

Funktionsrum

Funktioner kan uttryckas som en summa av andra enklare funktioner.

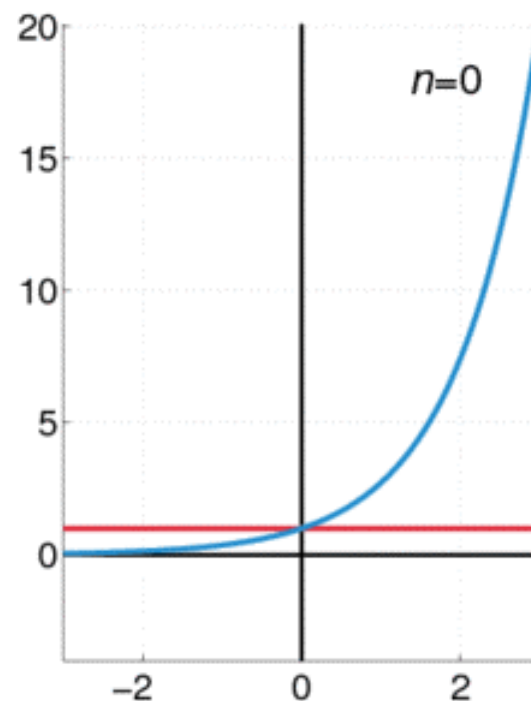
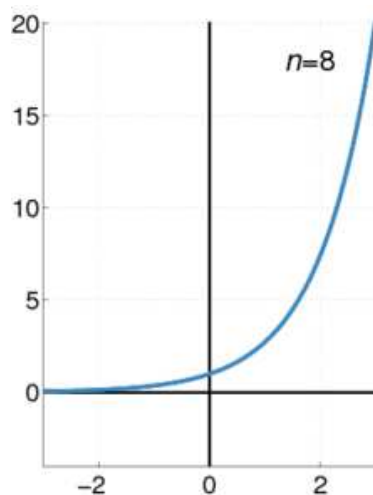
- Med Taylorserier uttrycker man funktioner som polynom.

Taylor serie

Funktioner kan representeras med sina **Taylorserier**.

Exponentialfunktionen approximeras här med upp till 8 termer:

