Reglerteknik Ö2

Köp övningshäfte på kårbokhandeln

William Sandqvist william@kth.se

6.5 Från diffekv. till överföringsfunktion

a) $y' + 5y = x$

b) $y'' + 3y = 4x$

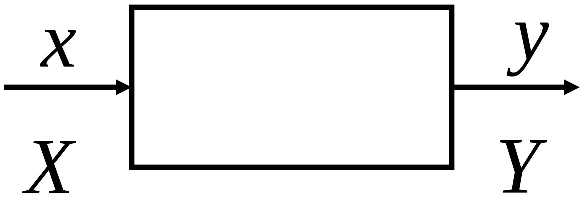
c) $y'' - 5y' + 6y = x$

d) $y'' - 3y' + 2y = 3x' + x$

e) $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y - \dot{x} + 3x = 0$

f) $4(\ddot{y} + 3\dot{y} + \dot{x}) + 8\ddot{x} = 0$

g) $\ddot{y} + \dot{y} + 3y = 2\dot{x}$



William Sandqvist william@kth.se

6.5 **f** lösning, överföringsfunktion

f) $4(\ddot{y} + 3\dot{y} + \dot{x}) + 8\ddot{x} = 0$

$$L\left[4(\ddot{y} + 3\dot{y} + \dot{x}\right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4s^2Y + 12sY + 4X = 0$$

$$\frac{Y}{X} = \frac{-8s^2 - 4s}{4s^2 + 125} = \boxed{-\frac{2s+1}{s+3}}$$

Vad betyder ”–” tecknet? Att *x* eller *y* är motsatt sin definitionsriktning, inget värre.

6.6 överföringsfunktion

a) $y = x + 5\int xdt + 2\dot{x}$ PID-regulator

b) $y = 5x + 3\int xdt$ PI-regulator

c) $y(t) = x(t-5)$ Dödtidsprocess

d) $y'(t) + y(t) = 2x(t-10)$ Dödtidsprocess

William Sandqvist william@kth.se

6.6 **b** lösning, överföringsfunktion

b) $y = 5x + 3\int xdt$ PI-regulator

$$L[y] = L\left[5x + 3\int xdt\right] \Leftrightarrow Y = 5X + \frac{3}{s}X$$

$$\boxed{\frac{Y}{X} = 5 + \frac{3}{s}}$$

6.6 **d** lösning, överföringsfunktion

d) $y'(t) + y(t) = 2x(t-10)$ Dödtidsprocess

$$L\left[y'(t) + y(t)\right] = L\left[2x(t-10)\right] \Leftrightarrow sY + Y = 2e^{-10s}X$$

$$\boxed{\frac{Y}{X} = \frac{2e^{-10s}}{s+1}}$$

6.7 från överföringsfunktion till diffekv.

a) $$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{3+s}{s^2+4s+1}$$

b) $$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{2e^{-3s}}{5s+1}$$

c) $$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=3+4s$$

d) $$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s+4}{2s^2+3}$$

6.7 **b** lösn. $G(s)$ till diffekv.

b) $$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2e^{-3s}}{5s+1}$$

$$5sY + Y = 2e^{-3s}U \quad \Rightarrow \quad \boxed{5y'(t) + y(t) = 2u(t-3)}$$

6.7 **c, d** lösn. $G(s)$ till diffekv.

c) $$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = 3 + 4s$$

$$Y = 3U + 4sU \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{y = 4\dot{u} + 3u}$$

d) $$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+4}{2s^2+3}$$

$$2s^2Y + 3Y = Us + 4U \quad \Rightarrow \quad \boxed{2\ddot{y} + 3y = \dot{u} + 4u}$$

