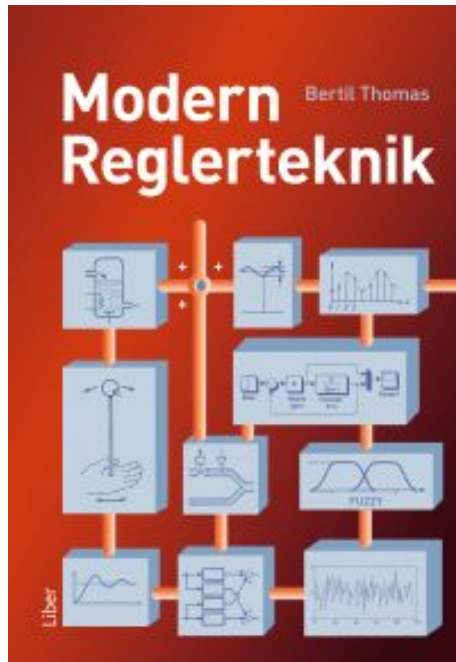


Reglerteknik 6

Kapitel 10



Köp bok och övningshäfte på kårbokhandeln

William Sandqvist william@kth.se

Föreläsning 6 kap 10

Reglersystemets egenskaper

Stabilitet är den viktigaste egenskapen. Ett ostabilt system är *oanvändbart*.

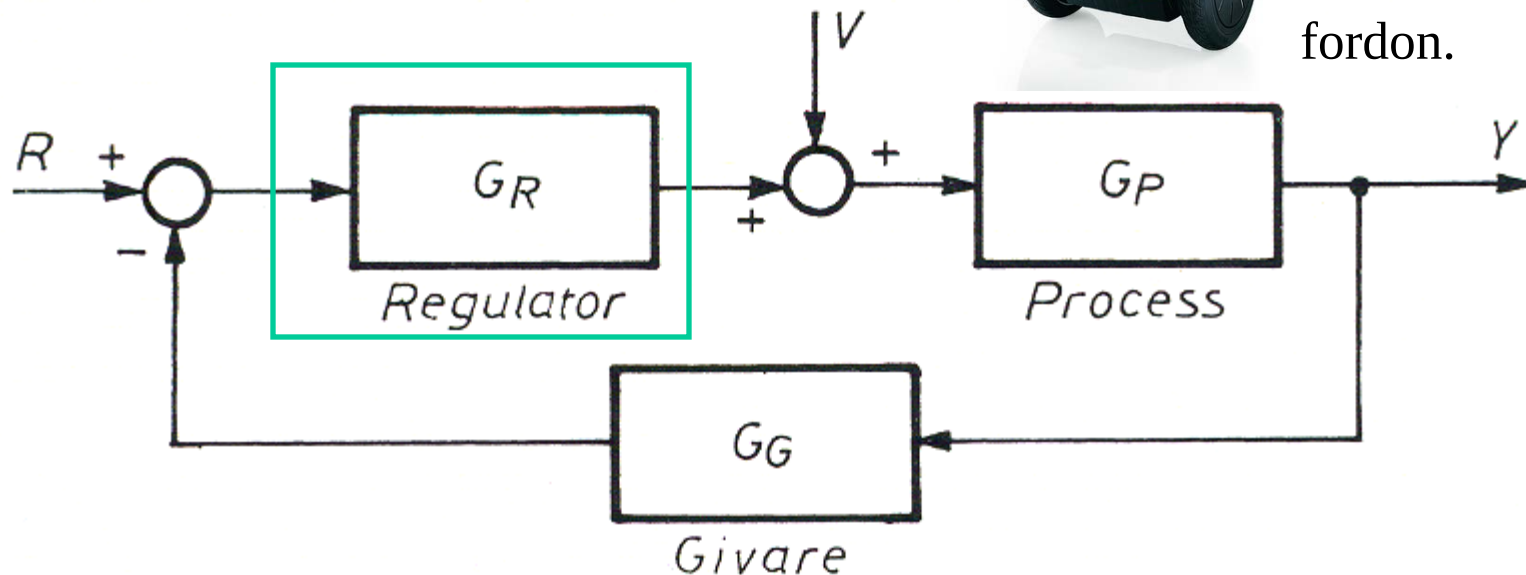


Stabilitet är viktigast

Regulatorn är den del av överföringsfunktionen man kan påverka. Med den kan man kompensera för "brister" i processens överföringsfunktion.



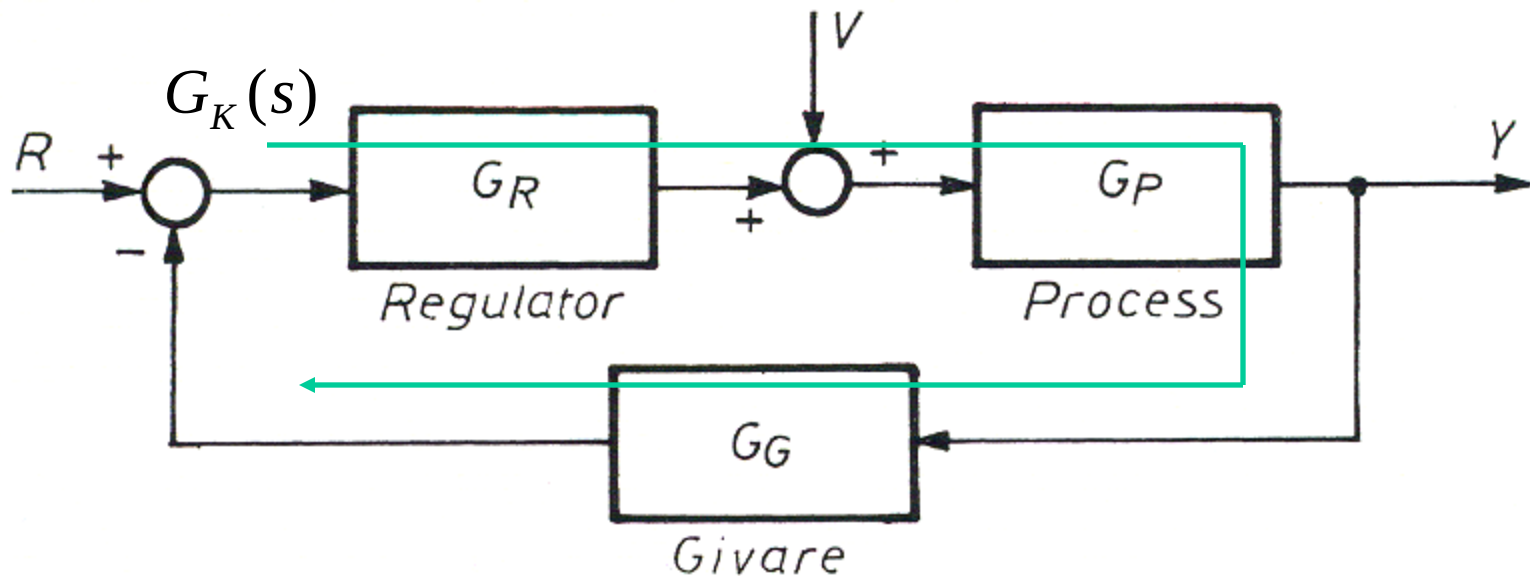
Segway är i sig instabil, det är **regulatorn** som gör den till ett användbart fordon.



Stabilitet är viktigast

Men även om processen är stabil, kan felaktiga regulatorinställningar resultera i ett ostabilt system!

Kretsöverföring: $G_K(s) = G_R(s) \cdot G_P(s) \cdot G_G(s)$



Nyquistkriteriet för stabilitet

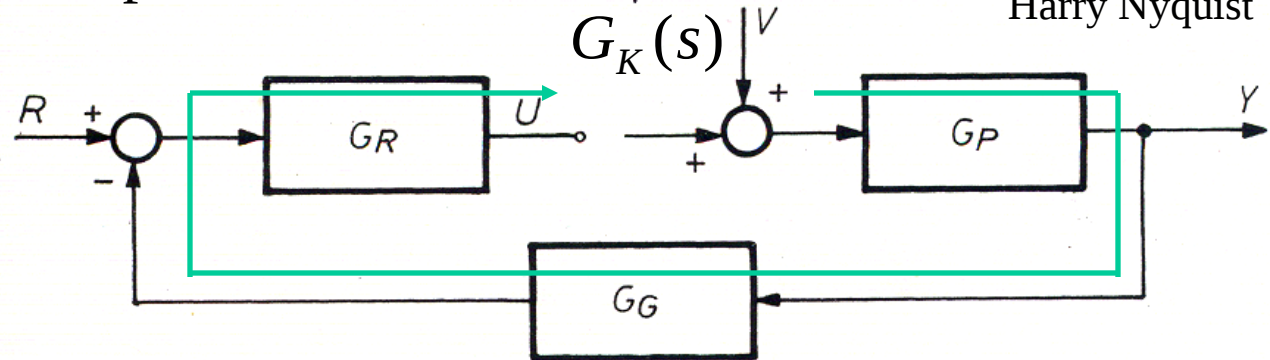
(eg. Det förenklade Nyquistkriteriet)

Man studerar det **öppna systemet** G_K .

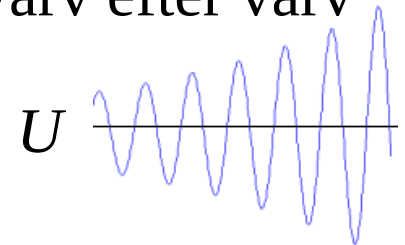
Kommer en *sinusformad* störning att växa till en "större kopia" efter ett varv?



Harry Nyquist



I så fall kommer den, i ett **slutet system**, att växa varv efter varv helt ostabilt!



Nyquistkriteriet för stabilitet

(eg. Det förenklade Nyquistkriteriet)

- Finns det något ω då insignal och utsignal till G_K är i "fas"?

$$\angle \underline{G}_K(j\omega) = \varphi_K(\omega)$$

$$\varphi_K(\omega_\pi) = -180^\circ$$

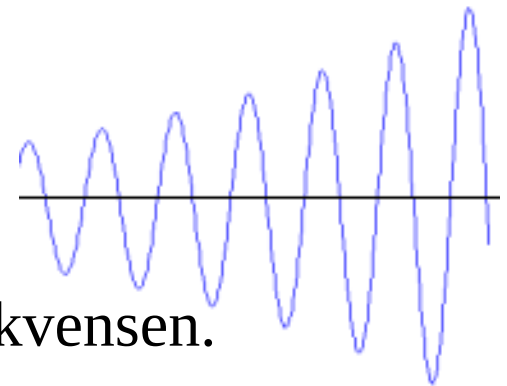
$$-180^\circ + \begin{array}{c} \text{---} \\ \uparrow \\ -180^\circ \end{array} = -360^\circ \text{ dvs. i fas} \\ (= \text{kopia})!$$

- Har amplituden *ökat* något vid den frekvensen?

$$|G_K(j\omega)| = A_K(\omega) > 1$$

i så fall blir det slutna systemet instabilt!

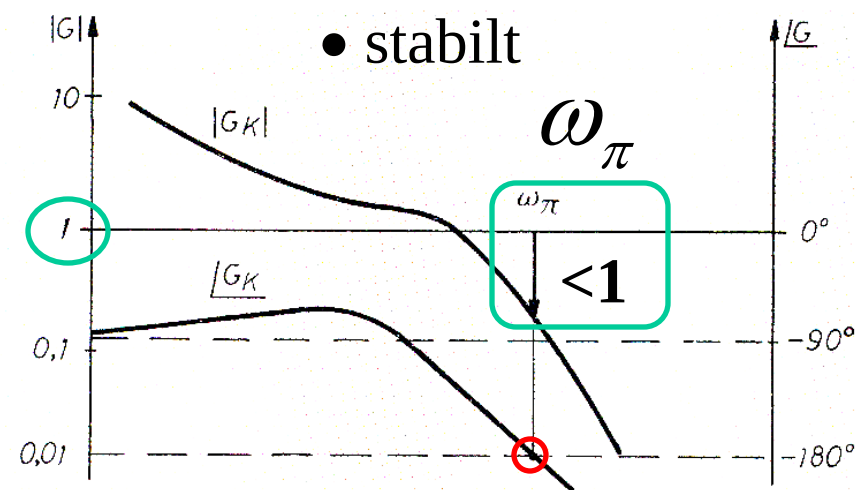
- Detta ω kallas för ω_π – egensvängningsfrekvensen.