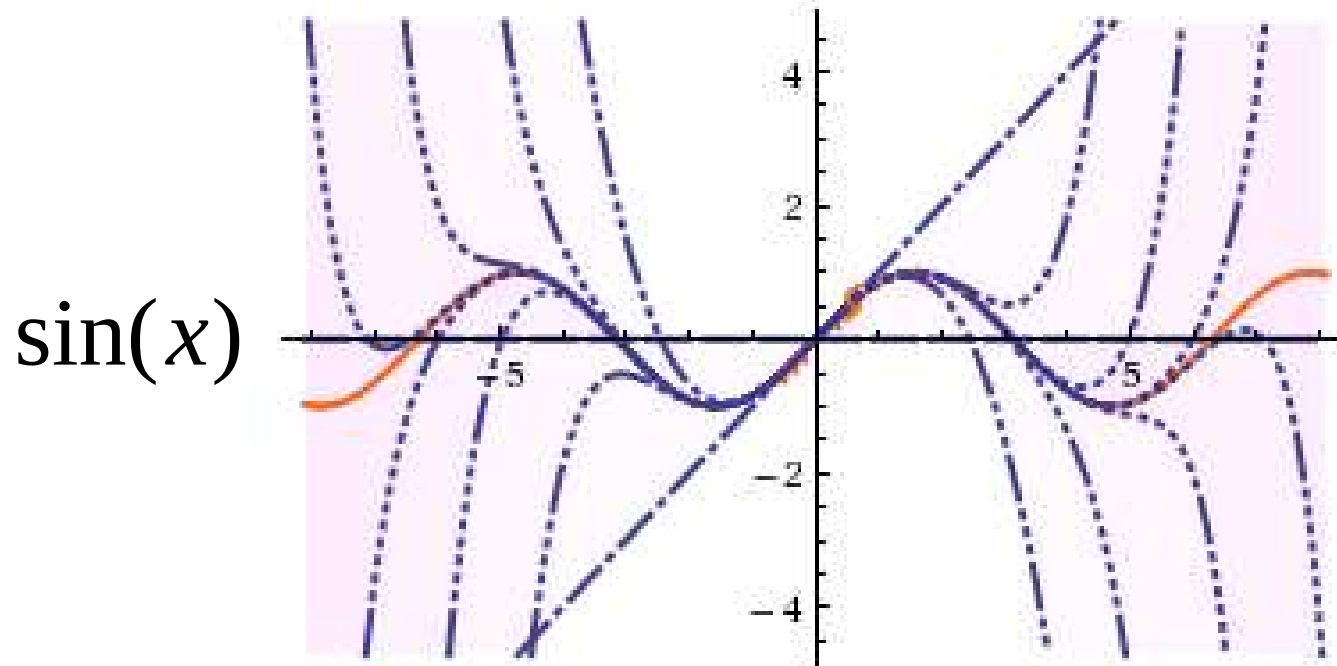
e^x



$$1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \dots$$



Taylor serie för periodisk funktion?



$\sin(x)$ med 15-termer. När en funktion är periodisk krävs det helt enkelt opraktiskt många termer i polynomet ...



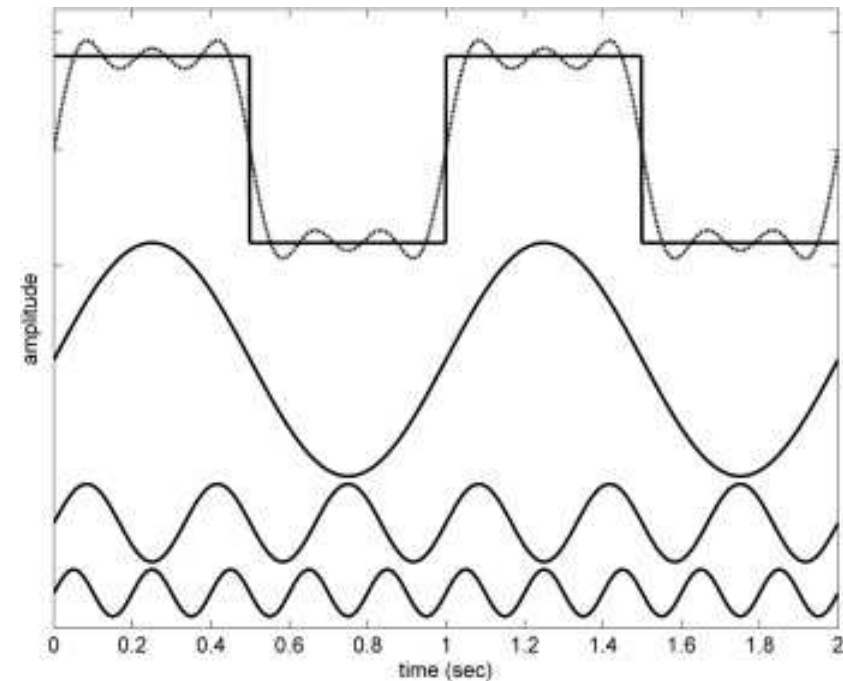
Fourierserie



Periodiska funktioner kan representeras bättre med sinus-funktioner än med polynom.

- Fourierserier

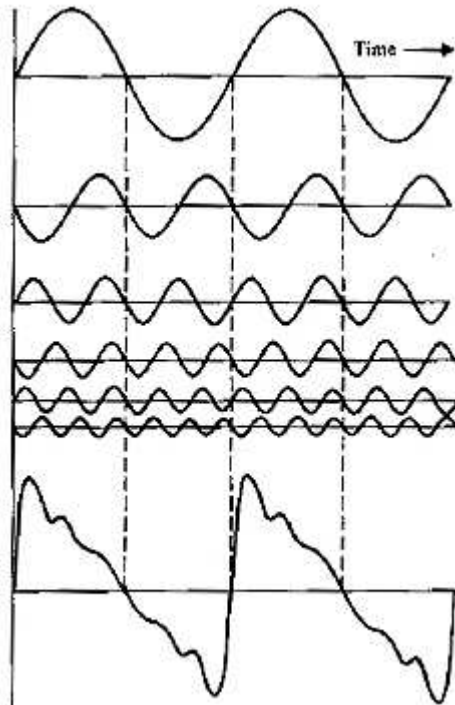
I figuren byggs en fyrkantvåg upp av sinus-funktioner. Redan 3 st sinuskomponenter ger ett ”hyfsat” resultat.





