KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Lösningsförslag till kontrollskrivning 1
Måndagen den 11 februari, 2013

(1) Bestäm och skissera (rita) den största möjliga definitionsmängden till funktionen

$$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - (y-1)^2} + \frac{1}{x}.$$

Bestäm också om definitionsmängden är en kompakt mängd. **(4 p)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

Kvadratrotsuttrycket

$$\sqrt{1 - x^2 - (y-1)^2}$$

är definierat när argumentet är större än eller lika med 0, dvs.

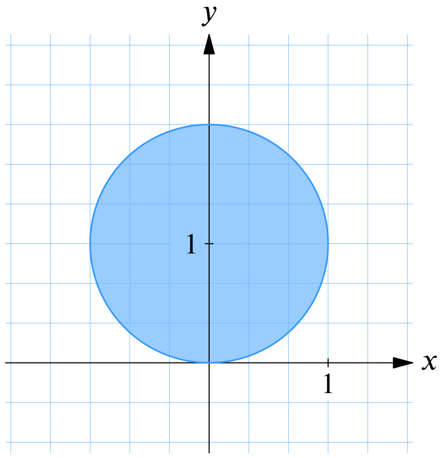
$$1 - x^2 - (y-1)^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + (y-1)^2 \leq 1. \tag{1}$$

Vidare är termen $1/x$ definierad när nämnaren är skild från 0, dvs.

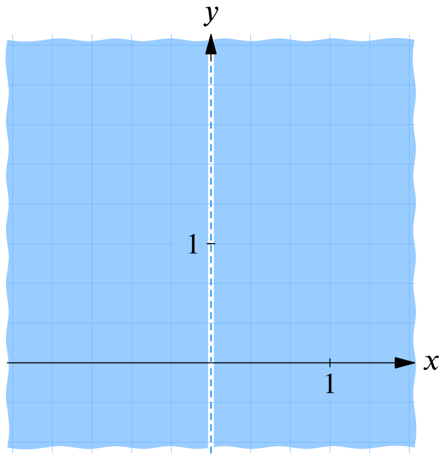
$$x \neq 0. \tag{2}$$

Det största möjliga definitionsområdet till $f(x,y)$ är det område i xy-planet där både (1) och (2) är uppfyllda.

Olikhet (1) beskriver en cirkelskiva med medelpunkt i $(0, 1)$ och radie 1 medan (2) beskriver alla punkter utanför y-axeln.

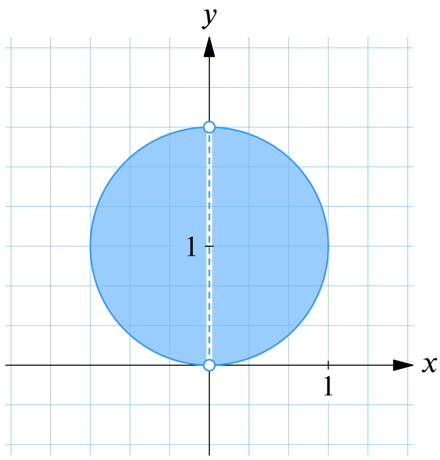


$x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$



$x \neq 0$

Tillsammans definierar alltså (1) och (2) cirkelskivan centrerad kring $(0, 1)$ med radie 1 och där diametern utmed y-axeln är borttagen.



Största definitionsområdet till $f(x, y)$

Randen till detta område består av
(a) cirkeln med medelpunkt i $(0, 1)$ och radie 1,
(b) punkter på y-axeln med y-koordinat mellan 0 och 2.
Eftersom punkter på y-axeln inte tillhör definitionsområdet är området inte en sluten mängd och därmed inte kompakt.

(2) Låt $f(x,y,z) = 1/(x^2+y^2+z^2)$ för $(x,y,z) \neq (0,0,0)$. Beräkna

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

(4 p)

LÖSNINGSFÖRSLAG

Vi har att

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2} \cdot 2x = \frac{-2x}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{-2x}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\
&= \frac{-2 \cdot (x^2+y^2+z^2)^2 - (-2x) \cdot 2(x^2+y^2+z^2) \cdot 2x}{(x^2+y^2+z^2)^4} \\
&= \frac{2(x^2+y^2+z^2)\left[-(x^2+y^2+z^2) + 4x^2\right]}{(x^2+y^2+z^2)^4} \\
&= \frac{2(3x^2-y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3}.
\end{aligned}$$

Eftersom variablerna x, y och z förekommer symmetriskt i $f(x,y,z)$ så ger ovanstående direkt att

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{2(-x^2+3y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= \frac{2(-x^2-y^2+3z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3}.
\end{aligned}$$

Vi får nu att

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= \frac{2(3x^2-y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3} + \frac{2(-x^2+3y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3} + \frac{2(-x^2-y^2+3z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3} \\
&= \frac{2(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3} \\
&= \frac{2}{(x^2+y^2+z^2)^2}.
\end{aligned}$$

(3) Kurvan γ bestäms av

$$(x, y, z) = (\sin 2t, 2\cos t, 1 - \cos 2t), \quad \text{för } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

a) Visa att γ ligger på en sfär med centrum i origo. Vilken radie har sfären? **(2 p)**

b) En partikel rör sig längs γ (med den givna parametriseringen). När och var har partikeln störst fart? **(2 p)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

a) För punkter på kurvan γ har vi

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= \sin^2 2t + 4\cos^2 t + (1 - \cos 2t)^2 \\ &= \sin^2 2t + 4\cos^2 t + 1 - 2\cos 2t + \cos^2 2t \\ &= 1 + 4\cos^2 t + 1 - 2(2\cos^2 t - 1) \\ &= 1 + 1 + 2 \\ &= 4 \\ &= 2^2. \end{aligned}$$

Kurvan ligger alltså på en sfär med centrum i origo och radie 2.

b) Hastighetsvektorn till γ är

$$(x', y', z') = (2\cos 2t, -2\sin t, -2\sin 2t).$$

Farten är beloppet av denna vektor,

$$\begin{aligned} |(x', y', z')| &= \sqrt{4\cos^2 2t + 4\sin^2 t + 4\sin^2 2t} \\ &= 2\sqrt{1 + \sin^2 t}. \end{aligned}$$

Denna har sitt största värde då $\sin^2 t = 1$, alltså då $t = \pi/2$ eller $t = 3\pi/2$. I båda dessa tidpunkter befinner sig partikeln i punkten $(x, y, z) = (0, 0, 2)$.

Svar:

(1) Se lösningen för en figur. Definitionsmängden är inte kompakt.

(2) $2/(x^2 + y^2 + z^2)^2$

(3) a) Radien är 2.

b) $t = \pi/2$, $t = 3\pi/2$ som svarar mot punkten $(0, 0, 2)$.