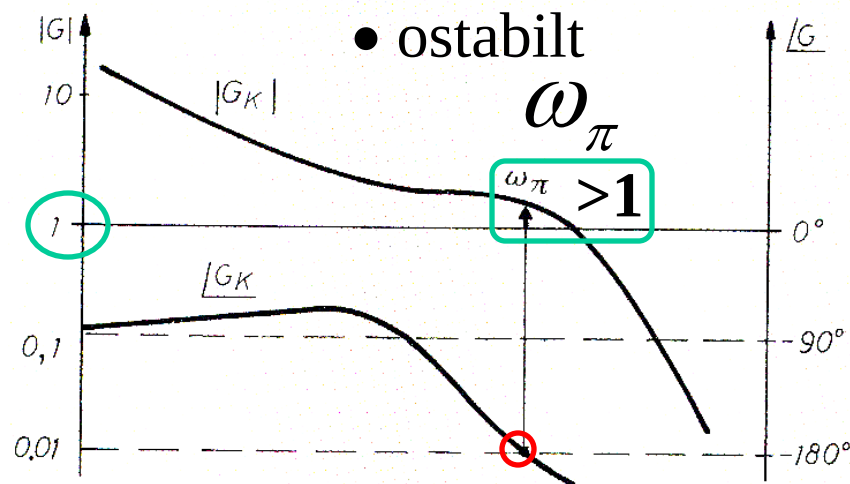
Nyquistkriteriet för stabilitet

(eg. Det förenklade Nyquistkriteriet)

$$\varphi_K(\omega_\pi) = -180^\circ \quad A_K(\omega_\pi) < 1 \quad \text{stabil}$$



Stabil system $|G_K(\omega_\pi)| < 1$



Instabil system $|G_K(\omega_\pi)| > 1$

Stabilitetsmarginaler

Hur stabilt är ett ”stabilt” system? Om systemet slits, eller utsätts för extrema temperaturer så att överföringsfunktionen blir något förändrad – kan det då bli instabilt?

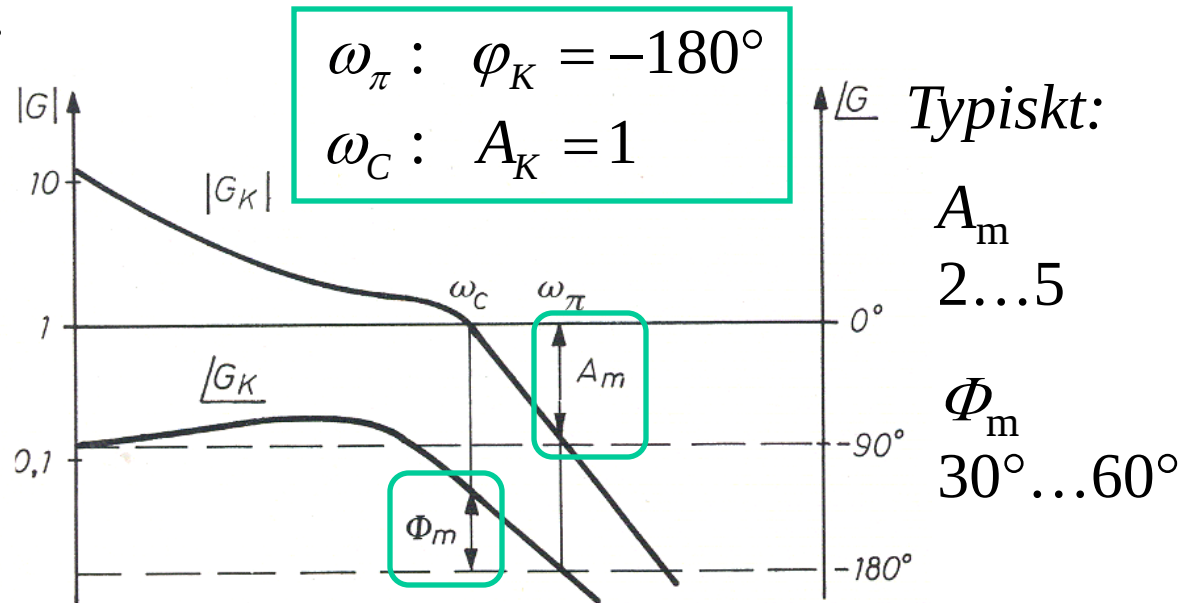
Man vill ha siffervärden på hur långt ifrån ”stabilitetsgränsen” som systemet ligger.

- Amplitudmarginal

$$A_m = \frac{1}{A_K(\omega_\pi)}$$

- Fasmarginal

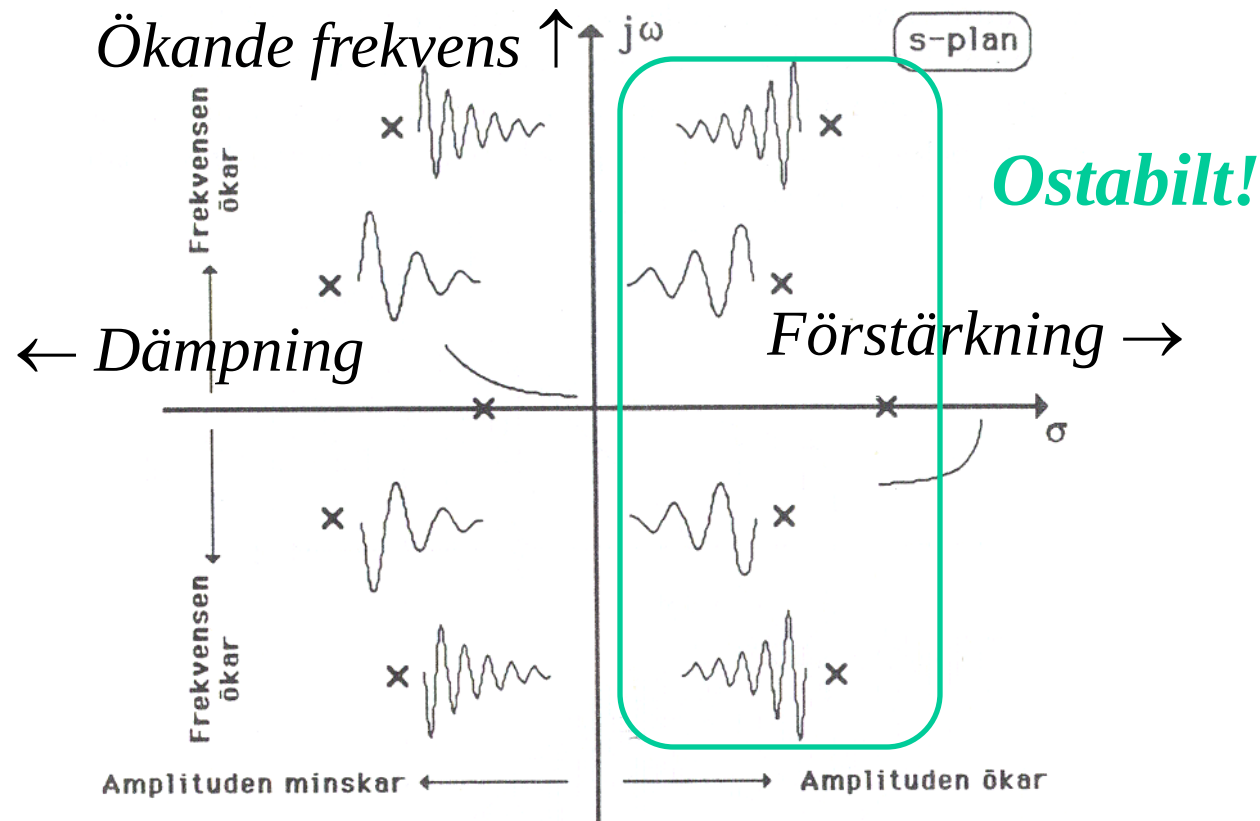
$$\Phi_m = 180^\circ + \varphi_K(\omega_C)$$



Polbestämning för stabilitet

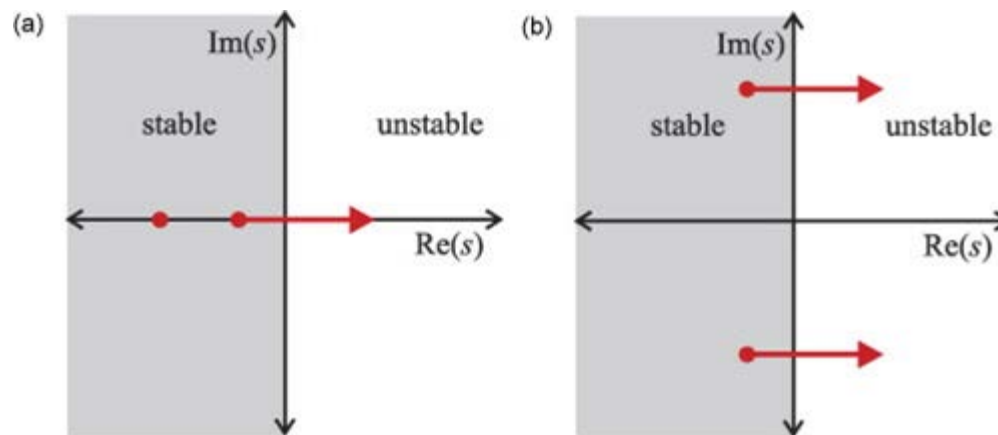
- Slutna systemets överföringsfunktion.

s-planet. $s = \sigma + j\omega$



Polbestämning för stabilitet

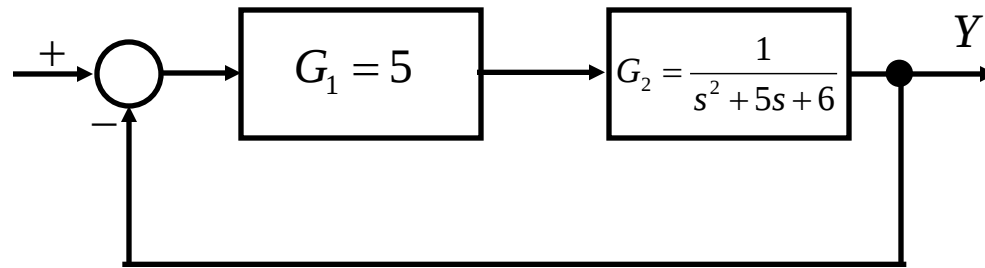
En överföringsfunktion är stabil om nämnarpolynomet *inte* har rötter som ger poler i högra halvplanet.



Gyllene regeln



Ex. stabilt?



$$G_{TOT} = \frac{G_1 \cdot G_2}{1 + G_1 \cdot G_2} = \frac{5 \cdot \frac{1}{s^2 + 5s + 6}}{1 + \frac{5}{s^2 + 5s + 6}} = \frac{5}{s^2 + 5s + 6 + 5} =$$

$$= \frac{5}{s^2 + 5s + 11}$$

Quadratic Equation
Solver

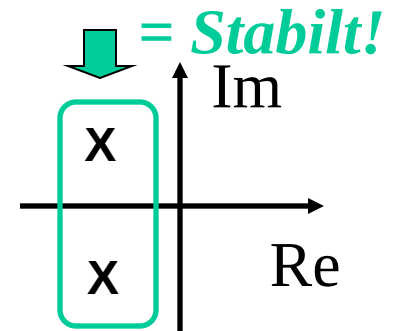


$x^2 + 5x + 11 = 0$

Roots:

$-2.5 + 2.179449472i$
 $-2.5 - 2.179449472i$

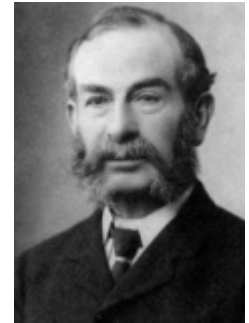
It has Complex Roots !





Routh-Hurwitz metod

Man kan ta reda på om det finns det någon rot i högra halvplanet eller ej, **utan** att man behöver lösa hela nämnarpolynomet!