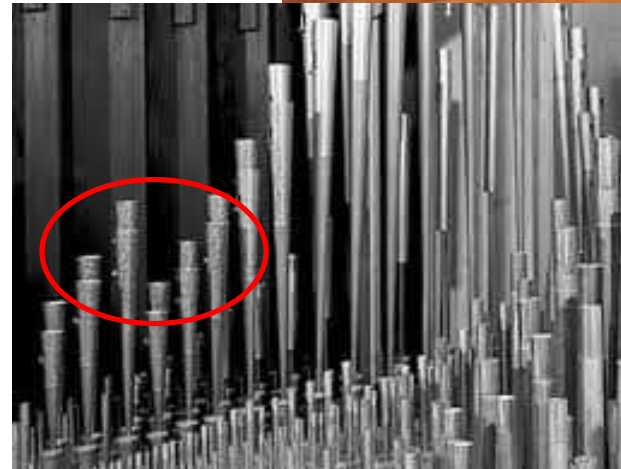
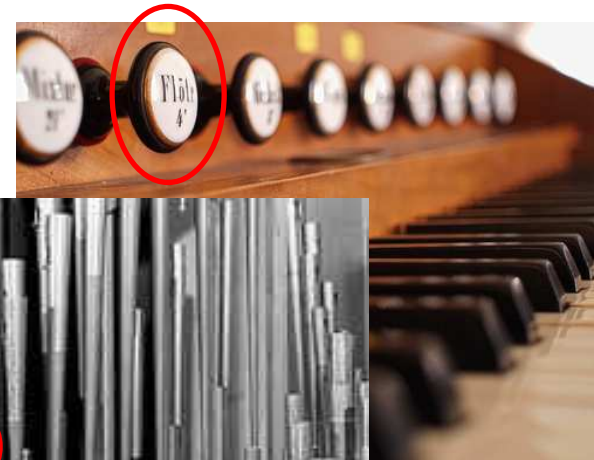
Orgelstämmor

En **orgel** kan låta som en **flöjt** genom att bygga upp flöjt-tonen med sinustoner från flera olika avstämda orgelpipor.



En flöjt-ton kan delas upp i dessa sinustoner

flöjt-ton



Sinusvåg som visare

REPRIS från Elläran!