6.8 stegsvar från överföringsfunktion

a) $$G(s)=\frac{1}{s^2+16}$$

b) $$G(s)=\frac{3}{s^2+9}$$

c) $$G(s)=\frac{1}{s+2}$$

d) $$G(s)=\frac{3}{s}$$

e) $$G(s)=\frac{1}{s(s+1)}$$

f) $$G(s)=\frac{4}{s(s^2+4)}$$

Laplacetransformtabell

$L[f(t)]$

$L^{-1}[F(s)]$

Laplacetransform $F(s)$	Tidsfunktion $f(t)$ för $t > 0$
1	Impulsfunktion $\delta(t)$
$\frac{1}{s}$	Stegfunktion $\sigma(t)$
$\frac{1}{s^2}$	Rampfunktion t
$\frac{1}{s^3}$	$\frac{t^2}{2}$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}
$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{b-a}$
$\frac{1}{s(1+as)}$	$1-e^{-\frac{t}{a}}$
$\frac{1}{s(1+as)(1+bs)}$	$1-\frac{a\cdot e^{-\frac{t}{a}}}{a-b}-\frac{b\cdot e^{-\frac{t}{b}}}{b-a}$
$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)}+\frac{e^{-bt}}{(c-b)(a-b)}+\frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$
$\frac{s+a}{(s+b)(s+c)}$	$\frac{(a-b)e^{-bt}-(a-c)e^{-ct}}{c-b}$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	$t\cdot e^{-at}$
$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\cdot \sin at$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
$\frac{1}{s(s^2+a^2)}$	$\frac{1}{a^2}[1-\cos at]$
$\frac{1}{s^2(s^2+a^2)}$	$\frac{1}{a^3}[at-\sin at]$
$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at}\cdot \cos bt$
$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at}\cdot \sin bt$

William Sandqvist william@kth.se

6.8 **b** lösning stegsvar

b) $$G(s)=\frac{3}{s^2+9}$$

$$L[unitstep]=\frac{1}{s}$$

$F(s)$ $\Leftrightarrow$	$f(t)$ $t>0$
$\frac{1}{s}$	Stegfunktion $\sigma(t)$
$\frac{1}{s(s^2+a^2)}$	$\frac{1}{a^2}[1-\cos at]$

$$\frac{1}{s}\cdot\frac{3}{s^2+3^3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(t)=\frac{1}{3}(1-\cos 3t)}$$

6.8 **d** lösning stegsvar

d) $$G(s) = \frac{3}{s}$$

$$L[unitstep] = \frac{1}{s}$$

$F(s)$ $\Leftrightarrow$	$f(t)$ $t > 0$
$\frac{1}{s}$	Stegfunktion $\sigma(t)$
$\frac{1}{s^2}$	Rampfunktion t

$$\frac{1}{s} \cdot \frac{3}{s} \Rightarrow \frac{3}{s^2} \Rightarrow \boxed{y(t) = 3t}$$

William Sandqvist william@kth.se

6.8 **f** lösning stegsvar

f) $$G(s) = \frac{4}{s(s^2+4)}$$

$$L[unitstep] = \frac{1}{s}$$

$F(s)$	$\Leftrightarrow$ $f(t)$ $t>0$
$\frac{1}{s}$	Stegfunktion $\sigma(t)$
$\frac{1}{s^2}$	Rampfunktion t
$\frac{1}{s^2(s^2+a^2)}$	$\frac{1}{a^3}[at - \sin at]$

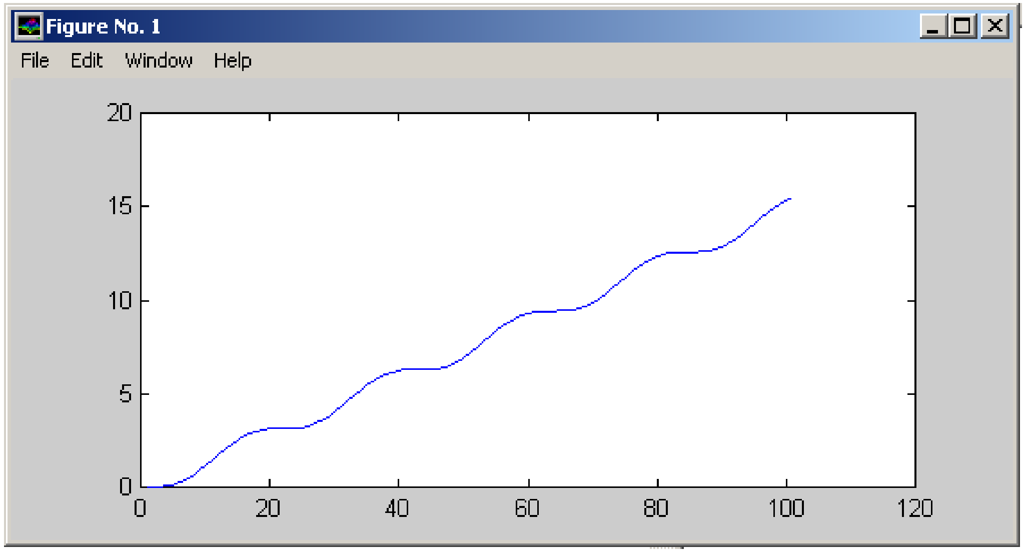
$$\frac{1}{s}\cdot\frac{4}{s(s^2+4)} \Leftrightarrow \frac{4}{s^2(s^2+4)} \Rightarrow$$

