



KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2013-03-12

DEL A

1. En svängningsrörelse beskrivs av

$$u(x, t) = A \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - 2\pi f t\right)$$

där amplituden A , våglängden λ och frekvensen f är givna konstanter. Visa att $u(x, t)$ uppfyller vågekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

med ett lämpligt val av konstanten c .

(4 p)

Lösning. Vi har att

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2\pi A}{\lambda} \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - 2\pi f t\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 A \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - 2\pi f t\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\pi f A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - 2\pi f t\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -(2\pi f)^2 A \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - 2\pi f t\right),$$

och ser att

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2}{(2\pi f)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{(\lambda f)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Alltså löser u vågekvationen med $c = \lambda f$.

□

Svar: $c = \lambda f$

2. Bestäm de stationära punkterna till funktionen

$$f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{8}{x} - y$$

och avgör deras karaktär.

(4 p)

Lösning. De stationära punkterna fås genom att sätta partialderivatorna av f lika med noll,

$$f'_x = \frac{1}{y} - \frac{8}{x^2} = 0, \quad (1)$$

$$f'_y = -\frac{x}{y^2} - 1 = 0. \quad (2)$$

Ekvation (1) ger att $y = x^2/8$ som insatt i (2) ger att $x^3 = -64$, vilket medför att $x = -4$ och $y = (-4)^2/8 = 2$. Det finns alltså en stationär punkt $(-4, 2)$.

Andraderivatorna av f är

$$f''_{xx} = \frac{16}{x^3}, \quad f''_{xy} = -\frac{1}{y^2}, \quad f''_{yy} = \frac{2x}{y^3},$$

och i punkten $(-4, 2)$ har de värdena

$$f''_{xx}(-4, 2) = -\frac{1}{4}, \quad f''_{xy}(-4, 2) = -\frac{1}{4}, \quad f''_{yy}(-4, 2) = -1.$$

Det betyder att Taylorutvecklingen av ordning 2 av f i punkten $(-4, 2)$ är

$$\begin{aligned} f(-4 + h, 2 + k) &= f(-4, 2) + f'_x(-4, 2)h + f'_y(-4, 2)k \\ &\quad + \frac{1}{2}(f''_{xx}(-4, 2)h^2 + 2f''_{xy}(-4, 2)hk + f''_{yy}(-4, 2)k^2) + \text{restterm} \\ &= -2 - \frac{1}{8}h^2 - \frac{1}{4}hk - \frac{1}{2}k^2 + \text{restterm} \\ &= -2 - \frac{1}{8}[h^2 + 2hk + 4k^2] + \text{restterm}. \end{aligned}$$

Kvadratkompletterar vi den kvadratiska formen får vi

$$= -2 - \frac{1}{8}[(h + k)^2 + 3k^2] + \text{restterm}.$$

Eftersom den kvadratiska formen är negativt definit är punkten $(-4, 2)$ ett lokalt maximum. $\square$

Svar: Lokalt maximum i $(-4, 2)$

3. Betrakta vektorfältet $\mathbf{F}$ i $\mathbf{R}^3$ som ges av $\mathbf{F} = (yz, xz, xy)$ och kurvintegralen

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

- a) Låt γ vara den kurva som ges av $(x, y, z) = (\cos t, \sin t, t)$ då t löper från 0 till $\pi/4$. Beräkna integralen genom att använda kurvans parametrisering. **(2 p)**
- b) Visa att fältet $\mathbf{F}$ är konservativt och bestäm en potentialfunktion till $\mathbf{F}$. Beräkna nu integralen med hjälp av potentialen. **(2 p)**

Lösning. Se seminarieuppgifterna. □

Svar: –

DEL B

4. a) Bestäm alla reella tal a och b så att vektorfältet $F = (xy^a, (1 + bx^2)y^2)$ blir konservativt i $\mathbf{R}^2$. (2 p)
- b) Beräkna, för dessa värden på a och b , kurvintegralen

$$\int_C F \cdot d\mathbf{r},$$

där C är en kurva från $(0, 0)$ till $(1, 2)$.