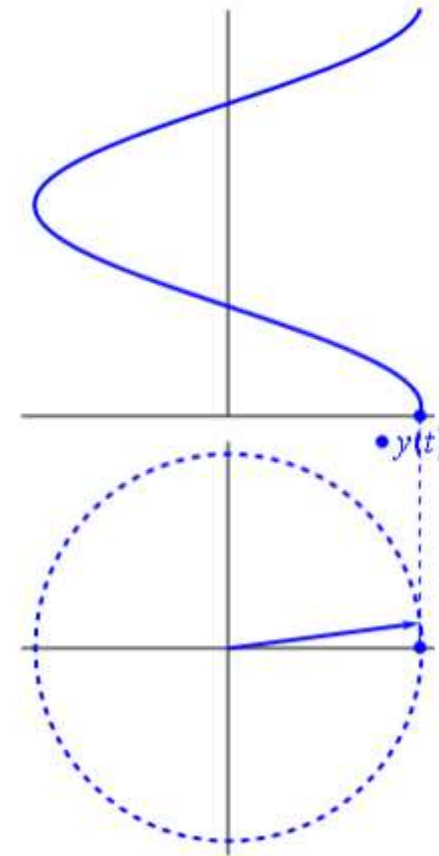
En sinusspänning eller ström,

$$y(t) = \hat{Y} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

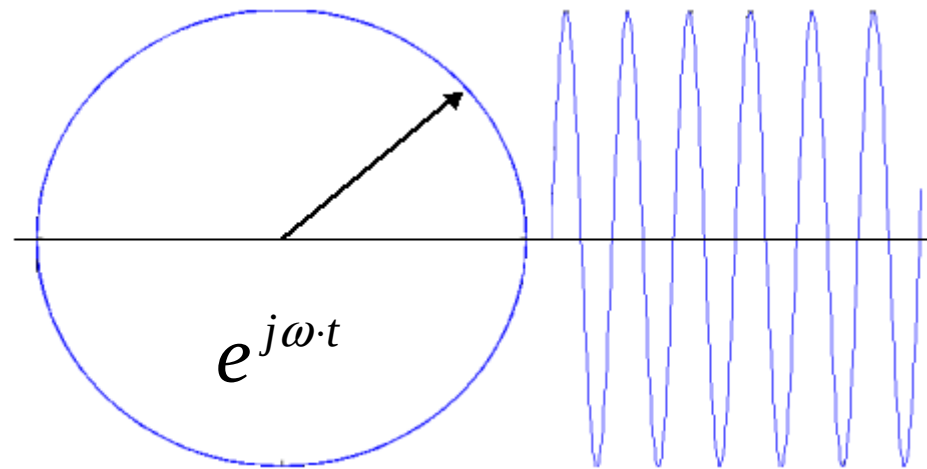
kan representeras av en visare som roterar med vinkelhastigheten ω [rad/sek] runt origo.



[Wikipedia Phasors](#)



Sinus som visare i en cirkel



Jämför med $j\omega$ - metoden!

Fouriertransformen

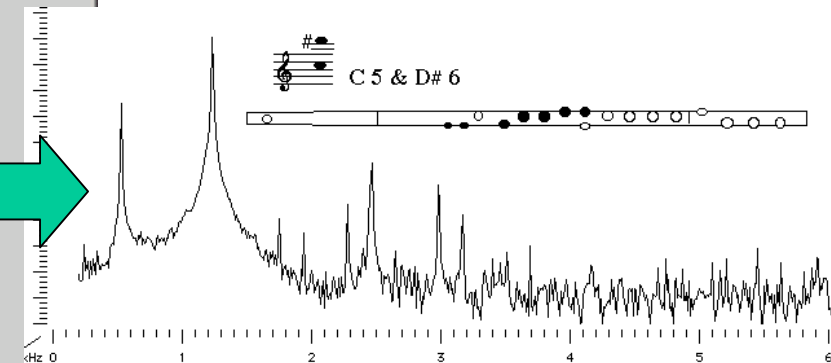
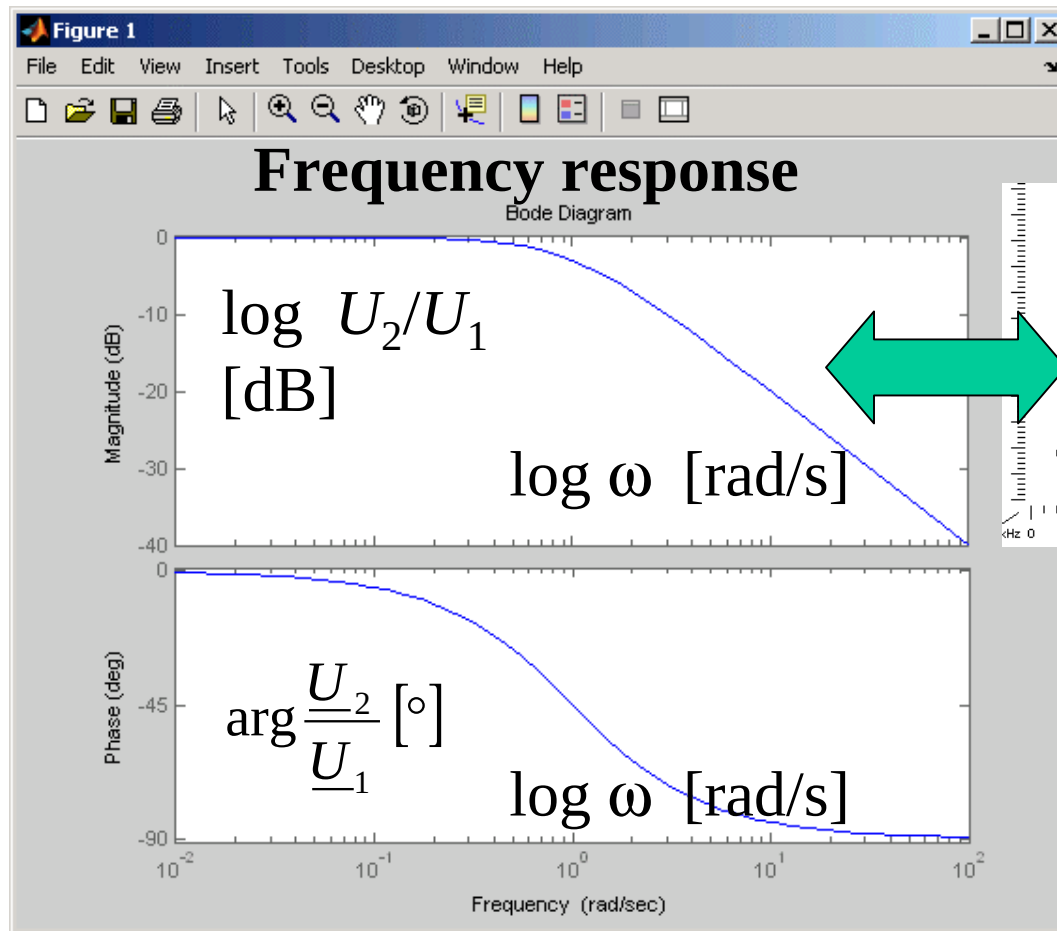
$$F(\omega) = \mathcal{F}(f(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Tidsfunktionen $f(t)$ ersätts med ”j ω -metodens frekvenskomponenter” som summeras (integreras) till en frekvensfunktion $F(\omega)$.