$$y(t) = 4\cdot\frac{1}{8}(2t-\sin 2t) = \boxed{t - 0{,}5\sin 2t}$$

6.8 **f** lösning MATLAB

f) $G(s) = \dfrac{4}{s(s^2+4)}$

```
G1=tf([1],[1, 0]);
G2=tf([4],[1, 0, 4]);
G=series(G1,G2);
plot(step(G));
```



$$y(t) = t - 0{,}5\sin 2t$$

6.9 Impulssvar från överföringsfunktion

a) $$G(s)=\frac{2}{s^2+5s+6}$$

b) $$G(s)=\frac{s+1}{s^2+4}$$

c) $$G(s)=\frac{3}{s+1}$$

d) $$G(s)=\frac{2}{s(1+5s)}$$

6.9 **b** lösning impulssvar

b) $$G(s) = \frac{s+1}{s^2+4}$$

$$L[impulse] = 1$$

$$\frac{s+1}{s^2+4} = \frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{s^2+4}$$

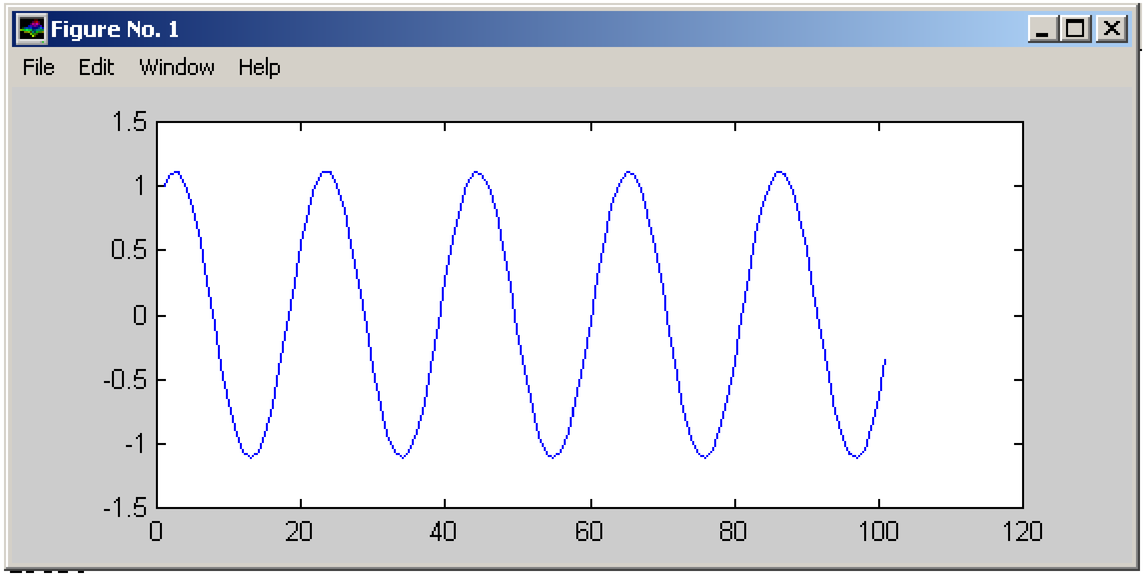
$F(s)$ $\Leftrightarrow$	$f(t)$ $t > 0$
$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{1}{a} \cdot \sin at$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$

$$\boxed{y(t) = 0{,}5 \sin 2t + \cos 2t}$$

6.9 **b** lösning MATLAB

b) $$G(s) = \frac{s+1}{s^2+4}$$

```
G=tf([0,1,1],[1,0,4]);
plot(impulse(G));
```