Edward Routh



Adolf Hurwitz

Början på
Routh-
tabellen

$$\boxed{s^3 + 2s^2 + s + 1 + 0 + 0}$$

1	1	0
2	1	0

Routh-Hurwitz metod

$$s^3 + 2s^2 + s + 1$$

Fortsätt-
ningen på
Routh-
tabellen

1	1	0
2	1	0
0,5		

$$\frac{2 \cdot 1 - 1 \cdot 1}{2} = 0,5$$

Routh-Hurwitz metod

$$s^3 + 2s^2 + s + 1$$

Fortsätt-
ningen på
Routh-
tabellen

1	1	0
2	1	0
0,5	0	0

$$\frac{2 \cdot 0 - 1 \cdot 0}{2} = 0$$

Routh-Hurwitz metod

$$s^3 + 2s^2 + s + 1$$

Fortsätt-
ningen på
Routh-
tabellen

1	1	0
2	1	0
0,5	0	0
1		

$$\frac{0,5 \cdot 1 - 2 \cdot 0}{0,5} = 1$$

Routh-Hurwitz metod

$$s^3 + 2s^2 + s + 1$$

Fortsätt-
ningen på
Routh-
tabellen

1	1	0
2	1	0
0,5	0	0
1	0	0

$$\frac{0,5 \cdot 0 - 2 \cdot 0}{0,5} = 0$$

Routh-Hurwitz metod

$$s^3 + 2s^2 + s + 1$$

Routh-
tabellen är nu
klar.
3+1 rader för
gradtal 3.

1	1	0
2	1	0
0,5	0	0
1	0	0



Alla i första kolumnen har positivt tecken $\Rightarrow$ Stabilt!

Routh-Hurwitz metod

Ett annat nämnarpolynom:

$$s^3 + 2s^2 + s + 9$$

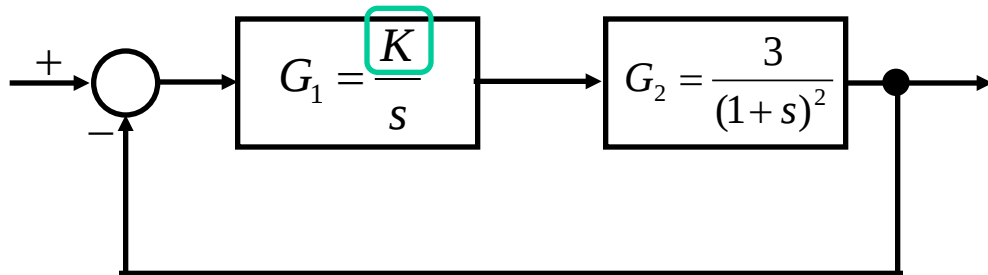
1	1	0	
2	9	0	$\frac{2 \cdot 1 - 1 \cdot 9}{2} = -3,5$
-3,5	0		
	0		<i>Nu kan man sluta att räkna.</i>

Minst en i första kolumnen är negativ $\Rightarrow$ ostabilt!

Routh-Hurwitz metod

Routh's metod kan enkelt ge **algebraiska villkor** för stabilitet.

– Hur stor förstärkning K kan integratorn maximalt ha?



$$G_{TOT} = \frac{G_1 \cdot G_2}{1 + G_1 \cdot G_2}$$

$$G_{TOT} = \frac{\frac{K}{s} \cdot \frac{3}{(1+s)^2}}{1 + \frac{K}{s} \cdot \frac{3}{(1+s)^2}} = \frac{3K}{s(1+s)^2 + 3K} = \frac{3K}{s^3 + 2s^2 + s + 3K}$$

Routh-Hurwitz metod

$$s^3 + 2s^2 + s + 3K$$

1	1	0		Vilkor för stabilitet:
2	3K	0		
$\frac{2-3K}{2}$	0	0	$\Rightarrow$	$2-3K > 0$
3K	0	0	$\Rightarrow$	$3K > 0$

Man får tydligen *inte* vrida upp
integratorns förstärkning
 K över 0,66 !

$$\Rightarrow 0 < K < \frac{2}{3}$$

10.1 Stabilitet

Vilka processer är stabila?

a) $\ddot{y} + \dot{y} - 6y = \dot{x} + x$

b) $2\ddot{y} + 6\dot{y} - 8y = 3\dot{x}$

c) $\ddot{y} + 10\dot{y} + 21y = \dot{x} + 4x$

d) $y''' + 3y'' - 2y' + y = u' + 5u$

e) $y''' + 7y'' + y' + 4y = u'' + 3u$

f) $y''' + 3y'' + y' + 6y = u' + 7u$

g) $\frac{s+2}{s^2-s-6}$

h) $\frac{s^2+3s+2}{s+4}$

e) 10.1 e lösning, Stabilitet

$$y''' + 7y'' + y' + 4y = u'' + 3u \quad \{L:\}$$

$$Ys^3 + 7Ys^2 + Ys + 4Y = Us^2 + 3U \quad \frac{Y}{U} = \frac{s^2 + 3s}{s^3 + 7s^2 + s + 4}$$

Routh

$$\begin{array}{ccc}
 s^3 & + & 7s^2 & + & s & + & 4 \\
 \downarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\
 \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ 7 \\ \frac{3}{7} \\ 4 \end{array}} & \begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}
 \end{array}$$

$\frac{7 \cdot 1 - 1 \cdot 4}{7} = \frac{3}{7}$

Inga teckenbyten, stabilt

MATLAB

```

» pole(tf([1,3,0],[1,7,1,4]))
ans =
    -6.9390
    -0.0305+ 0.7586i
    -0.0305- 0.7586i

```

poler i vhp, stabilt

f)

10.1 f lösning, Stabilitet

$$y''' + 3y'' + y' + 6y = u' + 7u \quad \{L:\}$$

$$Ys^3 + 3Ys^2 + Ys + 6Y = Us + 7U \quad \frac{Y}{U} = \frac{s+7}{s^3 + 3s^2 + s + 6}$$

Routh

$$\begin{array}{ccc|c} s^3 & + & 3s^2 & + & s & + & 6 \\ \hline 1 & 1 & 0 & & & & \\ 3 & 6 & 0 & & & & \\ -1 & 0 & 0 & & & & \\ 6 & & & & & & \end{array} \quad \frac{3 \cdot 1 - 1 \cdot 6}{3} = -1$$

teckenbyte, ostabilt

MATLAB

```
» pole(tf([1, 7], [1, 3, 1, 6]))  
ans =  
    -3.2583  
    0.1291+ 1.3509i  
    0.1291- 1.3509i
```

poler i hhp, ostabilt

10.1 g lösning, Stabilitet

$(g) \quad \frac{s+2}{s^2-s-6} \quad s = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$

↑
poler i vhp, ostabilt

MATLAB

```
» pole(tf([1,2],[1,-1,-6]))
```

```
ans =
```

```
    3  
   -2
```

← pol i hhp, ostabilt

10.1 h lösning, Stabilitet

$$h) \frac{s^2 + 3s + 2}{s + 4} \quad s = -4 \text{ pol i hhp, stabilt}$$

MATLAB

```
» pole(tf([1,3,2],[1,4]))
```

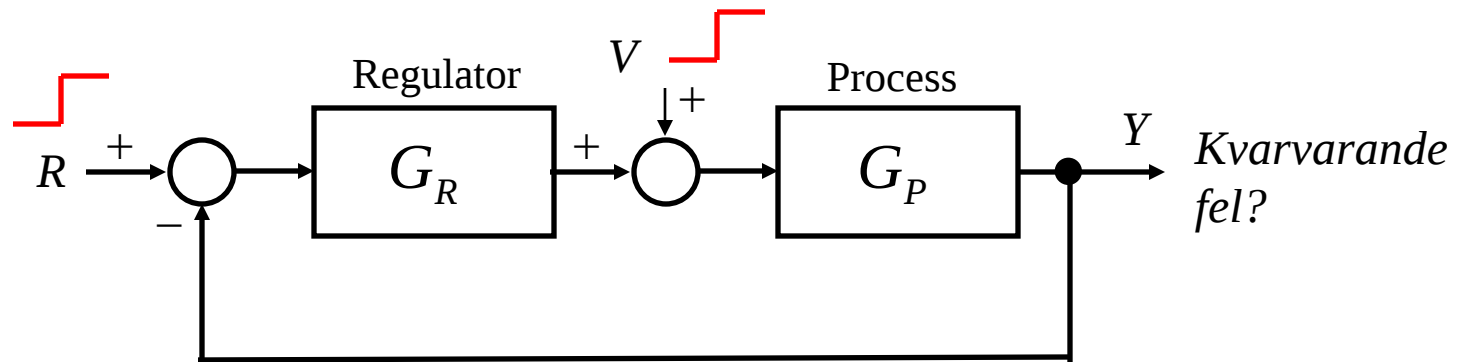
```
ans =
```

```
-4 ← pol i vhp, stabilt
```


Statisk noggrannhet

– När systemet väl är stabilt försöker man också att uppfylla ytterligare **prestandakrav**.

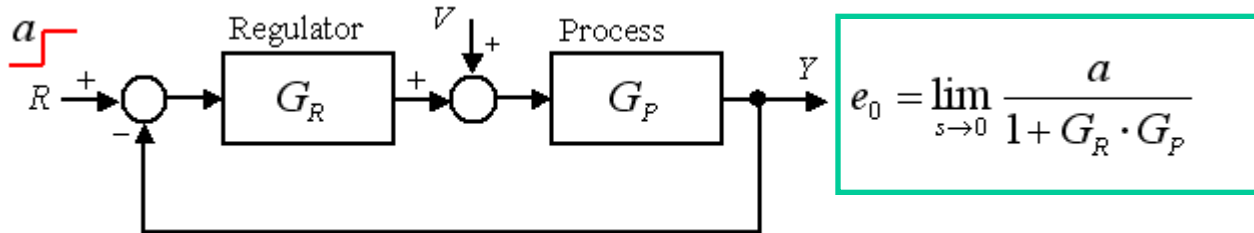
- **Statisk noggrannhet** – litet *kvarvarande fel*.



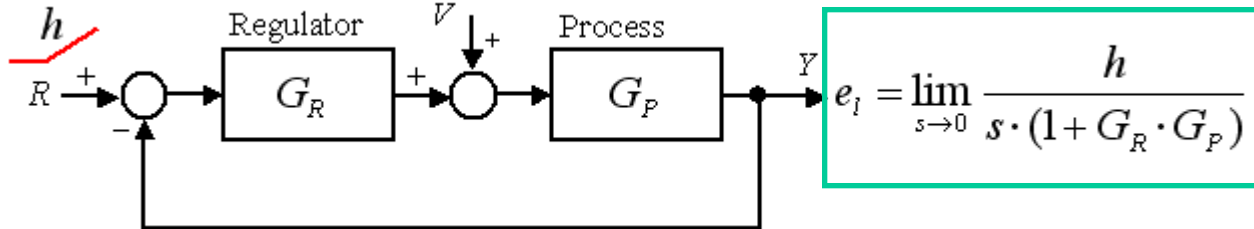
- Börvärdesändringar
- Processtörningar

Statisk noggrannhet e_0 e_1 e_v

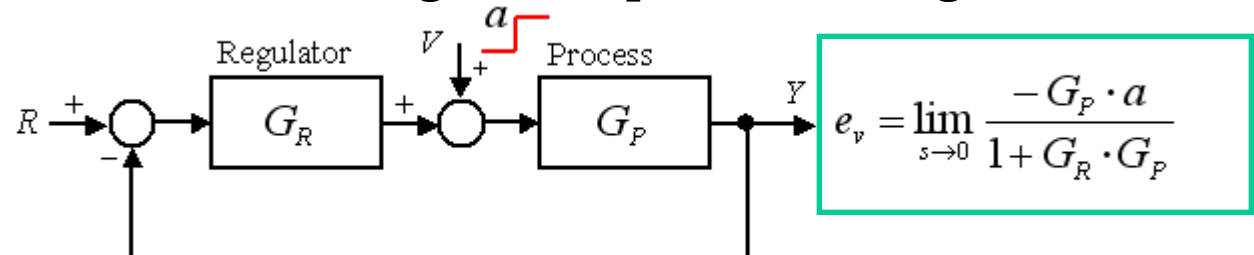
- Gränsvärde vid **stegformad börvärdesändring**:



- Gränsvärde vid **rampformad börvärdesändring**:

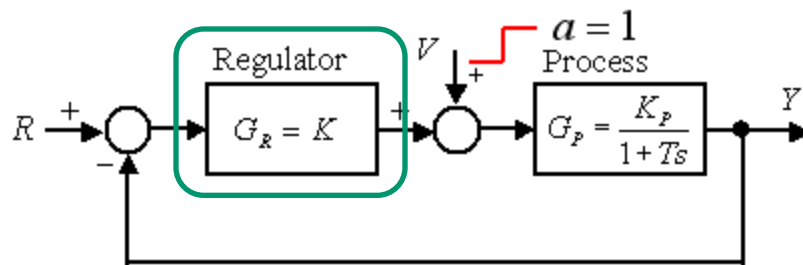


- Gränsvärde vid **stegformad processtörning**:



Ex. utan/med Integrerande regulator

- **Processtörning.** Proportionell regulator K



$$e_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-G_P \cdot a}{1 + G_R \cdot G_P}$$

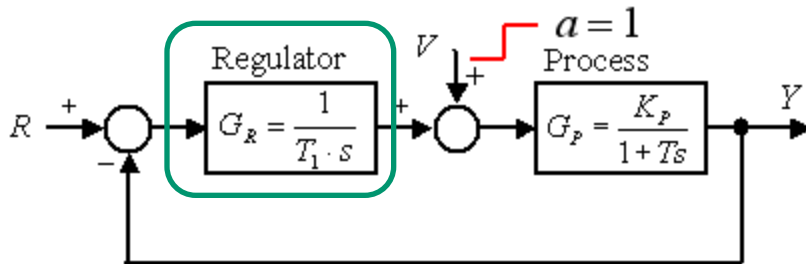
$$e_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-\frac{K_P}{1+Ts} \cdot 1}{1 + K \cdot \frac{K_P}{1+Ts}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-K_P}{1 + Ts + KK_P} = \frac{-K_P}{1 + \boxed{K} K_P}$$

↑

Litet kvarvarande fel e_v kräver **hög regulatorförstärkning K**
 – Risk för stabilitetsproblem.

Ex. utan/**med** Integrerande regulator

- **Processtörning.** Integrerande regulator $1/T_1 s$



$$e_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-G_P \cdot a}{1 + G_R \cdot G_P}$$

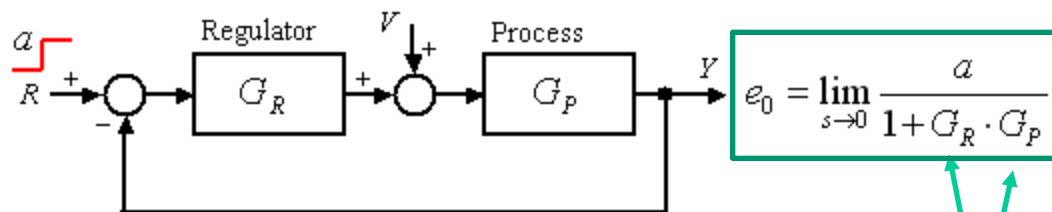
$$e_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-\frac{K_P}{1+Ts} \cdot 1}{1 + \frac{1}{T_1 \cdot s} \cdot \frac{K_P}{1+Ts}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-K_P T_1 s}{T_1 s(1+Ts) + K_P} = -\frac{0}{K_P} = 0$$

- Inget kvarvarande fel!

*För att eliminera kvarstående fel efter en stegformad processstörning krävs en **integrerande** regulator.*

Fel vid börvärdesändring

- **Börvärdesändring.** Stegformad börvärdesändring.

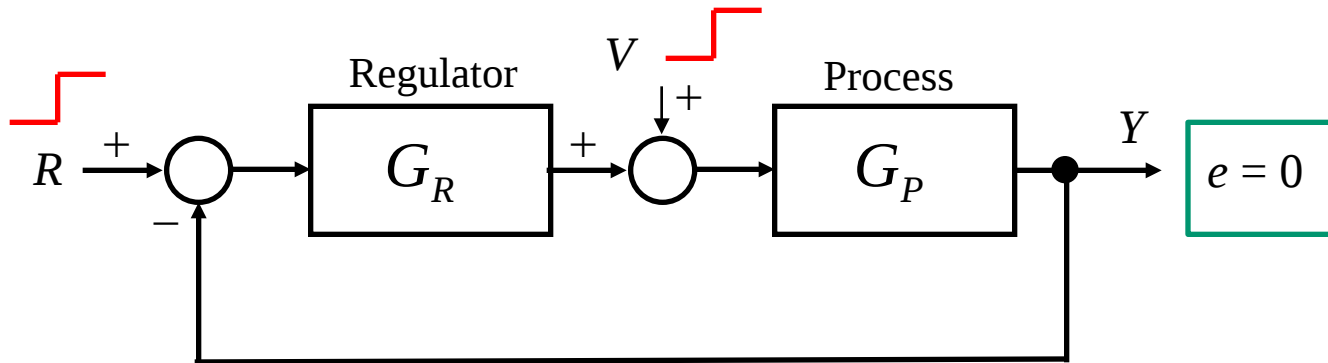


Här har det ingen betydelse var integreringen är placerad.

För att eliminera kvarstående fel efter en stegformad börvärdesändring krävs att **antingen** regulatoren **eller** processen är **integrerande**.

$$e_0 = 0 \quad \text{om } G_R \text{ eller } G_P \text{ integrerande}$$

Sammanfattning e_0 e_V



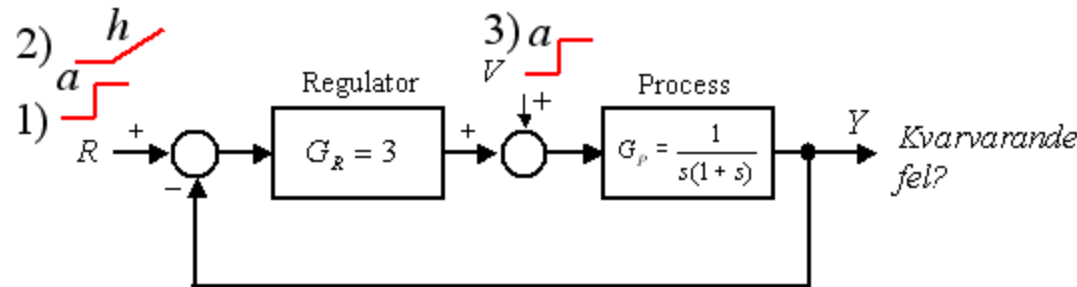
För att eliminera en steg-börvärdesändring R krävs:

- G_R eller G_P är integrerande

För att eliminera en steg-störning V krävs:

- G_R är integrerande

Ex. Steg, ramp börvärde/störning



$$G_P = \frac{1}{s(1+s)}$$

↑
integrering

Börvärde:

$$e_l = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{h}{s \cdot (1 + G_R \cdot G_P)}$$

1) $G_P \propto \frac{1}{s} \Rightarrow \text{integrering} \quad e_0 = 0$

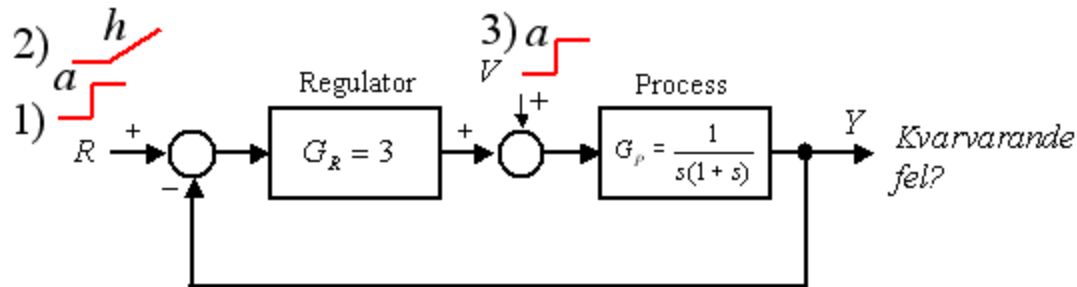
2) ramp $e_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{h}{s \left(1 + \frac{3}{s(1+s)} \right)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{h}{\frac{s(1+s)+3}{1+s}} = \frac{h}{3}$

Störning:

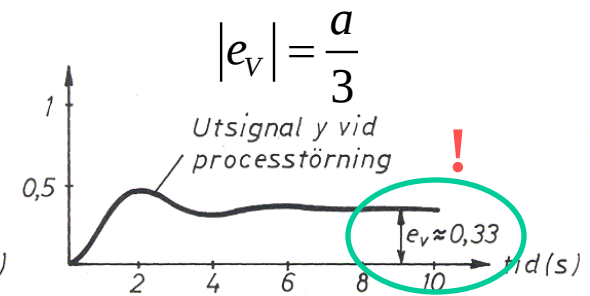
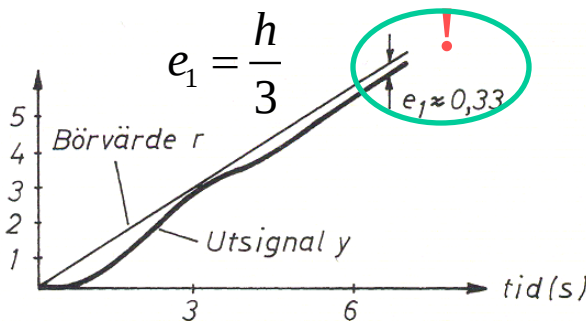
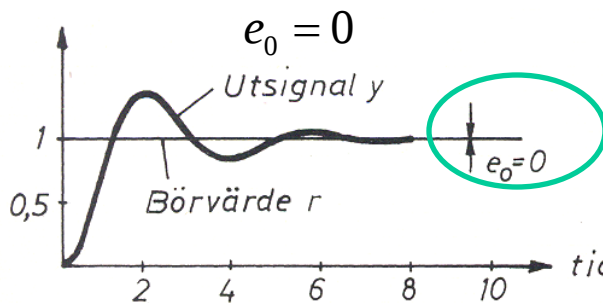
$$e_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-G_P \cdot a}{1 + G_R \cdot G_P}$$

3) steg $e_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-\frac{3a}{s(1+s)}}{1 + \frac{3}{s(1+s)}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-a}{s(1+s)+3a} = -\frac{a}{3}$

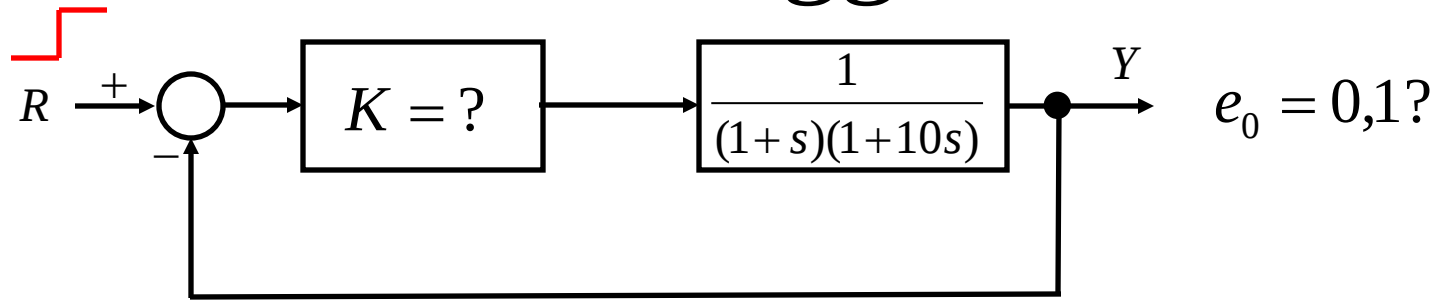
Ex. steg, ramp börvärde/störning



$$1) \quad e_0 = 0 \quad 2) \quad e_1 = \frac{h}{3} \quad 3) \quad e_V = -\frac{a}{3}$$

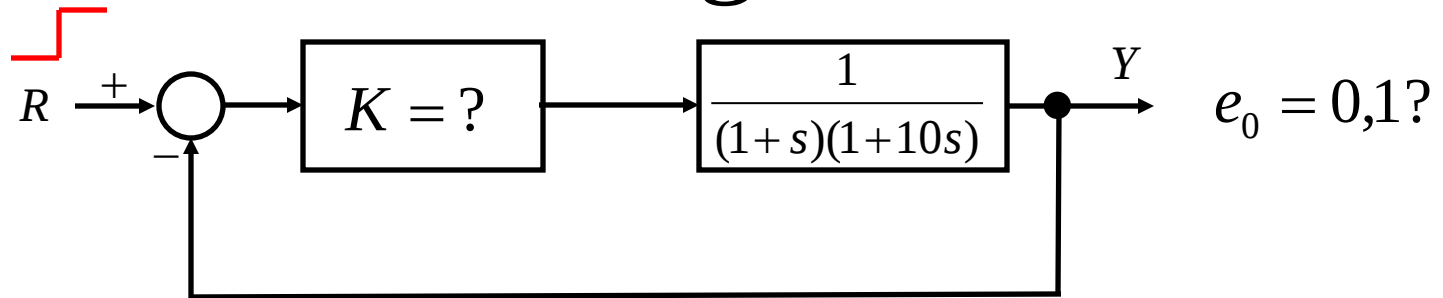


10.14 Statisk noggrannhet



Ställ in regulatorns förstärkning K så att $e_0 = 0,1$.