Bode-diagrammet



Hendrik Wade Bode

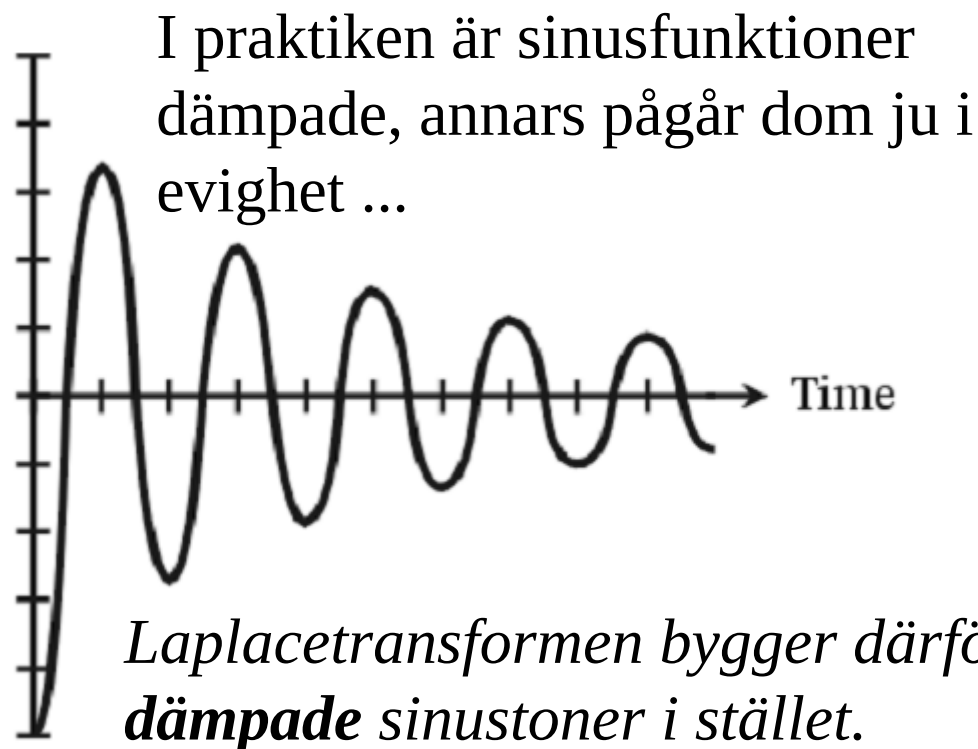


Fourier-seriens uppdelning i frekvenser kan jämföras med Bodediagrammets **frekvensgång, frequency response**