$$y(t) = 0{,}5\sin 2t + \cos 2t$$

6.9 c,d lösning impulssvar $L[impulse] = 1$

c) $G(s) = \dfrac{3}{s+1}$

$F(s) \Leftrightarrow$	$f(t) \quad t > 0$
$\dfrac{1}{s+a}$	e^{-at}

$\boxed{y(t) = 3e^{-t}}$

d) $G(s) = \dfrac{2}{s(1+5s)}$

$F(s) \Leftrightarrow$	$f(t) \quad t > 0$
$\dfrac{1}{s(1+as)}$	$1 - e^{-\frac{t}{a}}$

$\boxed{y(t) = 2(1 - e^{-\frac{t}{5}})}$

William Sandqvist william@kth.se

6.12 Partialbråksuppdelning

a) $G(s) = \dfrac{9-3s}{(s+1)(s+7)}$

b) $G(s) = \dfrac{4s+2}{s(s+1)(s+2)}$

c) $G(s) = \dfrac{4s^2+7s+4}{(s+2)(s^2+s+1)}$

d) $G(s) = \dfrac{3s^2-2s+1}{(s-3)(s-2)(s-1)}$

e) $G(s) = \dfrac{s^2+4s+5}{s^3+2s^2+3s+2}$

f) $G(s) = \dfrac{5s+12}{s^2+5s+6}$

6.12 **b** lösn. metod Handpåläggning

b) $$G(s) = \frac{4s+2}{s(s+1)(s+2)}$$

$$\frac{4s+2}{s(s+1)(s+2)} = \frac{\frac{4\cdot 0+2}{(0+1)(0+2)}}{s} + \frac{\frac{4\cdot -1+2}{-1(-1+2)}}{s+1} + \frac{\frac{4\cdot -2+2}{-2(-2+1)}}{s+2} =$$

$$\boxed{= \frac{1}{s} + \frac{2}{s+1} - \frac{3}{s+2}}$$

6.12 **c** lösn. metod Partialbråksuppd.

c) $G(s) = \dfrac{4s^2 + 7s + 4}{(s+2)(s^2+s+1)}$

$$\frac{4s^2 + 7s + 4}{(s+2)(s^2+s+1)} = \frac{a}{s+2} + \frac{bs+c}{s^2+s+1} =$$

$$= \frac{(a+2b)s^2 + (a+2b+c)s + (a+b)}{(s+2)(s^2+s+1)}$$

$$\begin{cases} a + b + 0 = 4 \\ a + 2b + c = 7 \\ a + 0 + 2c = 4 \end{cases}$$

$a = 2 \quad b = 2 \quad c = 1$

Ekvationssystem med MATLAB:

```
» [1 1 0;1 2 1;1 0 2]\[4 7 4]'
ans = 2 2 1
»
```

$$\boxed{G(s) = \frac{2}{s+2} + \frac{2s+1}{s^2+s+1}}$$

William Sandqvist william@kth.se

6.12 **d** lösn. metod Handpåläggning

d) $$G(s) = \frac{3s^2 - 2s + 1}{(s-3)(s-2)(s-1)}$$

$$\frac{3s^2 - 2s + 1}{(s-3)(s-2)(s-1)} = \frac{\frac{22}{2}}{s-3} + \frac{\frac{9}{-1}}{s-2} + \frac{\frac{2}{2}}{s-1} =$$

$$\boxed{= \frac{11}{s-3} - \frac{9}{s-2} + \frac{1}{s-1}}$$

6.12 **e** lösn. metod Polynomdivision

e) $G(s) = \dfrac{s^2 + 4s + 5}{s^3 + 2s^2 + 3s + 2}$

Vi ”gissar” att s = -1 är rot till nämnarpolynomet.

$$s^3 + 2s^2 + 3s + 2 \quad \{s = -1\}$$

$$-1^3 + 2(-1^2) + 3(-1) + 2 = -1 + 2 - 3 + 2 = 0$$

Prövning.
Ja, det stämmer.

MATLAB:

```
roots([1,2,3,2])
ans =
   -0.5000+ 1.3229i
   -0.5000- 1.3229i
   -1.0000
```

Då slipper man gissa!