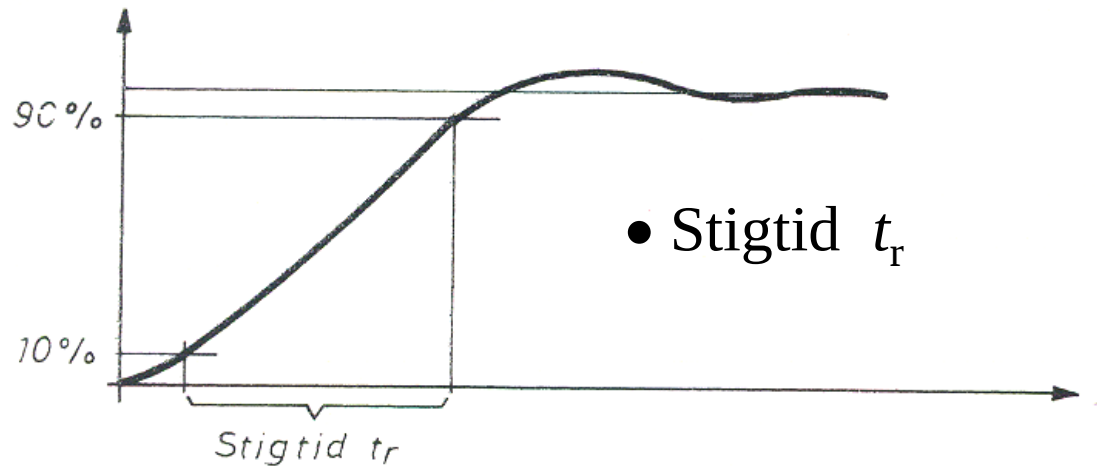
10.14 lösning 10% fel



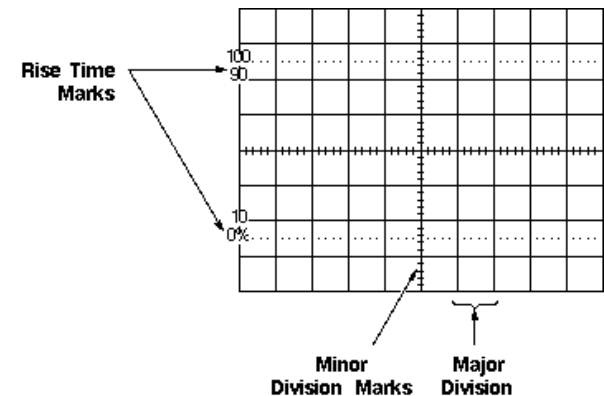
$$e_0 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G_R \cdot G_P} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + K \cdot \frac{1}{(1+s)(1+10s)}} = \frac{1}{1 + \frac{K}{1}} = \frac{1}{K+1}$$

$$\frac{1}{K+1} < 0,1 \Rightarrow 1 < 0,1 + 0,1K \Rightarrow 0,1K > 0,9 \Rightarrow K > 9$$

Snabbhet



Stigtidsmarkeringar
på oscilloskopskärm



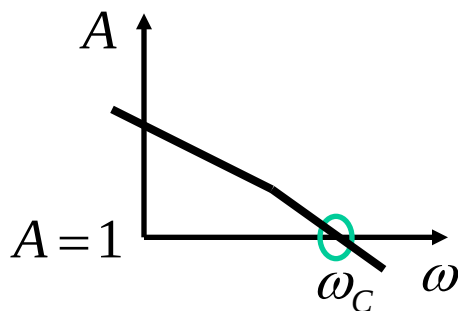
Stigtiden kan *enkel*t mätas med oscilloskop, de har ofta någon "inbyggd mätfunktion" för detta.

För överföringsfunktioner som har höga gradtal är det dock besvärligt att beräkna vilket exakt värde stigtiden bör ha. Därför använder man **tumregler** när man värderar stigtidsmätningar.

Snabbhet, tumregel

Kretsöverföringen, den öppna överföringsfunktionen, har överkorsningsfrekvensen ω_C i Bodediagrammet.
(Skärningen med $A(\omega) = 1$)

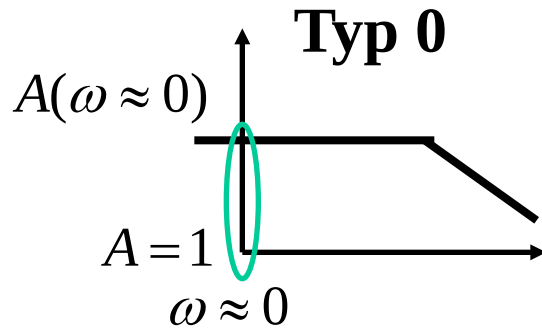
För ofta förekommande, ”normala”, överföringsfunktioner använder man följande *aproximativa tumregel*:



$$t_r \approx \frac{1,4}{\omega_C}$$

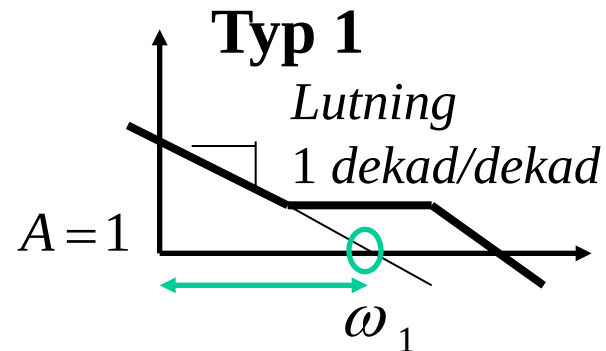
Avläsning av felen e_0 e_1 ur Bodediagrammet

Ur kretsöverföringen (öppna systemet)



$$\text{[Red step symbol]} \Rightarrow e_0 = \frac{1}{1 + A(\omega \approx 0)}$$

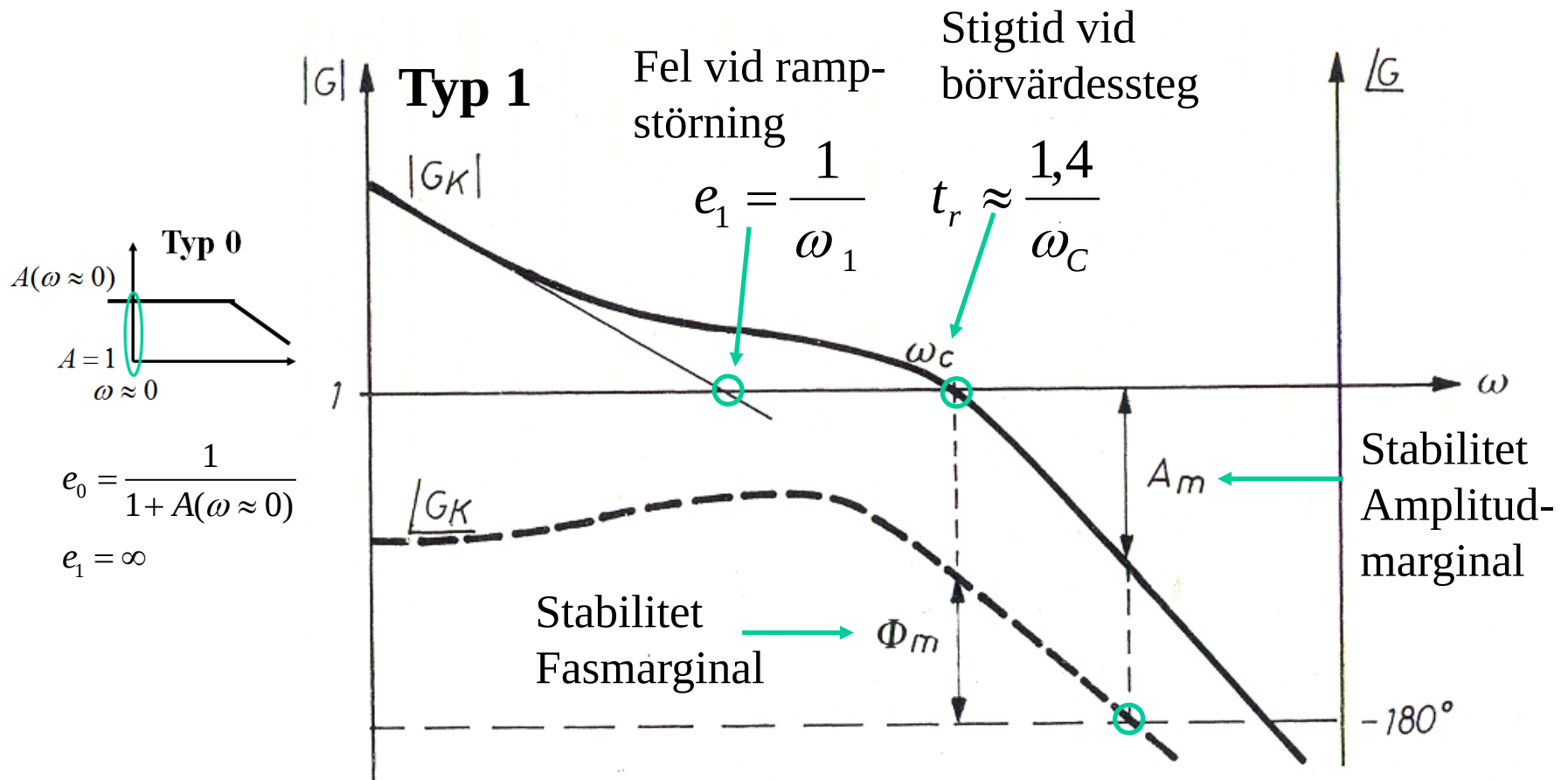
$$\text{[Red ramp symbol]} \Rightarrow e_1 = \infty$$



$$\text{[Red step symbol]} \Rightarrow e_0 = 0$$

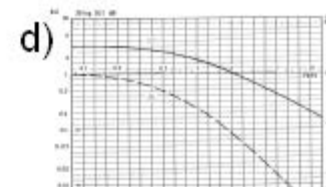
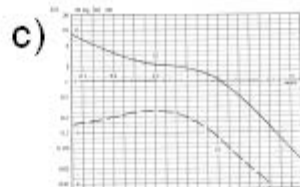
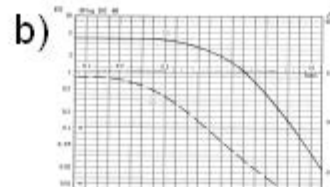
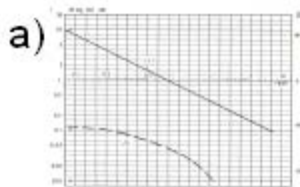
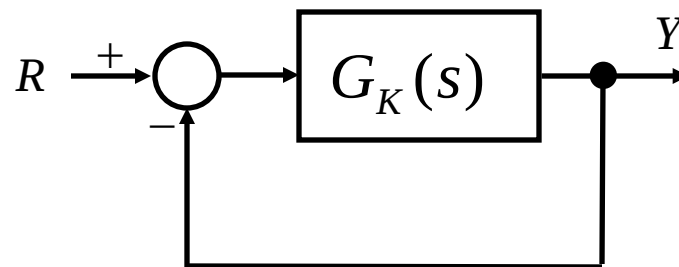
$$\text{[Red ramp symbol]} \Rightarrow e_1 = \frac{1}{\omega_1}$$