William Sandqvist william@kth.se

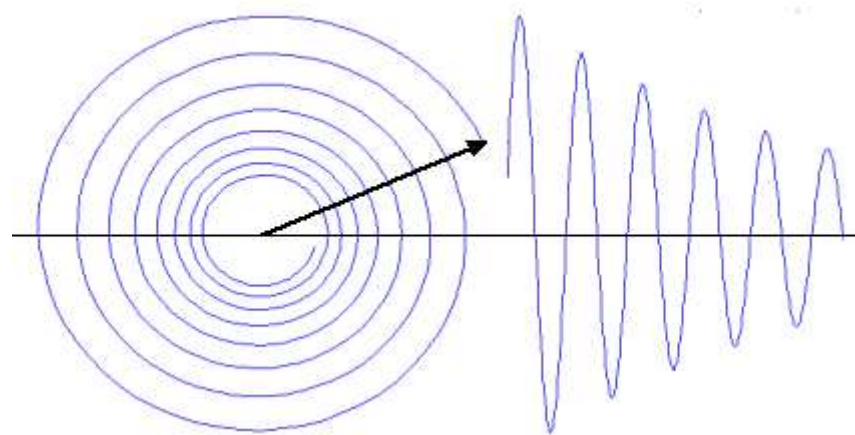
Exponentiellt dämpade sinus funktioner

Laplace-transformen



Pierre Simon Laplace

Dämpad sinus som visare i spiral



$$\begin{array}{c} e^{\sigma \cdot t} \cdot e^{j\omega \cdot t} = e^{(\sigma + j\omega)t} \quad s = \sigma + j\omega \\ \uparrow \quad \quad \uparrow \\ \text{dämpning} \quad \text{visare} \end{array}$$

Laplaceformen

$$F(s) = \{\mathcal{L}f\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$$e^{\sigma \cdot t} \cdot e^{j\omega \cdot t} = e^{(\sigma + j\omega)t} \quad s = \sigma + j\omega$$

Tidsfunktionen $f(t)$ beskrivs med dämpade frekvenskomponenter summerade till $F(s)$ i ett komplext talplan, **s-planet**.

