom

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v} = (2, 2, 1) \cdot (0, -1, 2) = 2 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 0 + 2 - 2 = 0.$$

(3) Yttröghetsmomentet I_y för en I-balk med tvärsnitt enligt figuren ges av

$$I_y = \frac{bh^3 - (b - b_1)h_1^3}{12}.$$

En I-balk tillverkas med dimensionerna $b = 8\,\text{cm}$, $b_1 = 3\,\text{cm}$, $h = 10\,\text{cm}$ och $h_1 = 8\,\text{cm}$, vilket ger $I_y = \frac{1360}{3}\,\text{cm}^4$.



a) Bestäm en linjär approximation av $I_y(b, b_1, h, h_1)$ kring dessa värden. **(2 p)**

b) När balken tillverkas är noggrannheten 0,1 cm för b, b_1, h och h_1. Använd den linjära approximationen för att beräkna I_y med felgränser. **(2 p)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

a) Formeln för linjär approximation är

$$\begin{aligned} &I_y(8 + \Delta b, 3 + \Delta b_1, 10 + \Delta h, 8 + \Delta h_1) \\ &\quad = I_y(8, 3, 10, 8) + \frac{\partial I_y}{\partial b}(8, 3, 10, 8)\,\Delta b + \frac{\partial I_y}{\partial b_1}(8, 3, 10, 8)\,\Delta b_1 \\ &\qquad + \frac{\partial I_y}{\partial h}(8, 3, 10, 8)\,\Delta h + \frac{\partial I_y}{\partial h_1}(8, 3, 10, 8)\,\Delta h_1 + \text{restterm}. \end{aligned}$$

där

$$\frac{\partial I_y}{\partial b} = \frac{h^3 - h_1^3}{12}, \qquad \frac{\partial I_y}{\partial b_1} = \frac{h_1^3}{12},$$

$$\frac{\partial I_y}{\partial h} = \frac{3bh^2}{12}, \qquad \frac{\partial I_y}{\partial b_1} = \frac{-3(b - b_1)h_1^2}{12},$$

vilket ger att

$$I_y(8, 3, 10, 8) = \frac{1360}{3}, \quad \text{(enligt uppgiftstexten)}$$

$$\frac{\partial I_y}{\partial b}(8, 3, 10, 8) = \frac{122}{3}, \qquad \frac{\partial I_y}{\partial b_1}(8, 3, 10, 8) = \frac{128}{3},$$

$$\frac{\partial I_y}{\partial h}(8, 3, 10, 8) = 200, \qquad \frac{\partial I_y}{\partial h_1}(8, 3, 10, 8) = -80.$$

Vi får alltså att

$$I_y(8 + \Delta b, 3 + \Delta b_1, 10 + \Delta h, 8 + \Delta h_1)$$
$$= \frac{1360}{3} + \frac{122}{3}\Delta b + \frac{128}{3}\Delta b_1 + 200\Delta h - 80\Delta h_1 + \text{restterm}.$$

b) Vid tillverkningen har vi att

$$|\Delta b| \leq 0{,}1, \quad |\Delta b_1| \leq 0{,}1, \quad |\Delta h| \leq 0{,}1, \quad |\Delta h_1| \leq 0{,}1$$

och försummar vi resttermen i den linjära approximationen ger detta att

$$\begin{aligned}
\left| I_y - \tfrac{1360}{3} \right| &\leq \left| \tfrac{122}{3}\Delta b + \tfrac{128}{3}\Delta b_1 + 200\Delta h - 80\Delta h_1 \right| \\
&\leq \tfrac{122}{3}|\Delta b| + \tfrac{128}{3}|\Delta b_1| + 200|\Delta h| + 80|\Delta h_1| \\
&\leq \tfrac{122}{3} \cdot 0{,}1 + \tfrac{128}{3} \cdot 0{,}1 + 200 \cdot 0{,}1 + 80 \cdot 0{,}1 \\
&= \tfrac{109}{3}\ \text{cm}^4.
\end{aligned}$$

Yttröghetsmomentet med felgränser blir alltså

$$I_y = \frac{1360}{3} \pm \frac{109}{3}\ \text{cm}^4.$$

Svar:

(1) Se lösningen för en figur. Definitionsmängden är kompakt.

(2) a) Se lösning
b) $2x + 2y + z = -1$
c) Se lösning

(3) a) $I_y(8+\Delta b, 3+\Delta b_1, 10+\Delta h, 8+\Delta h_1) = \frac{1360}{3} + \frac{122}{3}\Delta b + \frac{128}{3}\Delta b_1 + 200\Delta h - 80\Delta h_1 + \text{R}.$
b) $I_y = \dfrac{1360}{3} \pm 40{,}4\ \text{cm}^4$