KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Tentamen
Tisdagen den 12 mars, 2013

Skrivtid: 08:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Mattias Dahl

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. De tre första uppgifterna, som utgör del A, kan ersättas med resultat från den löpande examinationen. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning ger 4 poäng. Varje godkänt seminarium ger 1 poäng på uppgift 3. Det är maximum mellan resultatet från den löpande examinationen och resultatet på motsvarande uppgift på tentamen som räknas. Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid två tentamenstillfällen under läsåret.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som är främst till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. En svängningsrörelse beskrivs av

$$u(x,t) = A\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - 2\pi f t\right)$$

där amplituden A, våglängden λ och frekvensen f är givna konstanter. Visa att $u(x,t)$ uppfyller vågekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

med ett lämpligt val av konstanten c. **(4 p)**

2. Bestäm de stationära punkterna till funktionen

$$f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{8}{x} - y$$

och avgör deras karaktär. **(4 p)**

3. Betrakta vektorfältet $\boldsymbol{F}$ i $\mathbf{R}^3$ som ges av $\boldsymbol{F} = (yz, xz, xy)$ och kurvintegralen

$$\int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

   a) Låt γ vara den kurva som ges av $(x,y,z) = (\cos t, \sin t, t)$ då t löper från 0 till $\pi/4$. Beräkna integralen genom att använda kurvans parametrisering. **(2 p)**

   b) Visa att fältet $\boldsymbol{F}$ är konservativt och bestäm en potentialfunktion till $\boldsymbol{F}$. Beräkna nu integralen med hjälp av potentialen. **(2 p)**

DEL B

4. a) Bestäm alla reella tal a och b så att vektorfältet $\boldsymbol{F} = \big(xy^a, (1 + bx^2)y^2\big)$ blir konservativt i $\mathbf{R}^2$. **(2 p)**

   b) Beräkna, för dessa värden på a och b, kurvintegralen
$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r},$$
   där C är en kurva från $(0, 0)$ till $(1, 2)$. **(2 p)**

5. Bestäm det största och minsta värde som funktionen $f(x, y) = xy$ antar på ellipsskivan $x^2 + xy + y^2 \leq 3$. **(4 p)**

6. Beräkna
$$\iint_D xy\,dx\,dy$$
   där D är det område som begränsas av parabeln $x = 2 - y^2$ och den räta linjen $x = y$. **(4 p)**

Var god vänd!

DEL C

7. Beräkna flödet av $\boldsymbol{F} = (0, 0, y^2 + xz)$ genom halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$, i den riktning som har positiv z-komponent. **(4 p)**

8. Betrakta integralen
$$\iint_D \frac{dx\,dy}{x+y} \qquad (*)$$
där D är en triangel med hörnpunkter i $(0, 0)$, $(2, 2)$ och $(1, 3)$.
   a) Förklara varför $(*)$ måste betraktas som en generaliserad integral. **(1 p)**
   b) Inför ett linjärt variabelbyte så att två av kanterna till D blir parallella med de nya koordinataxlarna. **(1 p)**
   c) Visa att integralen är konvergent genom att beräkna den med variabelbytet i deluppgift b. **(2 p)**

9. En funktion f sägs uppfylla det starka Kuhn-Tucker villkoret i hörnpunkten $(1, 1)$ till kvadraten $D = \{(x, y)\colon -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ om
$$f'_{\boldsymbol{v}}(1, 1) \leq C \qquad (*)$$
där $C < 0$ och för alla riktningar $\boldsymbol{v}$ som utifrån punkten $(1, 1)$ pekar in i området D.
   a) Visa att $f(x, y) = x^2y + y$ uppfyller det starka Kuhn-Tucker villkoret $(*)$ i hörnpunkten $(1, 1)$. **(2 p)**
   b) Använd Taylors formel av ordning 1 för att visa en C^2 funktion f som uppfyller det starka Kuhn-Tucker villkoret $(*)$ har en lokal maximipunkt i hörnpunkten $(1, 1)$. **(2 p)**