$$s = \sigma + j\omega$$

Poler och 0-ställen

$$H(s) = \frac{(s+a)\dots(s+b)}{(s+c)\dots(s+d)}$$

0-ställen

$= 0$ $= 0$

$= 0$ $= 0$

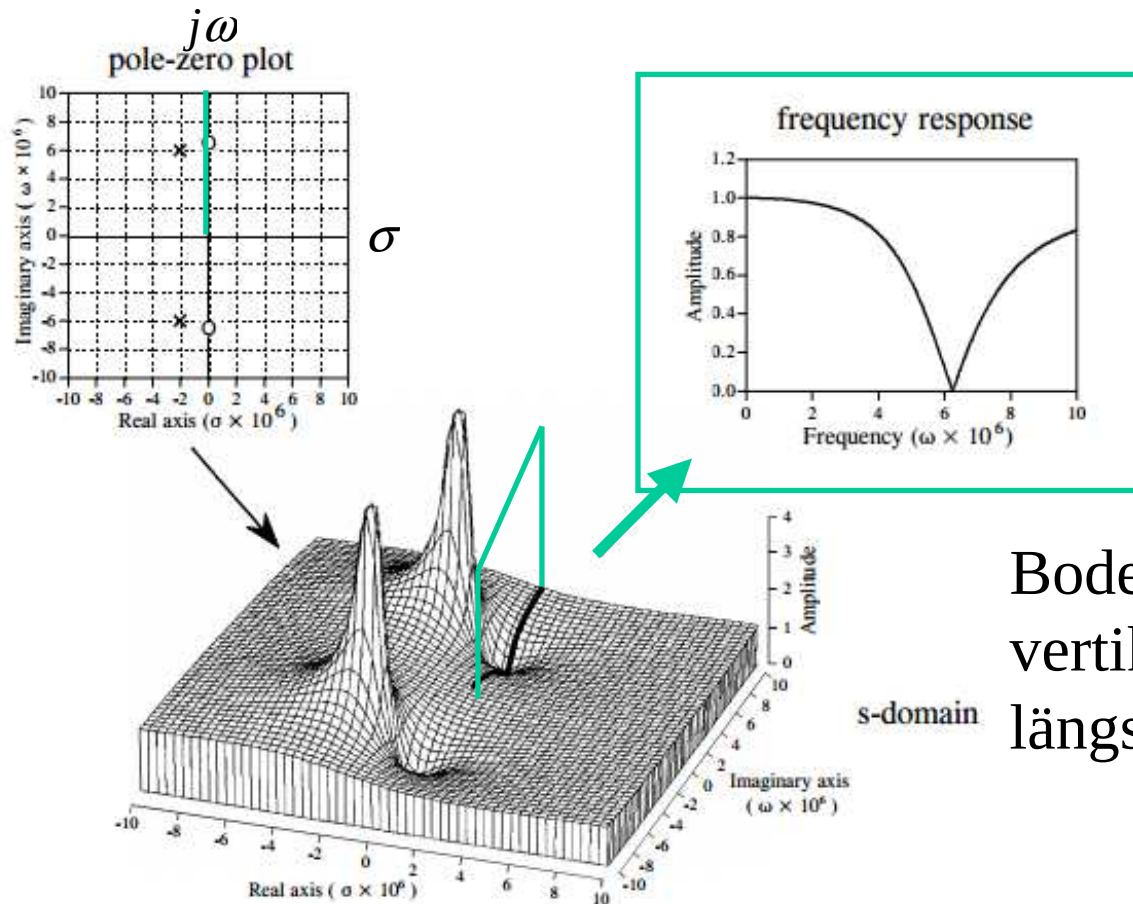
Poler (division med 0)

Poler och nollställ



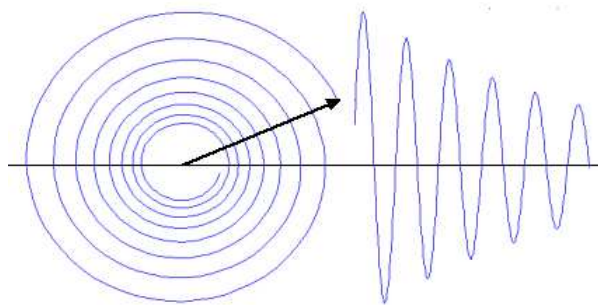
s-planet är som en gummiduk. Polerna är spikar som drar duken uppåt, nollställena är häftstift som fäster duken vid underlaget.

Poler/nollställen - Bodediagram

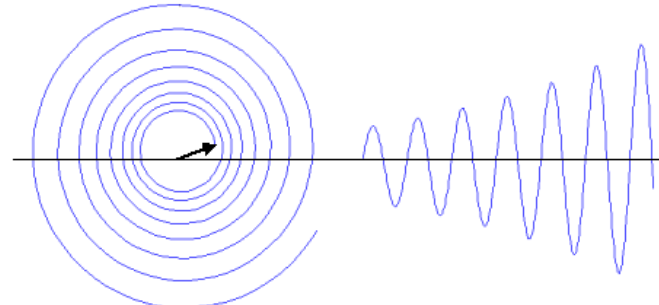


Bode-diagrammet är den vertikala tunna skivan längs positiva $j\omega$ -axeln

Dämpning – Förstärkning.



