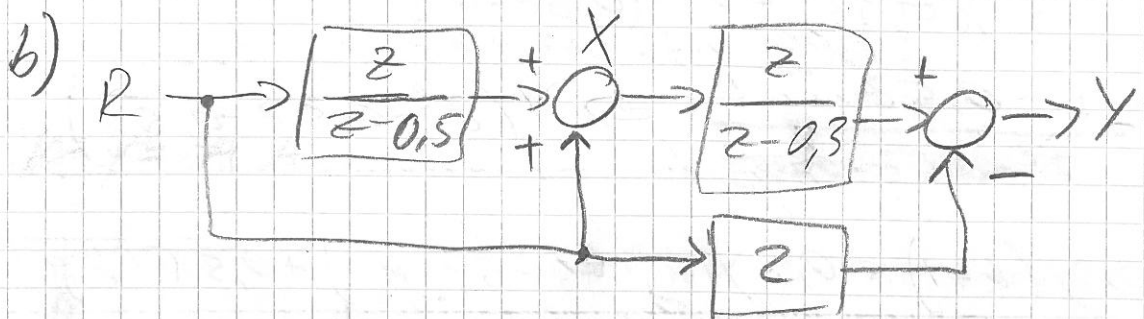


$$(18.1) a) H_{tot}(z) = \frac{\frac{z}{z-1} \cdot \frac{z^2+1}{z^2-0,8z+0,5}}{1 + \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z^2+1}{z^2-0,8z+0,5}} =$$

$$= \frac{z(z^2+1)}{(z-1)(z^2-0,8z+0,5) + z(z^2+1)} =$$

$$= \frac{z^2+z}{z^3-0,8z^2+0,5z - z^2+0,8z-0,5 + z^2+z} = \frac{z^2+z}{z^3+0,2z^2+2,3z-0,5}$$



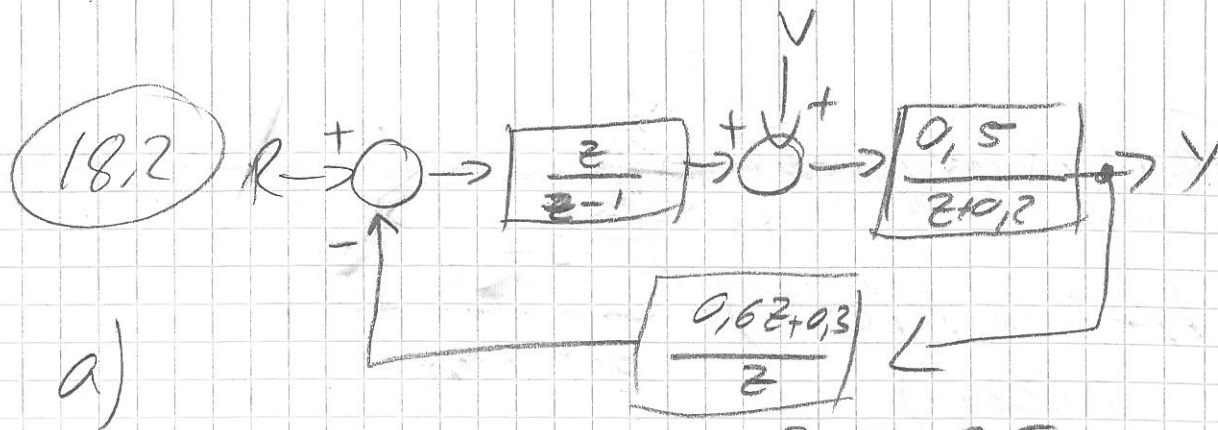
$$X = R \left( \frac{z}{z-0,5} + 1 \right)$$

$$Y = X \frac{z}{z-0,3} + zR = R \left( \left( \frac{z}{z-0,5} + 1 \right) \frac{z}{z-0,3} - z \right)$$

$$\Rightarrow H_{tot} = \frac{Y}{R} = \frac{z}{z-0,3} \left( \frac{z}{z-0,5} + 1 \right) - z =$$

$$= \frac{z}{z-0,3} \cdot \frac{z+z-0,5}{z-0,5} - z = \frac{z^2-0,5z-2(z-0,3)(z-0,5)}{(z-0,3)(z-0,5)} =$$

$$\frac{\cancel{z^2}-0,5z-\cancel{z^2}+z+0,6z-0,3}{z^2-0,3z-0,5z+0,15} = \frac{1,1z-0,3}{z^2-0,8z+0,15}$$



a)