6.12 **e** lösn. metod Polynomdivision

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad s^2 + \ s \ + 2 \\
\hline
s+1 & s^3 + 2s^2 + 3s + 2 \\
 & -s^3 - s^2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad s^2 + \ 3s + 2 \\
 & \qquad -s^2 \quad - s \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad 2s + 2 \\
 & \qquad\qquad -2s - 2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

”Trappan”

$$s^3 + 2s^2 + 3s + 2 =$$

$$= (s+1)(s^2 + s + 2)$$

$$G(s) = \frac{s^2 + 4s + 5}{(s+1)(s^2 + s + 2)}$$

6.12 **e** lösn. metod Polynomdivision

$$\frac{s^2+4s+5}{(s+1)(s^2+s+2)}=\frac{a}{s+1}+\frac{bs+c}{s^2+s+2}=$$

$$=\frac{(a+b)s^2+(a+b+c)s+(2a+c)}{(s+1)(s^2+s+2)}$$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a+b+c=4 \\ 2a+c=5 \end{cases}$$

$$a=1 \quad b=0 \quad c=3$$

$$\boxed{G(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{3}{s^2+2s+2}}$$

6.12 **f** lösn. Rötter med pq-formeln

f) $G(s) = \dfrac{5s+12}{s^2+5s+6}$

s^2+5s+6 *p*, *q*-formeln

$$s = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6} \quad s_1 = -2 \quad s_2 = -3$$

handpåläggning

$$G(s) = \frac{5s+12}{(s+2)(s+3)} = \frac{\frac{2}{1}}{s+2} + \frac{\frac{-3}{-1}}{s+3} = \boxed{\frac{2}{s+2} + \frac{3}{s+3}}$$

William Sandqvist william@kth.se

6.14 Diffekv. poler/0-ställen

a) $y''+9y'+14y=3u$

b) $\dddot{y}+6\ddot{y}+11\dot{y}+14y=\dot{u}+4u$

c) $y''+4y'+3y=u'+u$

1) Överföringsfunktioner
2) Poler och 0-ställen
3) Statisk förstärkning
4) Tidkonstanter

6.14 **b** lösn. poler/0-ställen MATLAB

b) $\dddot{y} + 6\ddot{y} + 11\dot{y} + 14y =$

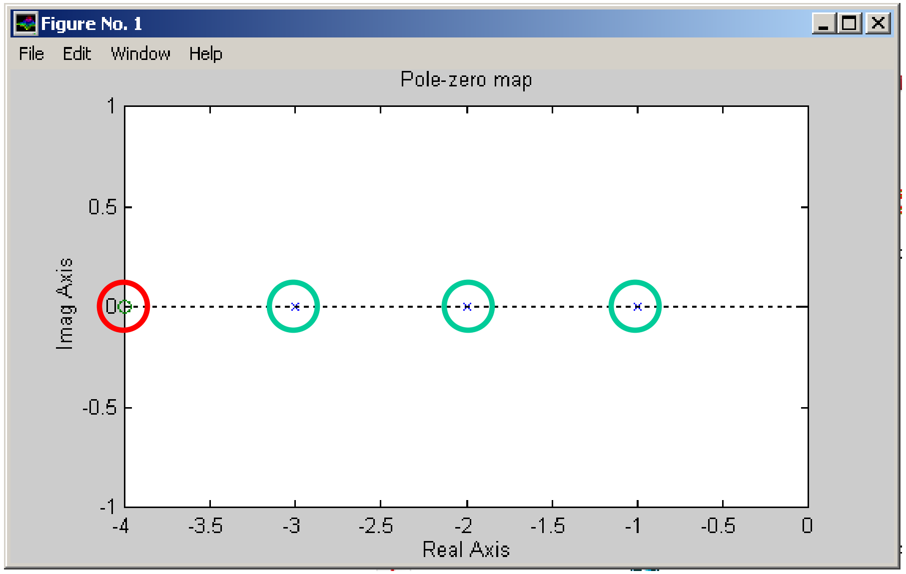
$\dot{u} + 4u \quad \Rightarrow$

$$G(s) = \frac{s+4}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

```
G=tf([1,4],[1,6,11,6]);
pzmap(G);
```