Sammanfattning av Bodediagrammet

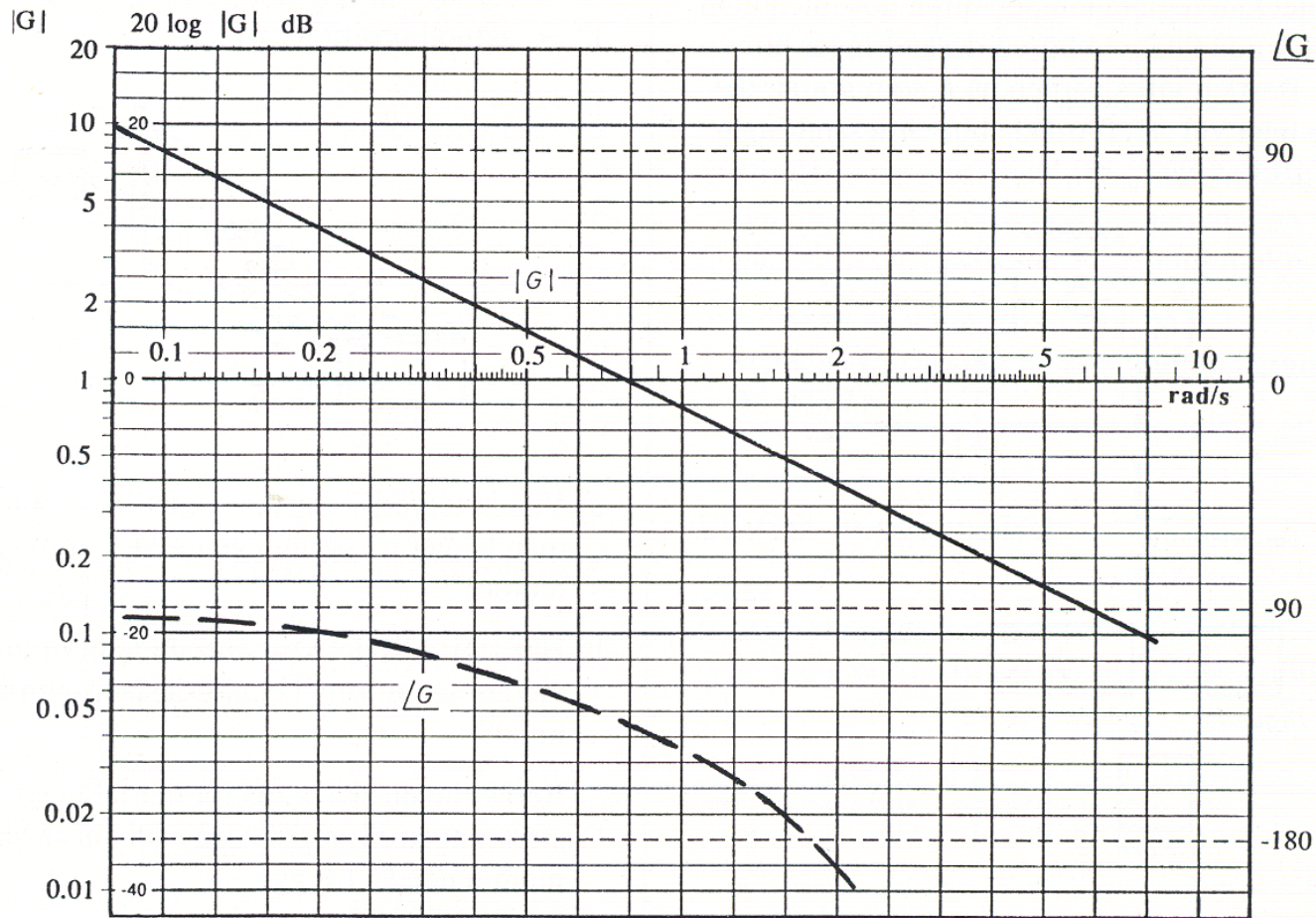


10.17 Bodediagram

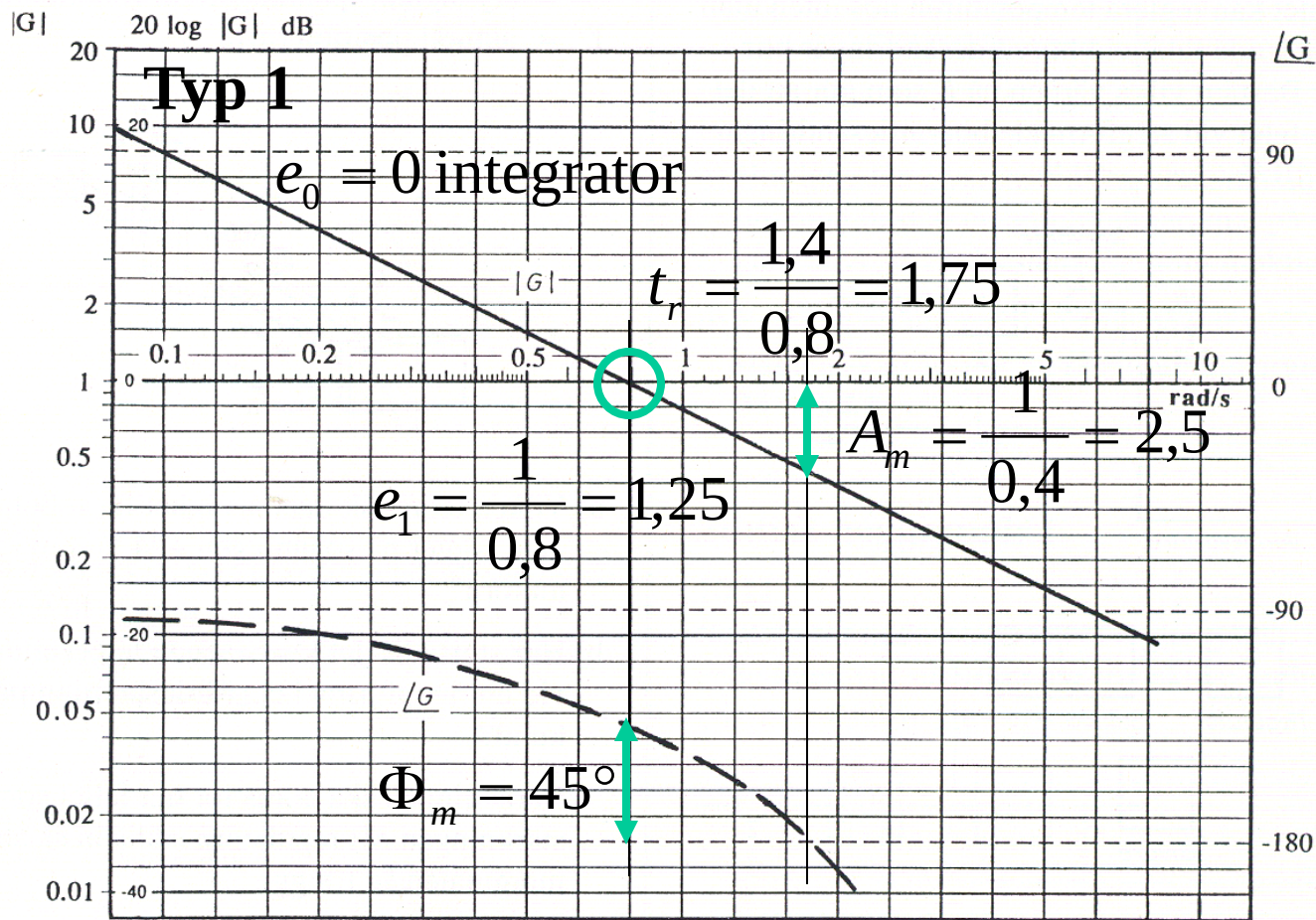
$$A_m = ? \quad \Phi_m = ? \quad t_r = ? \quad e_0 = ? \quad e_1 = ?$$