$$\text{Antag } V=0 \Rightarrow H_{Ry} = \frac{Y}{R} = \frac{\frac{z}{z-1} \cdot \frac{0,5}{z+0,2}}{1 + \frac{z}{z-1} \cdot \frac{0,5}{z+0,2} \cdot \frac{0,6z+0,3}{z}} =$$

$$= \frac{0,5z}{(z-1)(z+0,2) + 0,5(0,6z+0,3)} = \frac{0,5z}{z^2 + 0,2z - z - 0,2 + 0,3z + 0,15}$$

$$= \frac{0,5z}{z^2 - 0,5z - 0,05} \Rightarrow Y(z^2 - 0,5z - 0,05) = 0,5zR$$

$$\Rightarrow \underline{y(k+1) = 0,5y(k) + 0,05y(k-1) + 0,5R(k)}$$

b) Antag  $R=0 \Rightarrow H_{Vy} = \frac{\frac{0,5}{z+0,2}}{1 + \frac{0,5}{z+0,2} \cdot \frac{0,6z+0,3}{z} \cdot \frac{z}{z-1}} =$

$$= \frac{0,5(z-1)}{(z-1)(z+0,2) + 0,5(0,6z+0,3)} = \frac{0,5z - 0,5}{z^2 + 0,2z - z - 0,2 + 0,3z + 0,15}$$

$$= \frac{0,5z - 0,5}{z^2 - 0,5z - 0,05} \Rightarrow Y(z^2 - 0,5z - 0,05) = (0,5z - 0,5)V$$

$$\Rightarrow \underline{y(k+2) = 0,5y(k+1) + 0,05y(k) + 0,5V(k+1) - 0,5V(k)}$$

$$18.3 \quad a) H(z) = \frac{3,5}{z-0,8}$$

$$h=1 \Rightarrow H(e^{j\omega h}) = \frac{3,5}{e^{j\omega} - 0,8} =$$

$$= \frac{3,5}{\cos \omega - 0,8 + j \sin \omega}$$

$$\Rightarrow |H(e^{j\omega h})| = \frac{3,5}{\sqrt{(\cos \omega - 0,8)^2 + \sin^2 \omega}} =$$

$$= \frac{3,5}{\sqrt{\cos^2 \omega - 1,6 \cos \omega + 0,64 + \sin^2 \omega}} =$$

$$= \frac{3,5}{\sqrt{1,64 - 1,6 \cos \omega}}$$

$$\angle H(e^{j\omega h}) = -\arctan \frac{\sin \omega}{\cos \omega - 0,8} \pm n \cdot 180^\circ$$

$$b) H(z) = \frac{2,8}{z^2 - 0,2z - 0,24}$$

$$h=1 \Rightarrow H(e^{j\omega h}) = \frac{2,8}{e^{j2\omega} - 0,2e^{j\omega} - 0,24} =$$

$$= \frac{2,8}{\cos 2\omega + j \sin 2\omega - 0,2 \cos \omega - 0,2j \sin \omega - 0,24}$$

$$\Rightarrow |H(e^{j\omega})| = \frac{2,8}{\sqrt{(\cos 2\omega - 0,2 \cos \omega - 0,24)^2 + (\sin 2\omega - 0,2 \sin \omega)^2}}$$

$$\angle H(e^{j\omega h}) = -\arctan \frac{\sin 2\omega - 0,2 \sin \omega}{\cos 2\omega - 0,2 \cos \omega - 0,24} \pm n \cdot 180^\circ$$

c)  $H(z) = z^{-2}$   $h=1 \Rightarrow H(e^{j\omega h}) = (e^{j\omega})^{-2} = e^{-2j\omega}$   
 $\Rightarrow |H(e^{j\omega h})| = 1$   $\angle H(e^{j\omega h}) = -2\omega$

18.4 a)  $K_{LF} = H(1) = \frac{3+1}{1^2 - 1,6 + 0,63} \approx 130$

b)  $K_{LF} = H(1) = \frac{3+1}{1 - 2,4 + 1,92 - 0,512} = 500$

18.5  $f_s = \frac{1}{0,015} \approx 67 \text{ Hz} < 2 \cdot f \Rightarrow \text{Ja, alias Effekt entsteht}$