0-ställe:

s = -4



Poler:

s = -1

s = -2

s = -3

6.14 **b** lösn. Tidkonstanter, Gain

$$G(s) = \frac{s+4}{s^3+6s^2+11s+6} = \frac{s+4}{(s+1)(s+2)(s+3)} =$$

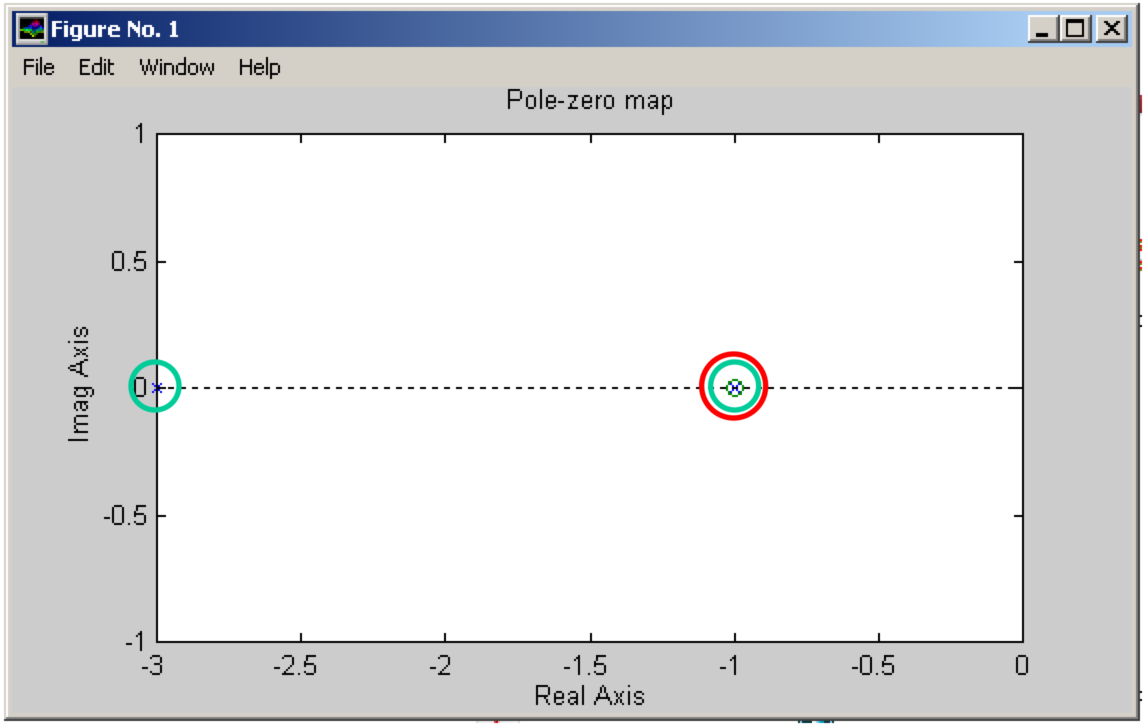
$$= \frac{s+4}{(\boxed{1}s+1)\cdot 2\cdot(\boxed{\tfrac{1}{2}}s+1)\cdot 3\cdot(\boxed{\tfrac{1}{3}}s+1)} \qquad G(s\to 0) = \frac{4}{2\cdot 3} \approx 0{,}67$$

$$\tau_1 = 1 \quad \tau_2 = 0{,}5 \quad \tau_3 = 0{,}33 \qquad Gain \approx 0{,}67$$

6.14 **c** lösn. poler/0-ställen MATLAB

c) $y''+4y'+3y = u'+u \quad \Rightarrow \quad G(s) = \dfrac{s+1}{s^2+4s+3}$

```
G=tf([1,1],[1,4,3]);
pzmap(G);
```



Poler:

s = -1

s = -3

0-ställe:

s = -1

6.14 **c** lösn. Tidkonstanter, Gain

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+4s+3} = \frac{s+1}{(s+1)(s+3)} = \frac{s+1}{(\boxed{1}s+1)\cdot 3\cdot(\boxed{\tfrac{1}{3}}s+1)}$$

$$Gain = G(s \to 0) = \frac{1}{3} \approx 0{,}67 \qquad \tau_1 = 1 \quad \tau_2 = 0{,}33$$

William Sandqvist william@kth.se