(2 p)

Lösning.

- a) Eftersom F är definierat på hela $\mathbf{R}^2$ som är enkelt sammanhängande är ett nödvändigt och tillräckligt villkor att F ska vara konservativt i $\mathbf{R}^2$ att

$$\frac{\partial}{\partial x}((1 + bx^2)y^2) = \frac{\partial}{\partial y}(xy^a),$$

dvs.

$$2bxy^2 = axy^{a-1}$$

för alla x och y . Detta är uppfyllt om $a = 3$ och $b = \frac{3}{2}$.

- b) Vi söker en potential φ som uppfyller $\text{grad } \varphi = F$. Detta ger att

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = xy^3, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = (1 + \frac{3}{2}x^2)y^2.$$

Från den första identiteten får vi att $\varphi(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^3 + g(y)$ och detta insatt i den andra identiteten ger att

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{3}{2}x^2y^2 + g'(y).$$

Identifierar vi med det tidigare uttrycket för $\partial \varphi / \partial y$ ser vi att $g'(y) = y^2$ varför $g(y) = \frac{1}{3}y^3 + C$. Väljer vi konstanten C lika med 0 får vi potentialen

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^3 + \frac{1}{3}y^3.$$

Kurvintegralen blir nu

$$\int_C F \cdot d\mathbf{r} = \varphi(1, 2) - \varphi(0, 0) = \frac{20}{3}.$$

□

Svar:

- a) $a = 3$ och $b = \frac{3}{2}$
 b) $\frac{20}{3}$

5. Bestäm det största och minsta värde som funktionen $f(x, y) = xy$ antar på ellipsskivan $x^2 + xy + y^2 \leq 3$. **(4 p)**

Lösning. Sätt $g(x, y) = x^2 + xy + y^2$. Då ges ellipsskivan av $g(x, y) \leq 3$ och dess rand (en ellips) av $g(x, y) = 3$.

Funktionen f är ett polynom och är därför en kontinuerlig funktion. Ellipsskivan är en begränsad mängd som innehåller sin rand (punkter på ellipsen $g(x, y) = 3$ uppfyller $g(x, y) \leq 3$) och är således en kompakt mängd. Dessa saker tillsammans innebär att f garanterat antar ett största och minsta värde på ellipsskivan.

Eftersom funktionen f är en kontinuerligt deriverbar funktion kan den bara anta sitt största och minsta värde i följande typer av punkter:

1. inre stationära punkter, dvs. punkter där $\nabla f = (0, 0)$,
2. randpunkter där Lagrangevillkoret är uppfyllt, dvs. randpunkter där ∇f är parallell med ∇g ,
3. singulära randpunkter, dvs. randpunkter där $\nabla g = (0, 0)$.

Vi tar därför fram de punkter som uppfyller något av dessa tre villkor.

1. Gradienten av f är

$$\nabla f = (f'_x, f'_y) = (y, x)$$

och sätter vi den lika med nollvektorn $(0, 0)$ får vi direkt att $x = y = 0$.

Det finns alltså en inre stationär punkt $(0, 0)$ som också ligger inuti ellipsskivan eftersom $g(0, 0) = 0 \leq 3$.

2. Lagrangevillkoret att $\nabla f(y, x)$ är parallell med $\nabla g = (2x + y, x + 2y)$ innebär att ∇f och ∇g är linjärt beroende och därför måste determinanten

$$\begin{vmatrix} -\nabla f & -\nabla g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ 2x + y & x + 2y \end{vmatrix} = 2y^2 - 2x^2 = 2(y - x)(y + x)$$

vara lika med noll. Detta ger oss två fall:

- $x = y$: Randvillkoret $g(x, y) = 3$ ger oss då ekvationen $3x^2 = 3$ som har lösningarna $x = \pm 1$. Vi har alltså två punkter $(-1, -1)$ och $(1, 1)$.
- $x = -y$: Då ger randvillkoret $g(x, y) = 3$ oss att $x^2 = 3$ som har lösningarna $x = \pm\sqrt{3}$. Vi har därmed de två punkterna $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ och $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$.