18.6 a)  $H(z) = \frac{z}{z-0,3}$  pol:  $z=0,3 < 1 \Rightarrow$  stabil

b)  $H(z) = \frac{3}{z-2}$  pol:  $z=2 > 1 \Rightarrow$  instabil

c)  $H(z) = \frac{3z+1}{z^2 - 1,6z + 0,63}$

poler:  $z^2 - 1,6z + 0,63 = 0 \Rightarrow z = 0,8 \pm \sqrt{0,64 - 0,63} < 1$   
 $\Rightarrow$  stabil

d)  $H(z) = \frac{z}{z^2 - 2z + 2}$

poler:  $z^2 - 2z + 2 = 0$ ;  $z = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm j$

$\Rightarrow |z| = \sqrt{2} > 1 \Rightarrow$  instabil

$$e) H(z) = \frac{z}{z^2 - 1,4z + 0,4}$$

$$\text{polar: } z^2 - 1,4z + 0,4 = 0 \Rightarrow z = 0,7 \pm \sqrt{0,49 - 0,4} \\ = 0,7 \pm \sqrt{0,09} = 0,7 \pm 0,3 = \begin{cases} 1,0 \\ 0,4 \end{cases}$$

pol: 1,0  $\Rightarrow$  BIBO stabil men utsigade konverger ej.

$$f) H(z) = \frac{z^2 + 3}{z^3 - 2,8z^2 + 2,55z - 0,756}$$

$$\text{polar: } z^3 - 2,8z^2 + 2,55z - 0,756 = 0$$

Schur-Cohn:

$$a_0 = 1 > 0 \text{ OK}$$

$$b_0 = 1^2 - 0,756^2 \approx 0,4285 > 0 \text{ OK}$$

$$b_1 = 1 \cdot (-2,8) - 2,55 \cdot (-0,756) \approx -0,8722$$

$$b_2 = 1 \cdot 2,55 - (-2,8) \cdot (-0,756) \approx 0,4332$$

$$c_0 = 0,4285^2 - 0,4332^2 < 0 \Rightarrow \underline{\text{instabil}}$$

$$g) H(z) = \frac{3z^2 + 1}{z^3 - 2,4z^2 + 1,92z - 0,512}$$

Schur-Cohn:

$$a_0 = 1 > 0 \text{ OK}$$

$$b_0 = 1^2 - (-0,512)^2 \approx 0,7379 > 0 \text{ OK}$$

$$b_1 = 1 \cdot (-2,4) - 1,92 \cdot (-0,512) \approx -1,4176$$

$$b_2 = 1 \cdot 1,92 - (-2,4) \cdot (-0,512) \approx 0,6912$$

$$c_0 = 0,7379^2 - 0,6912^2 \approx 0,0667 > 0 \text{ OK}$$

$$c_1 = 0,7379 \cdot (-1,4176) - (-1,4176) \cdot 0,6912 \approx -0,0662$$

$$d_0 = 0,0667^2 - 0,0662^2 > 0 \text{ OK } a_0, b_0, c_0, d_0 > 0 \Rightarrow \text{stab.}$$

18.7

$$a) H_{RY} = \frac{\frac{2K}{z-1}}{1 + \frac{2K}{z-1}} = \frac{2K}{z-1+2K}$$

pol:  $z = 1 - 2K$

Sätt  $1 - 2K < \pm 1$   $\begin{cases} -2K < 0 \\ -2K < -2 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{0 < K < 1}}$

$$b) H_{RY} = \frac{\frac{K}{z-1} \cdot \frac{1}{z-0,5}}{1 + \frac{K}{z-1} \cdot \frac{1}{z-0,5}} =$$

$$= \frac{K}{(z-1)(z-0,5) + K} = \frac{K}{z^2 - 0,5z - z + 0,5 + K} =$$

$$= \frac{K}{z^2 - 1,5z + 0,5 + K}$$

Schur-Cohn:  $a_0 = 1 > 0$  OK

$$b_1 = 1 \cdot (-1,5) - (0,5 + K)(-1,5) =$$

$$= -1,5 + 0,75 + 1,5K = 1,5K - 0,75$$

$$b_0 = 1^2 - (0,5 + K)^2 = 1 - 0,25 - K - K^2$$

$$b_0 = 0 \Rightarrow K^2 + K - 0,75 = 0; K = -0,5 \pm \sqrt{0,25 + 0,75} =$$

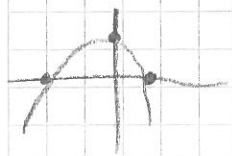
$$= -0,5 \pm 1 = \begin{cases} 0,5 \\ -1,5 \end{cases} \Rightarrow -1,5 < K < 0,5$$

$$K = 0 \Rightarrow b_0 = 0,75$$

$$c_0 = b_0^2 - b_1^2 = (0,75 - K - K^2)^2 - (1,5K - 0,75)^2$$

Krämligt-uttryck!