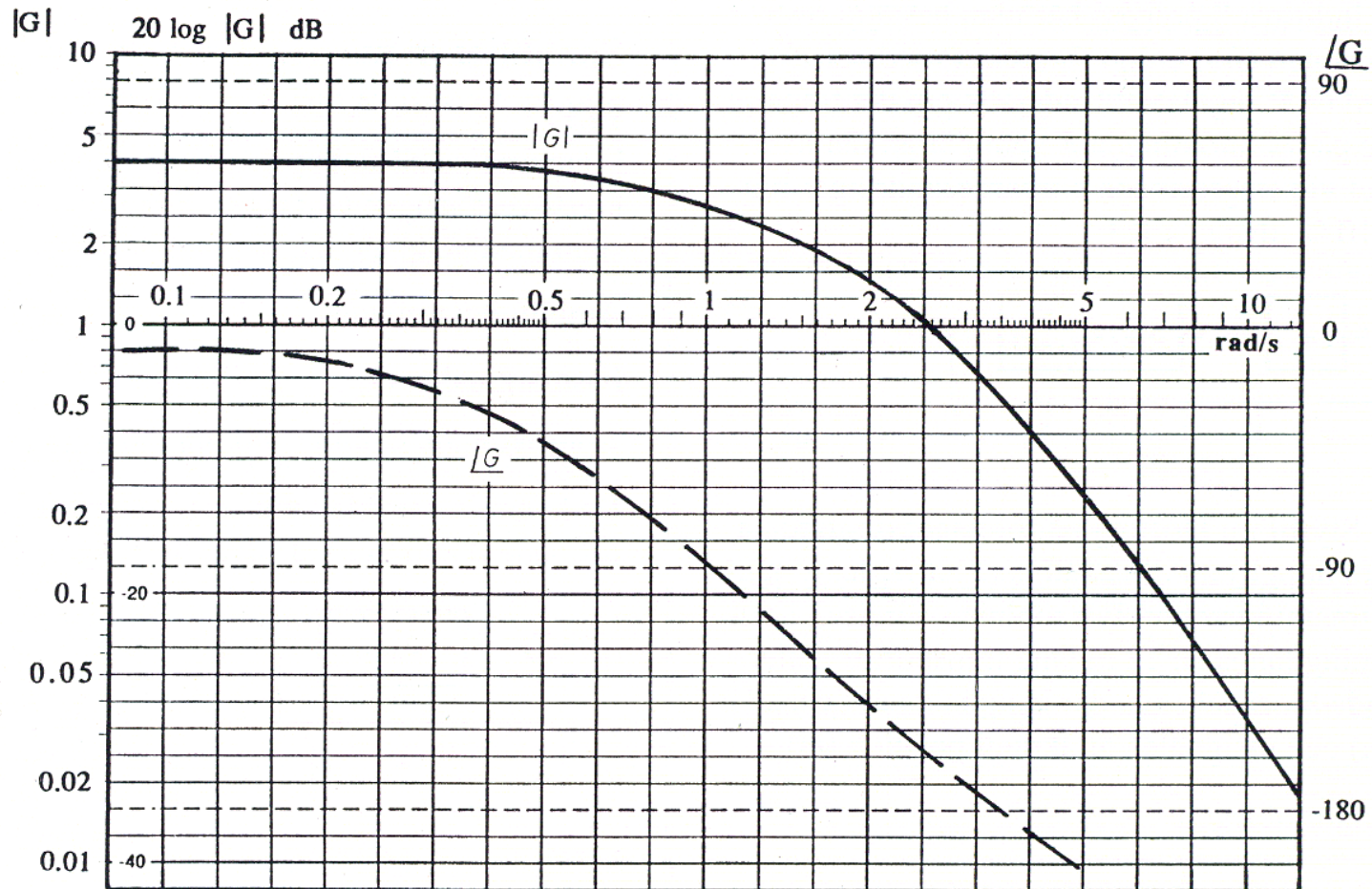
10.17 a Bodediagram



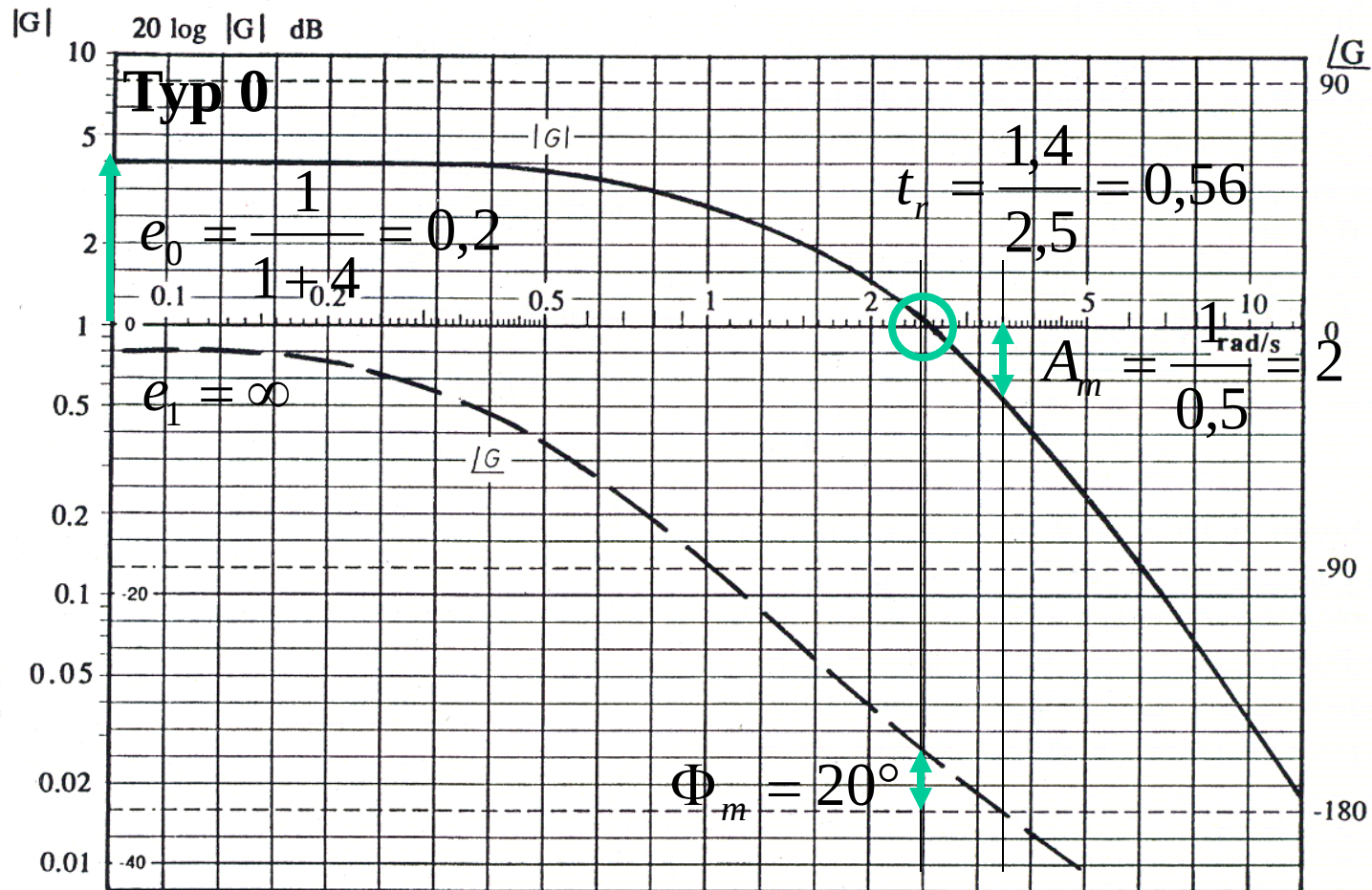
10.17 a lösning Bodediagram



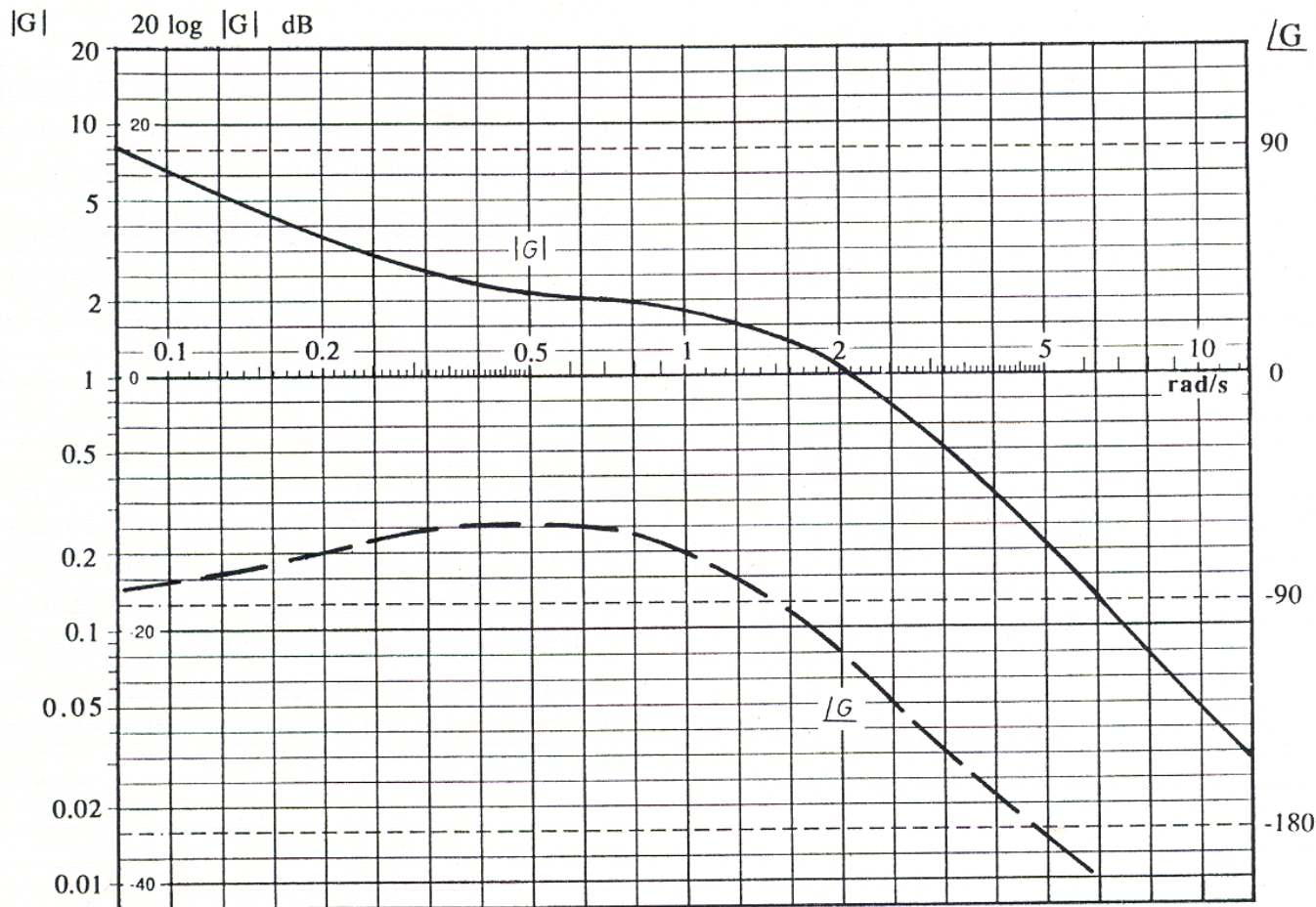
10.17 b Bodediagram



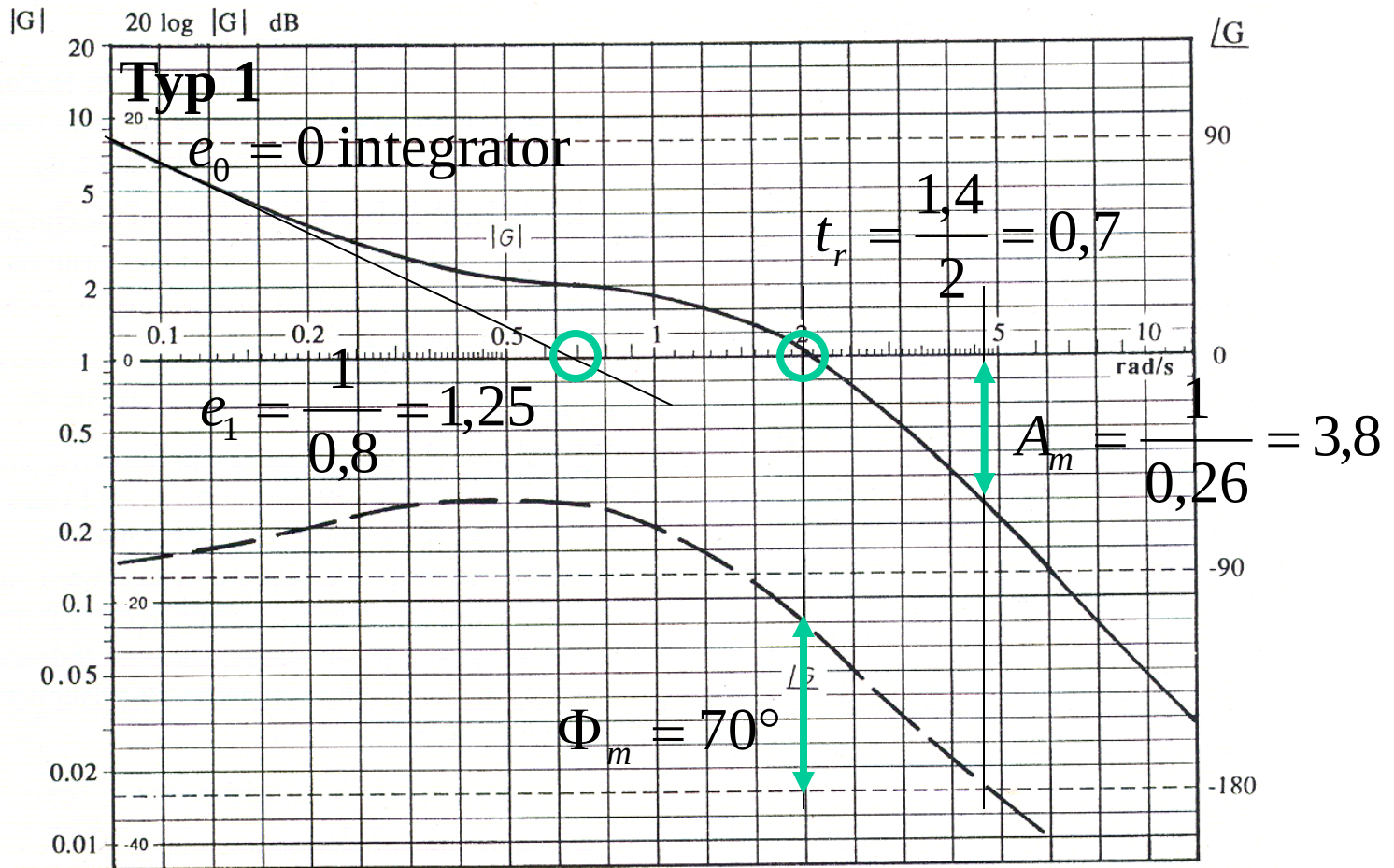
10.17 b lösning Bodediagram



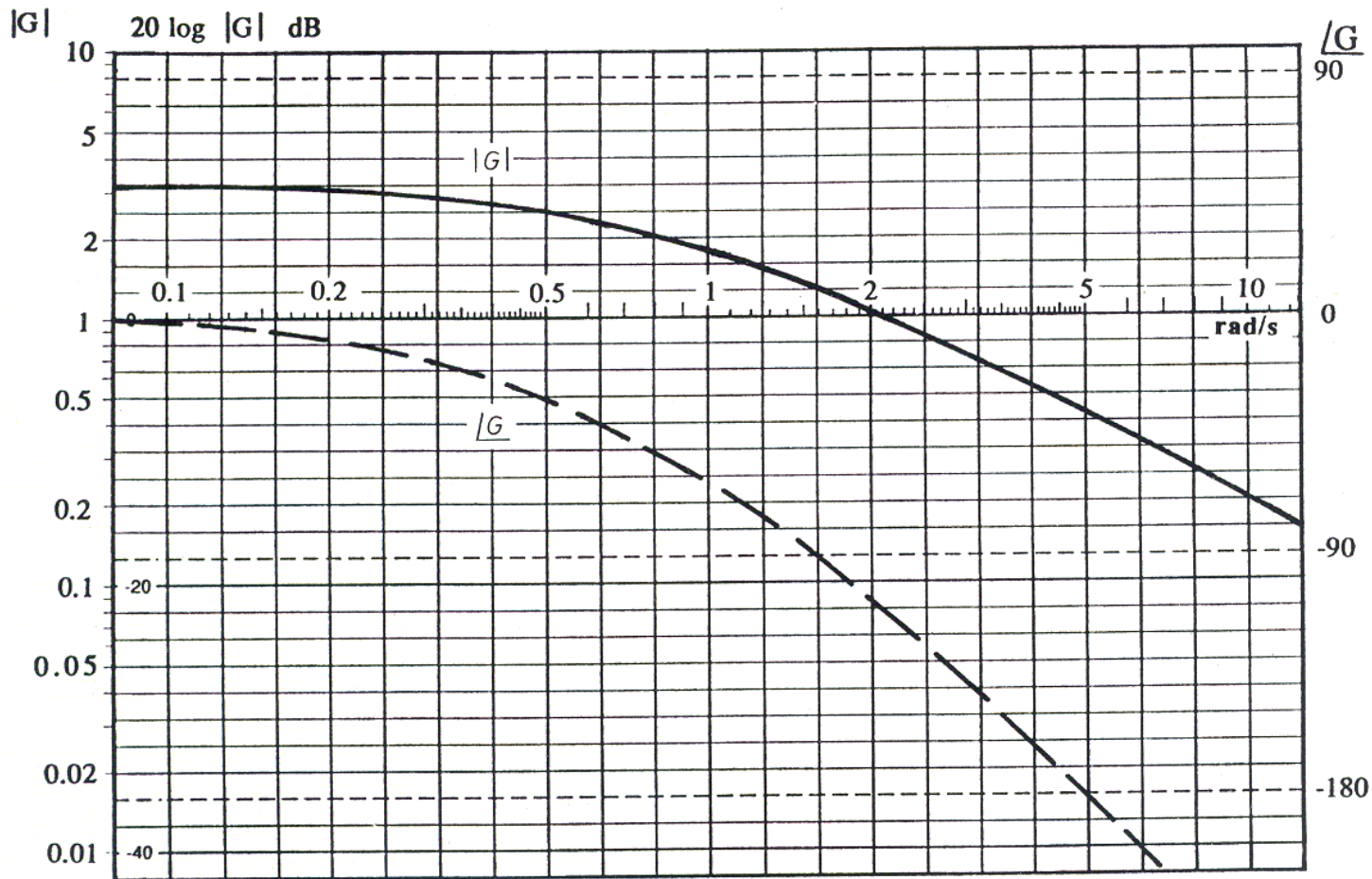
10.17 c Bodediagram



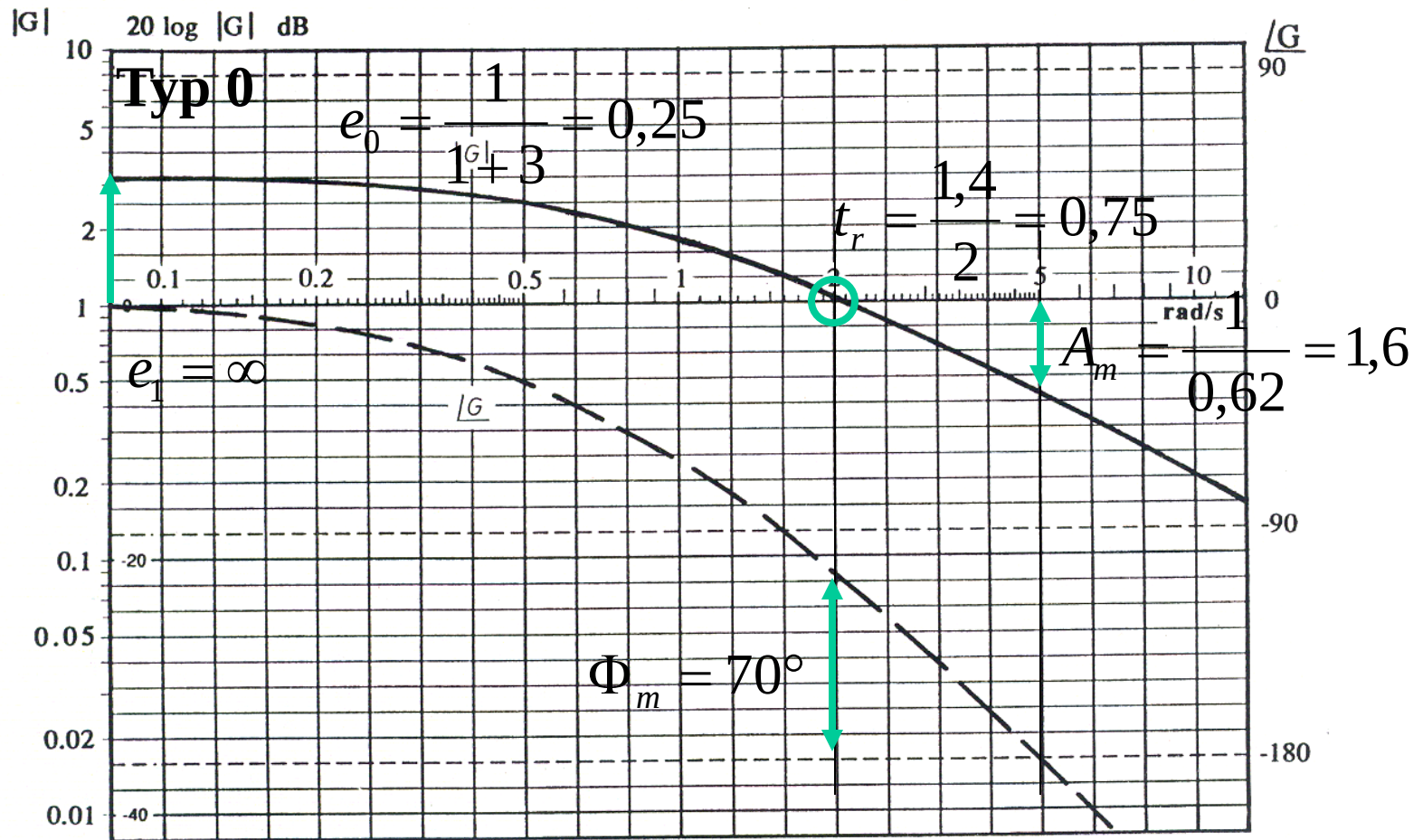
10.17 c lösön Bodediagram



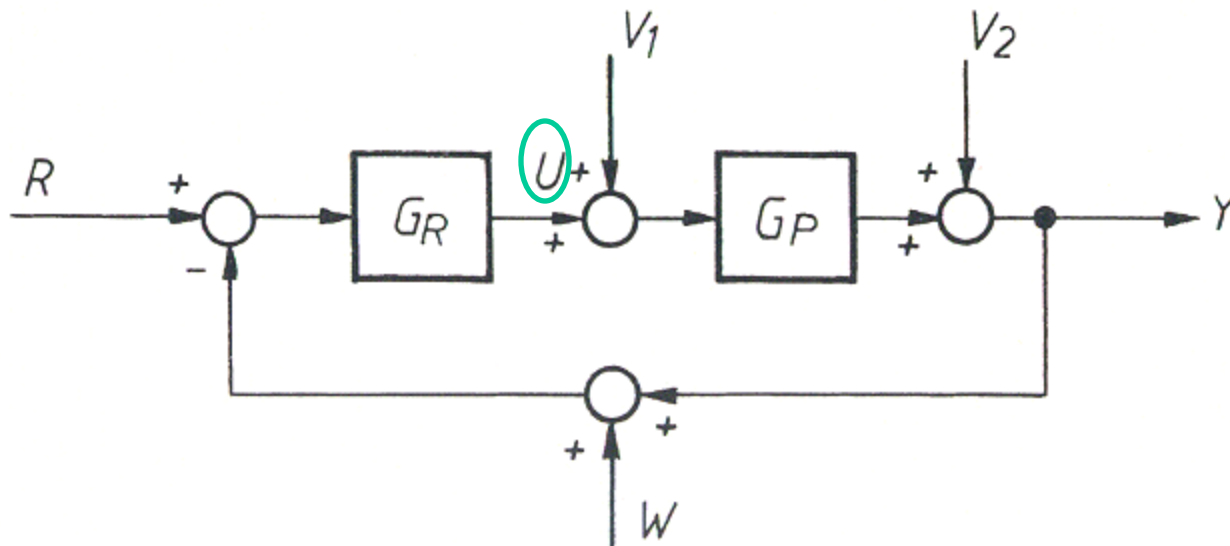
10.17 d Bodediagram



10.17 d lösning Bodediagram

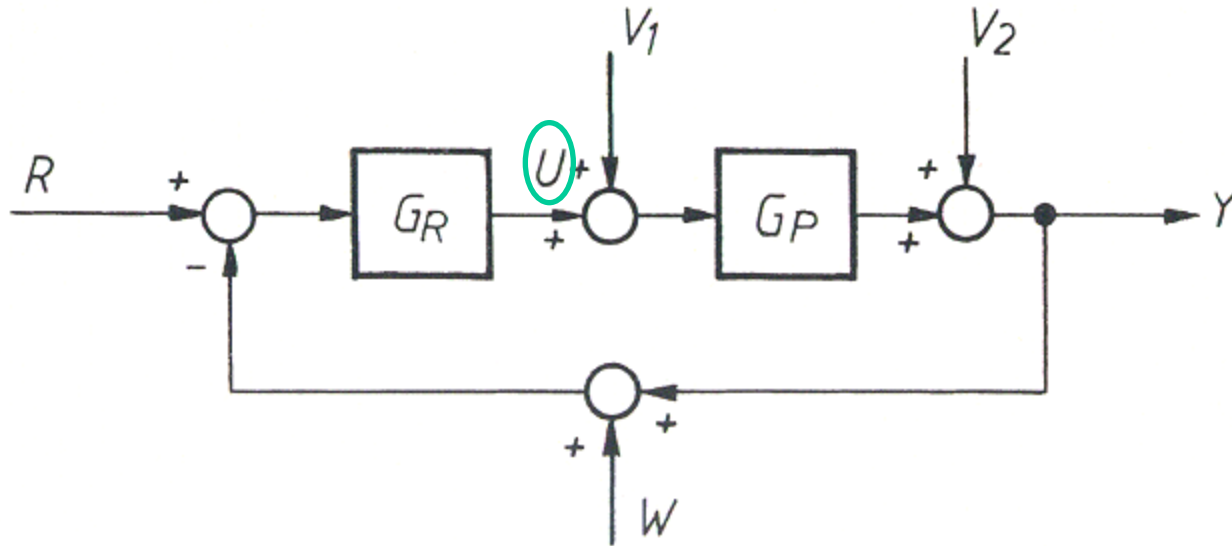


Styrsignalstorlek?



Hur stor blir styrsignalen U ? Det är ingen mening med en matematiskt perfekt regulator som genererar **orimliga styrsignaler** under regleringen!

Styrsignalöverföringsfunktioner



$$\frac{U}{R} = \frac{G_R}{1 + G_P G_R}$$

$$\frac{U}{W} = \frac{-G_R}{1 + G_P G_R}$$

$$\frac{U}{V_1} = \frac{-G_R G_P}{1 + G_P G_R}$$

$$\frac{U}{V_2} = \frac{-G_R}{1 + G_P G_R}$$

Styrsignalaktiviteten kan **simuleras**, eller studeras med Bodediagram.

Styrsignalöverföringsfunktioner

För **höga frekvenser** är det vanligt att $G_P \rightarrow 0$.
Styr-signalerna beror då *mest* på regulatorns högfrekvens-egenskaper:

$$\frac{U}{R} = \frac{G_R}{1 + G_P G_R}$$

$$\frac{U}{W} = \frac{-G_R}{1 + G_P G_R}$$

$$\frac{U}{V_2} = \frac{-G_R}{1 + G_P G_R}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left| \frac{G_R}{1 + \underbrace{G_P G_R}_{\approx 0}} \right| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} |G_R|$$