3. I singulära punkter är

$$\nabla g = (2x + y, x + 2y) = (0, 0).$$

Detta ger oss det linjära ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 2x + y &= 0, \\ x + 2y &= 0, \end{aligned}$$

som har lösningen $x = y = 0$. Punkten $(0, 0)$ är dock inte en randpunkt ty $g(0, 0) \neq 3$.

Det finns alltså fem punkter

$$(0, 0), \quad (-1, -1), \quad (-\sqrt{3}, \sqrt{3}), \quad (\sqrt{3}, -\sqrt{3}) \quad \text{och} \quad (1, 1)$$

där största och minsta värde för f kan antas. Eftersom

$$f(0, 0) = 0, \quad f(-1, -1) = 1, \quad f(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) = -3,$$

$$f(\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = -3 \quad \text{och} \quad f(1, 1) = 1$$

ser vi att på ellipsskivan antar f det största värdet 1 i punkterna $(-1, -1)$ och $(1, 1)$, och det minsta minsta värdet -3 i punkterna $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ och $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$. $\square$

Svar: Största värde är 1 och minsta värde är -3 .

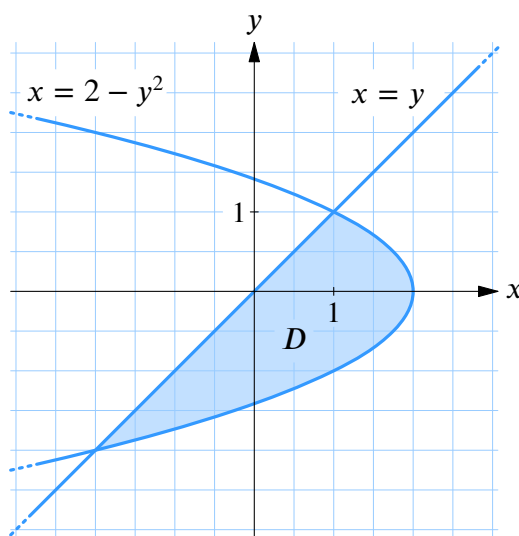
6. Beräkna

$$\iint_D xy \, dx \, dy$$

där D är det område som begränsas av parabeln $x = 2 - y^2$ och den räta linjen $x = y$.

(4 p)

Lösning. Parabeln $x = 2 - y^2$ har y -axeln som symmetriaxel och den punkt med störst y -koordinat är $(2, 0)$. Tillsammans med den räta linjen $x = y$ avgränsas ett område D enligt figuren.



Skärningspunkterna mellan parabeln och den räta linjen är punkter som ligger på båda kurvorna och uppfyller därför båda kurvornas ekvationer,

$$x = y, \tag{1}$$

$$x = 2 - y^2. \tag{2}$$

Ekvation (1) insatt i (2) ger en ekvation endast i y ,

$$y = 2 - y^2 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 + y - 2 = 0.$$

Denna andragradsekvation har lösningarna $y = -2$ och $y = 1$. Skärningspunkterna är alltså $(-2, -2)$ och $(1, 1)$.

I y -led har området D utsträckningen $-2 \leq y \leq 1$ och i x -led begränsas D underifrån av kurvan $x = y$ och ovanifrån $x = 2 - y^2$. Området D kan därmed beskrivas som

$$-2 \leq y \leq 1, \quad y \leq x \leq 2 - y^2.$$

Dubbelintegralen kan nu beräknas som en itererad integral,

$$\begin{aligned}\iint_D xy \, dx \, dy &= \int_{-2}^1 \left(\int_y^{2-y^2} xy \, dx \right) dy \\&= \int_{-2}^1 y \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_{x=y}^{x=2-y^2} dy \\&= \frac{1}{2} \int_{-2}^1 y((2-y^2)^2 - y^2) dy \\&= \frac{1}{2} \int_{-2}^1 (4y - 5y^3 + y^5) dy \\&= \frac{1}{2} \left[2y^2 - \frac{5}{4}y^4 + \frac{1}{6}y^6 \right]_{-2}^1 \\&= \frac{1}{2} \left(2 - \frac{5}{4} + \frac{1}{6} - (8 - 20 + \frac{32}{3}) \right) \\&= \frac{9}{8}.\end{aligned}$$