Lös kar. ekv. istället



$$z^2 - 1,5z + 0,5 + K = 0 \Rightarrow z = 0,75 \pm \sqrt{0,75^2 - 0,5 - K}$$

$$|z| < 1; \sqrt{0,75 \pm \sqrt{0,75^2 - 0,5 - K}} < 1$$

Reella rötter: Fall 1:  $0,75 + \sqrt{0,75^2 - 0,5 - K} < 1$

0,75 +  $\sqrt{\dots}$  alltid  $\leq 0,75$

$$\sqrt{\dots} < 0,25; 0,75^2 - 0,5 - K < 0,0625$$

$$K < 0; K > 0$$

$$\text{Fall 2: } \sqrt{0,75 - \sqrt{0,75^2 - 0,5 - K}} < 1$$

$$\text{Fall 2a: } \sqrt{\dots} < 0,75: 0,75 - \sqrt{\dots} < 1; -\sqrt{\dots} < 0,25$$

Alltids OK eftersom  $\sqrt{\dots} > 0$

$$\text{Fall 2b: } \sqrt{\dots} > 0,75: \sqrt{\dots} - 0,75 < 1; \sqrt{\dots} < 1,75$$

Alltids OK då  $K > 0$

Imaginära rötter:  $0,75^2 - 0,5 - K < 0; K > 0,0625$

$$z = 0,75 \pm j\sqrt{\dots}; |z| = \sqrt{0,75^2 - (\dots)}$$

$$|z| < 1; z^2 < 1; 0,75^2 - 0,75^2 + 0,5 + K < 1; K < 0,5$$

Svar:  $K < 0,5$

18.8 a)  $y(k+2) = 0,6y(k+1) + u(k)$

$$\Rightarrow H_p(z) = \frac{1}{z^2 + 0,6z}$$

$$\Rightarrow H_{TOT} = \frac{KH_p}{1 + KH_p} = \frac{K}{z^2 + 0,6z + K}$$

Villkor:

$$K > 0$$

poler;  $z^2 + 0,6z + K = 0$ ;  $z = -0,3 \pm \sqrt{0,3^2 - K}$

Reella rötter:  $K \leq 0,3$ ,  $\sqrt{\phantom{x}} \leq 0,3 \Rightarrow |z| < 1$  OK

Imaginära rötter:  $K > 0,3$ ,  $z = -0,3 \pm j\sqrt{-(0,3^2 - K)}$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{0,3^2 - 0,3^2 + K} = \sqrt{K}$$

$$|z| < 1 \Rightarrow \sqrt{K} < 1; \underline{\underline{K < 1}}$$

b)  $y(k+2) = 0,4y(k+1) + 1,5u(k) \Rightarrow H_p(z) = \frac{1,5}{z^2 + 0,4z}$

$$\Rightarrow H_{\text{tot}} = \frac{KH_p}{1 + KH_p} = \frac{1,5K}{z^2 + 0,4z + 1,5K}$$

poler;  $z^2 + 0,4z + 1,5K = 0$ ;  $z = -0,2 \pm \sqrt{0,2^2 - 1,5K}$

Reella rötter:  $K \leq \frac{0,2^2}{1,5}$ ,  $\sqrt{\phantom{x}} \leq 0,2 \Rightarrow |z| < 1$  OK!

Imaginära rötter:  $K > \frac{0,2^2}{1,5}$ ,  $z = -0,2 \pm j\sqrt{-(0,2^2 - 1,5K)}$

$$|z| = \sqrt{0,2^2 - 0,2^2 + 1,5K} = \sqrt{1,5K}$$

$$|z| < 1 \Rightarrow \sqrt{1,5K} < 1; K < \frac{1}{1,5}; \underline{\underline{K < \frac{2}{3}}}$$

(18.9)  $G_p(s) = \frac{5}{s}$  Tab s. 314  $\Rightarrow H_p(z) = \frac{5h}{z-1}$

$$\Rightarrow H_{TOT} = \frac{K H_p}{1 + K H_p} = [K=2] = \frac{10h}{z-1+10h}$$

pol:  $z = 1 - 10h$

$|z| < 1 \Rightarrow |1 - 10h| < 1$ ;

