



KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Lösningsförslag till kontrollskrivning 2
Måndagen den 11 februari, 2013

- (1) Låt D vara det begränsade område i xy -planet som kurvan $4 - x^2 - y^2 = 0$ innesluter. Beräkna

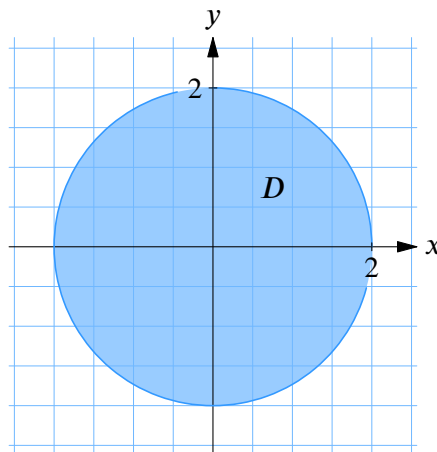
$$\iint_D (x - y + 2)^2 dx dy. \quad (4 \text{ p})$$

LÖSNINGSFÖRSLAG

Kurvans ekvation kan skrivas om som

$$x^2 + y^2 = 4,$$

och i denna form framgår det att kurvan är en cirkel med medelpunkt i origo och radie $\sqrt{4} = 2$. Området D är därmed den cirkelskiva som cirkeln innesluter.



Området D är en cirkelskiva med medelpunkt i origo och radie 2.

I polära koordinater beskrivs D som $0 \leq r \leq 2$ och $0 \leq \theta < 2\pi$.

Dubbelintegralen beräknar vi genom att gå över i polära koordinater

$$\begin{aligned}
 \iint_D (x - y + 2)^2 dx dy &= \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} (r \cos \theta - r \sin \theta + 2)^2 d\theta \right) r dr \\
 &= \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} (r^2 \cos^2 \theta - 2r^2 \cos \theta \sin \theta + r^2 \sin^2 \theta \right. \\
 &\quad \left. + 4r \cos \theta - 4r \sin \theta + 4) d\theta \right) r dr \\
 &= \{ \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1, 2 \cos \theta \sin \theta = \sin 2\theta \} \\
 &= \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} (r^2 - r^2 \sin 2\theta + 4r \cos \theta - 4r \sin \theta + 4) d\theta \right) r dr \\
 &= \int_0^2 \left[r^2 \theta + \frac{1}{2} r^2 \cos 2\theta + 4r \sin \theta + 4r \cos \theta + 4\theta \right]_0^{2\pi} r dr \\
 &= \int_0^2 (2\pi r^2 + 8\pi) r dr \\
 &= 2\pi \int_0^2 (r^3 + 4r) dr \\
 &= 2\pi \left[\frac{1}{4} r^4 + 2r^2 \right]_0^2 \\
 &= 2\pi(4 + 8) \\
 &= 24\pi.
 \end{aligned}$$

- (2) Använd Lagranges metod för att beräkna det kortaste avståndet från origo till planet $3x + 2y - z = 10$. **(4 p)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

Genom att minimera kvadraten på avståndet kan problemet formuleras som

$$\begin{aligned}
 \min \quad & x^2 + y^2 + z^2 \\
 \text{när} \quad & 3x + 2y - z = 10.
 \end{aligned}$$

Planet $3x + 2y - z = 10$ är en sluten men inte begränsad mängd och därför ej heller en kompakt mängd. Därmed kan vi inte direkt dra slutsatsen att minimum verkligen antas på planet, utan behöver också undersöka hur värdet av målfunktionen $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ beter sig när (x, y, z) rör sig mot den obegränsade delen av planet.

Eftersom planet $g(x, y, z) = 3x + 2y - z = 10$ inte har några kantpunkter eller singulära punkter (där gradienten ∇g är nollvektorn) så antar f sina lokala extremvärden i punkter där Lagrangevillkoret är uppfyllt, dvs. där ∇f är parallell med ∇g . För att bestämma punkter där detta villkor är uppfyllt bildar vi Lagrangefunktionen

$$L(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(3x + 2y - z - 10)$$

och sätter partialderivatorna av L lika med noll,

$$L'_x = 2x + 3\lambda = 0, \quad (1)$$

$$L'_y = 2y + 2\lambda = 0, \quad (2)$$

$$L'_z = 2z - \lambda = 0, \quad (3)$$

$$L'_\lambda = 3x + 2y - z - 10 = 0. \quad (4)$$

Ur (1) får vi att $\lambda = -2x/3$ och detta insatt i (2) ger att $y = 2x/3$. Ekvation (3) ger att $\lambda = 2z$, vilket ger att $x = -3z$ och $y = -2z$. Ekvation (4) kan nu uttryckas helt i z ,

$$-9z - 4z - z = 10 \quad \Leftrightarrow \quad z = -\frac{5}{7}.$$

Motsvarande värde på x och y blir $x = \frac{15}{7}$ respektive $y = \frac{10}{7}$. Avståndet till origo från denna punkt är

$$\sqrt{\left(\frac{15}{7}\right)^2 + \left(\frac{10}{7}\right)^2 + \left(-\frac{5}{7}\right)^2} = \frac{1}{7}\sqrt{15^2 + 10^2 + 5^2} = \frac{1}{7}\sqrt{350} = \frac{5}{7}\sqrt{14}.$$