□

Svar: $\frac{9}{8}$

DEL C

7. Beräkna flödet av $\mathbf{F} = (0, 0, y^2 + xz)$ genom halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0$, i den riktning som har positiv z -komponent. **(4 p)**

Lösning. Låt S vara halvsfären och S' vara cirkelskivan i x, y -planet med medelpunkt i origo och radie 2. Då bildar S och S' tillsammans en sluten yta som innesluter ett halvklot K .

Om $d\mathbf{S}$ är det utåtriktade vektoriella ytelementet så ger Gauss sats att

$$\iint_{S+S'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_K \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz$$

och eftersom

$$\iint_{S+S'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

så är alltså

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_K \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz - \iint_{S'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}. \quad (*)$$

Vi ska beräkna det sökta flödet i vänsterledet genom att beräkna de två integralerna i högerledet.

Divergensen av $\mathbf{F}$ ges av

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x} 0 + \frac{\partial}{\partial y} 0 + \frac{\partial}{\partial z} (y^2 + xz) = x$$

och trippelintegralen i (*) blir därmed

$$\iiint_K x \, dx \, dy \, dz.$$

Denna integral har värdet 0 eftersom integranden x är en udda funktion i x -led och kroppen K är spegelsymmetrisk i x -led kring planet $x = 0$.

På ytstycket S' ges det utåtriktade vektoriella ytelementet $d\mathbf{S}$ av

$$d\mathbf{S} = (0, 0, -1) \, dx \, dy$$

och därmed är

$$\begin{aligned}
 \iint_{S'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{S'} (0, 0, y^2 + x \cdot 0) \cdot (0, 0, -1) \, dx \, dy \\
 &= - \iint_{S'} y^2 \, dx \, dy \\
 &= - \iint_{x^2+y^2 \leq 4} y^2 \, dx \, dy \\
 &= \{ \text{Polära koordinater} \} \\
 &= - \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 (r \sin \theta)^2 r \, dr \right) d\theta \\
 &= - \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \, d\theta \int_0^2 r^3 \, dr \\
 &= - \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \int_0^2 r^3 \, dr \\
 &= - \left[\frac{1}{2} \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^2 \\
 &= -4\pi.
 \end{aligned}$$

Svaret blir alltså

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0 - (-4\pi) = 4\pi.$$

□

Svar: 4π

8. Betrakta integralen

$$\iint_D \frac{dx \, dy}{x + y} \quad (*)$$

där D är en triangel med hörnpunkter i $(0, 0)$, $(2, 2)$ och $(1, 3)$.

- Förklara varför $(*)$ måste betraktas som en generaliserad integral. **(1 p)**
- Inför ett linjärt variabelbyte så att två av kanterna till D blir parallella med de nya koordinataxlarna. **(1 p)**
- Visa att integralen är konvergent genom att beräkna den med variabelbytet i deluppgift b. **(2 p)**

Lösning.

- Integranden har en singularitet i $(0, 0)$.
- Vi ritar först upp triangeln D (se figur nedan). Kantlinjerna kan skrivas som

$$y = x, \quad y = 3x \quad \text{och} \quad y = 4 - x.$$

Området D kan därmed beskrivas som

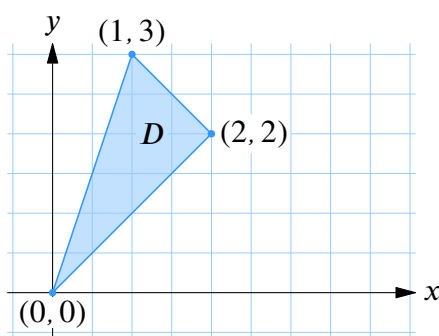
$$\begin{cases} y \geq x, \\ y \leq 3x, \\ y \leq 4 - x, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - y \leq 0, \\ 3x - y \geq 0, \\ x + y \leq 4. \end{cases}$$