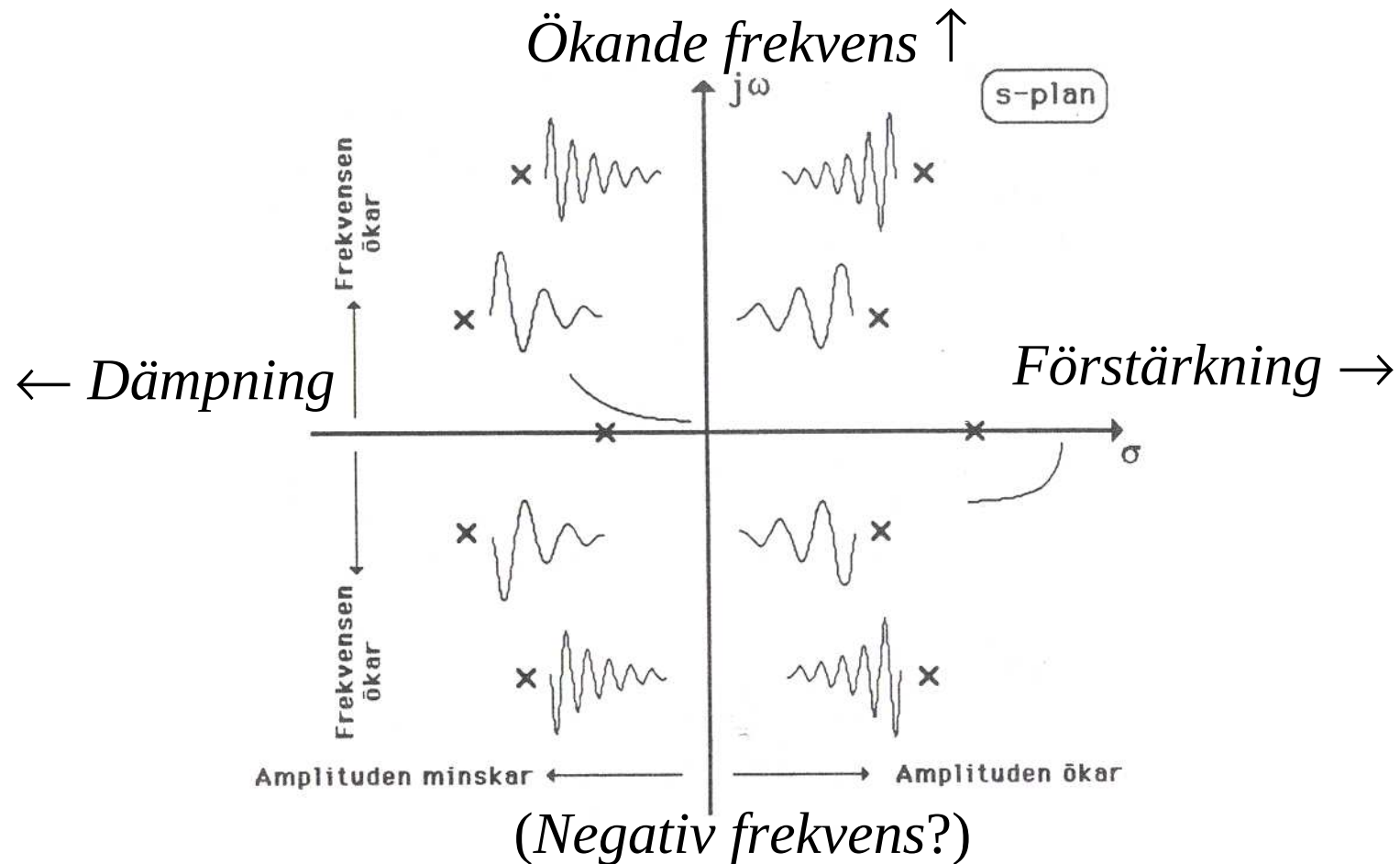
$$\sigma < 0$$



$$\sigma > 0$$

$$e^{\sigma \cdot t} \cdot e^{j\omega \cdot t} = e^{(\sigma + j\omega)t} \quad s = \sigma + j\omega$$

s-planet. $s = \sigma + j\omega$



William Sandqvist william@kth.se