Fall 1:  $10h < 1$ :  $1 - 10h < 1$ ;  $-10h < 0$ ;  $h > 0$

Fall 2:  $10h > 1$ :  $10h - 1 < 1$ ;  $10h < 2$ ;  $h < \frac{1}{5}$

Svar:  $h < \frac{1}{5}$

b)  $G_p(s) = \frac{10}{1+s}$  <sup>s. 314</sup>  $\Rightarrow H_p(z) = \frac{10(1 - e^{-h/5})}{z - e^{-h/5}}$

$$\Rightarrow H_{TOT} = \frac{K H_p}{1 + K H_p} = \frac{34(1 - e^{-h/5})}{z - e^{-h/5} + 34(1 - e^{-h/5})}$$

pol:  $z = e^{-h/5} - 34 + 34e^{-h/5} = 35e^{-h/5} - 34$

$|z| > 1 \Rightarrow |35e^{-h/5} - 34| > 1$

Fall 1:  $35e^{-h/5} > 34 \Rightarrow 35e^{-h/5} > 33$ ;  $e^{-h/5} > 1$

$-h/5 > \ln 1$ ;  $-\frac{h}{5} > 0$ ;  $h < 0$  ej möjligt!

Fall 2:  $35e^{-h/5} < 34 \Rightarrow 34 - 35e^{-h/5} > 1$

$-35e^{-h/5} > -33$ ;  $e^{-h/5} > \frac{33}{35}$ ;  $-\frac{h}{5} > \ln \frac{33}{35}$

$h < -5 \ln \frac{33}{35}$ ;  $h < 0,295$

18.10

Slutvärdessatsen:  $y_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{1}{z} Y(z) r_{ss}$

$$e = R - Y = R(-H_{TOT}(z) + 1)$$

$$\Rightarrow e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) (-H_{TOT}(z) + 1) R$$

r steg med höjden a  $\Rightarrow R(z) = \frac{z}{z-1} a$  ( $r_{ss} = a$ )

$$\Rightarrow e_0 = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) (-H_{TOT}(z) + 1) \frac{z}{z-1} a =$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} a z \cdot \frac{H_R H_P}{1 + H_R H_P} + 1 = \lim_{z \rightarrow 1} a z \frac{-H_R H_P + 1 + H_R H_P}{1 + H_R H_P} =$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{a z}{1 + H_R H_P} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{a}{1 + H_R H_P}$$

$$\Rightarrow e_0 = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{a}{1 + \frac{z}{z-1} \cdot \frac{1}{z-0.5}} = \frac{a}{\infty} = \underline{\underline{0}}$$

$$pss \quad e_1 = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{h}{(z-1)(1 + H_R H_P)} = \frac{\lim_{z \rightarrow 1} h}{(z-1)(1 + \frac{z}{z-1} \cdot \frac{1}{z-0.5})} =$$

$$= \frac{\lim_{z \rightarrow 1} h}{z-1 + \frac{z}{z-0.5}} = \frac{h}{1-1 + \frac{1}{0.5}} = \underline{\underline{\frac{h}{2}}}$$

18.11)  $G_p(s) = \frac{2}{1+2s} \Rightarrow H_p(z) = \frac{2(1-e^{-h/2})}{z-e^{-h/2}}$

438  
530

$H_R(z) = 3 \quad A_m = 2 \Rightarrow \text{pol med } |z|=1 \text{ då } H_R' = 2H_R = 6$   
 $\Rightarrow H_{TOT}(z) = \frac{2H_R H_p}{H_R^2 H_p} = \frac{12(1-e^{-h/2})}{z-e^{-h/2} + 12(1-e^{-h/2})}$

pol;  $z = e^{-h/2} - 12(1-e^{-h/2})$   
 $|z|=1 \Rightarrow |e^{-h/2} - 12 + 12e^{-h/2}| = 1$

$|13e^{-h/2} - 12| = 1$

Fall 1:  $13e^{-h/2} > 12 : 13e^{-h/2} = 13 ; e^{-h/2} = 1 ; -\frac{h}{2} = 0$   
 $\Rightarrow h = 0$  duger g.

Fall 2:  $13e^{-h/2} < 12 : -13e^{-h/2} < -11$

$e^{-h/2} > \frac{-11}{-13} ; h = -2 \ln \frac{11}{13} ; \underline{\underline{h \approx 0,335}}$

18.12) a) De är svårare att rita eftersom uttrycken blir mer komplicerade. Det finns dessutom enklare metoder att dimensionera diskreta regulatorer.

b) Att en skivvär lågfrekvent signal uppstår pga olyckelig samplingsfrekvens ( $f_s < 2f_{max}$ ). Lösningen är att filtrera bort signaler med  $f > \frac{1}{2} f_s$  innan samplingen (eller att låta det sampelade värdet vara nollvärdet).