Vi inför därför de nya variablerna

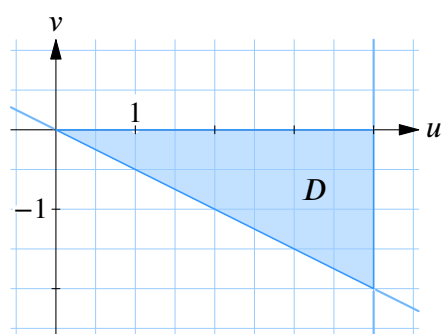
$$\begin{cases} u = x + y, \\ v = x - y, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}(u + v), \\ y = \frac{1}{2}(u - v). \end{cases}$$

- I dessa nya variabler är $3x - y = 3 \cdot \frac{1}{2}(u + v) - \frac{1}{2}(u - v) = u + 2v$ och området D beskrivs som

$$u \leq 4, \quad v \leq 0 \quad \text{och} \quad u + 2v \geq 0.$$



Området D i xy -planet



Området D i uv -planet

Vi har att

$$\det\left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

och beräknar integralen genom att gå över i de nya variablerna u och v ,

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{dx \, dy}{x + y} &= \iint_D \frac{1}{u} \left| \det\left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right) \right| du \, dv \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\substack{0 \leq u \leq 4 \\ -u/2 \leq v \leq 0}} \frac{du \, dv}{u} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^4 \left(\int_{-u/2}^0 dv \right) \frac{du}{u} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^4 \frac{u/2}{u} du \\ &= \frac{1}{4} \cdot 4 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Eftersom integranden är positiv i D är integralen i x, y konvergent samtidigt som integralen uttryckt i u, v och dess itererade varianter är det. Ovanstående uträkning visar därmed att integralen i uppgiftstexten är konvergent och har värdet 1.

□

Svar:

- a) Se lösningen.
- b) T.ex. $u = x + y$, $v = x - y$.
- c) Se lösningen. Integralens värde är 1.

9. En funktion f sägs uppfylla det starka Kuhn-Tucker villkoret i hörnpunkten $(1, 1)$ till kvadraten $D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ om

$$f'_v(1, 1) \leq C \quad (*)$$

där $C < 0$ och för alla riktningar $\mathbf{v}$ som utifrån punkten $(1, 1)$ pekar in i området D .

- a) Visa att $f(x, y) = x^2y + y$ uppfyller det starka Kuhn-Tucker villkoret $(*)$ i hörnpunkten $(1, 1)$. **(2 p)**
- b) Använd Taylors formel av ordning 1 för att visa en C^2 funktion f som uppfyller det starka Kuhn-Tucker villkoret $(*)$ har en lokal maximipunkt i hörnpunkten $(1, 1)$. **(2 p)**

Lösning.

- a) I hörnpunkten $(1, 1)$ är

$$\begin{aligned} \nabla f(1, 1) &= (2xy, x^2 + 1) \Big|_{x=y=1} \\ &= (2, 2) \end{aligned}$$

och de riktningar $\mathbf{v}$ som pekar in i området D ges av

$$\mathbf{v} = (h, k), \quad \text{där } h \leq 0 \text{ och } k \leq 0.$$

Funktionen f är differentierbar och därmed är

$$\begin{aligned} f'_v(1, 1) &= \nabla f(1, 1) \cdot \mathbf{v} \\ &= (2, 2) \cdot (h, k) \\ &= 2(h + k). \end{aligned}$$