Innan vi kan säga att detta är det kortaste avståndet från planet till origo behöver vi också undersöka vad som händer med värdet på $f(x, y, z)$ när (x, y, z) avlägsnar sig mot den obegränsade delen av planet. Eftersom $f(x, y, z)$ är kvadraten på avståndet från (x, y, z) till origo ser vi att f växer obegränsat i detta fall och det betyder att f verkligen antar sitt minsta värde i punkten $\frac{1}{7}(15, 10, -5)$.

- (3) När man behandlar elektrostatiske problem i två dimensioner kan det vara lämpligt att införa paraboliska koordinater (s, t) via

$$x = s t$$

$$y = \frac{1}{2}(s^2 - t^2)$$

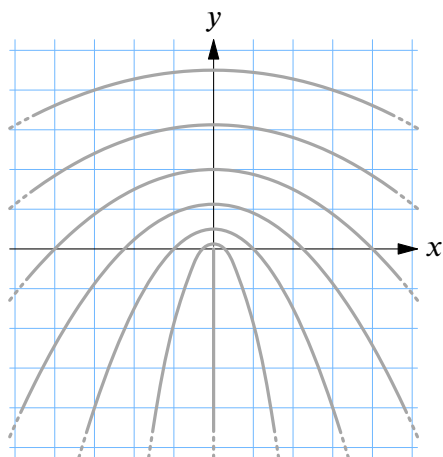
- a) Koordinatlinjer är kurvor som fås när man fixerar en av de två parametrarna (s, t) . Skissera (rita) koordinatlinjerna. **(2 p)**
- b) Beräkna funktionaldeterminanten $\frac{d(x, y)}{d(s, t)}$. **(2 p)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

a) Genom att sätta s till en nollskild konstant kan koordinatsambandet skrivas som

$$y = \frac{1}{2} \left(s^2 - \frac{x^2}{s^2} \right),$$

vilket är parabler som öppnar sig nedåt.

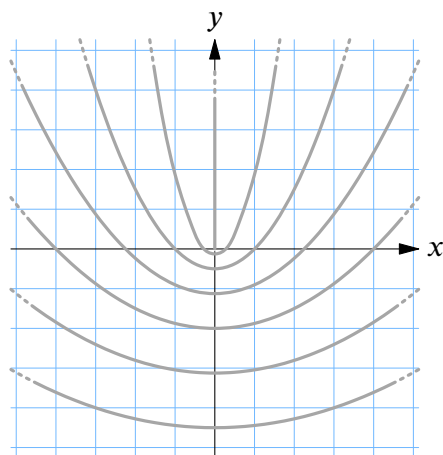


s	koordinatlinje
(0)	(negativa y-axeln)
$\pm \frac{1}{2}$	$y = \frac{1}{8} - 2x^2$
± 1	$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2$
$\pm \frac{3}{2}$	$y = \frac{9}{8} - \frac{2}{9}x^2$
± 2	$y = 2 - \frac{1}{8}x^2$
$\pm \frac{5}{2}$	$y = \frac{25}{8} - \frac{2}{25}x^2$
± 3	$y = \frac{9}{2} - \frac{1}{18}x^2$

Sätter vi t lika med en nollskild konstant får vi istället

$$y = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{t^2} - t^2 \right),$$

vilket är parabler som är öppna uppåt.



t	koordinatlinje
(0)	(positiva y-axeln)
$\pm \frac{1}{2}$	$y = 2x^2 - \frac{1}{8}$
± 1	$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$
$\pm \frac{3}{2}$	$y = \frac{2}{9}x^2 - \frac{9}{8}$
± 2	$y = \frac{1}{8}x^2 - 2$
$\pm \frac{5}{2}$	$y = \frac{2}{25}x^2 - \frac{25}{8}$
± 3	$y = \frac{1}{18}x^2 - \frac{9}{2}$

b) Funktionaldeterminanten ges av

$$\frac{d(x, y)}{d(s, t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & s \\ s & -t \end{vmatrix} = -s^2 - t^2.$$

Svar:

(1) 24π

(2) $\frac{5}{7}\sqrt{14}$

(3) a) Se lösningen. b) $-s^2 - t^2$