För att undersöka om denna riktningsderivata är strikt negativ för de tillåtna riktningarna (h, k) löser vi optimeringsproblemet

$$\max 2(h + k)$$

$$\text{när } h^2 + k^2 = 1 \text{ och } h, k \leq 0.$$

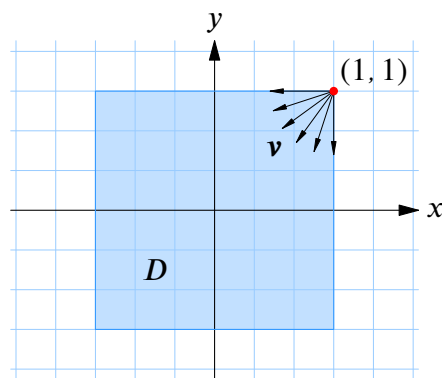
Ekvationen $h^2 + k^2 = 1$ ger enhetscirkeln i h, k -planet och olikheterna $h \leq 0$ och $k \leq 0$ begränsar de tillåtna (h, k) till den del av enhetscirkeln som finns i tredje kvadranten.

Kvartscirkeln kan vi parametrisera som

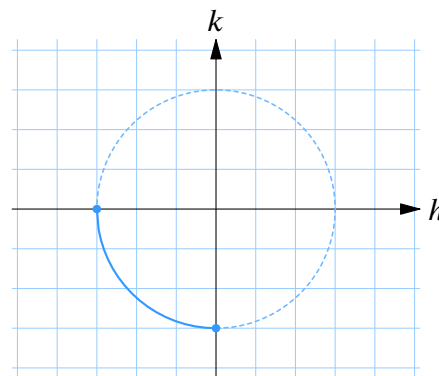
$$(h, k) = (\cos t, \sin t) \quad \text{där } \pi \leq t \leq 3\pi/2$$

och målfunktionen uttryckt i t blir

$$2(h + k) = 2(\cos t + \sin t).$$



När $h \leq 0$ och $k \leq 0$ pekar $\mathbf{v} = (h, k)$ in i området D .



För att bestämma maximum av detta uttryck sätter vi derivatan lika med noll,

$$\frac{d}{dt} 2(\cos t + \sin t) = 2(-\sin t + \cos t) = 0,$$

vilket ger att $t = 5\pi/4$ och då är $2(h+k) = 2(-1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2}) = -4/\sqrt{2}$.

Maximum kan också antas i ändpunkterna $t = \pi$ och $t = 3\pi/2$. I dessa punkter är

$$t = \pi : \quad 2(h+k) = 2(\cos \pi + \sin \pi) = -2,$$

$$t = 3\pi/2 : \quad 2(h+k) = 2(\cos(3\pi/2) + \sin(3\pi/2)) = -2.$$

Eftersom $-4/\sqrt{2} < -2$ så är maximum alltså -2 och detta visar att f uppfyller det starka Kuhn-Tucker villkoret (*) med $C = -2$.

b) Enligt Taylors formel är

$$f(1+h, 1+k) = f(1, 1) + \nabla f(1, 1) \cdot (h, k) + (h^2 + k^2)B(h, k),$$

där $B(h, k)$ är en begränsad funktion i en omgivning av $(h, k) = (0, 0)$. Denna formel kan skrivas som

$$\begin{aligned} \frac{f(1+h, 1+k) - f(1, 1)}{\sqrt{h^2 + k^2}} &= \nabla f(1, 1) \cdot \frac{(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} + \sqrt{h^2 + k^2} B(h, k) \\ &= f'_v(1, 1) + \sqrt{h^2 + k^2} B(h, k), \end{aligned}$$

där $\mathbf{v}$ är enhetsvektorn som pekar i riktningen (h, k) .

Eftersom $f'_v(1, 1) \leq C < 0$ för riktningen $\mathbf{v}$ som pekar från $(1, 1)$ till $(1+h, 1+k)$ som tillhör D och termen $\sqrt{h^2 + k^2} B(h, k) \rightarrow 0$ när $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ så är

$$\frac{f(1+h, 1+k) - f(1, 1)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq C + \epsilon < 0 \quad \Rightarrow \quad f(1+h, 1+k) \leq f(1, 1)$$

i den omgivning av $(1, 1)$ inuti D där $|\sqrt{h^2 + k^2} B(h, k)| \leq \epsilon$ och $\epsilon < |C|$, dvs. f har en lokal maximipunkt i $(1, 1)$.

□

Svar: –