KTH Teknikvetenskap

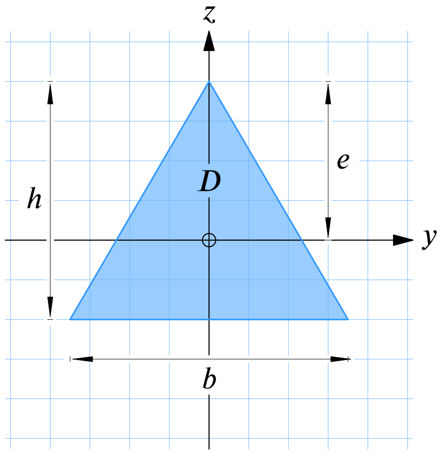
SF1626 Flervariabelanalys
Lösningsförslag med bedömningskriterier till kontrollskrivning 2
XXdagen den XX april, 2013

(1) Yttröghetsmomentet I_y med avseende på y-axeln för en rak homogen balk utefter x-axeln med tvärsnitt D i yz-planet ges av

$$I_y = \iint_D z^2\, dy\, dz.$$

Beräkna I_y uttryckt i b och h för den balk som har det triangulära tvärsnittet D enligt figuren.

Området D är symmetriskt med avseende på z-axeln och placerad med tyngdpunkten i origo så att $e = 2h/3$. **(4 p)**



LÖSNINGSFÖRSLAG

Området D beskrivs av

$$-\frac{h}{3} \le z \le \frac{2h}{3},$$

$$-\left(\frac{b}{3} - \frac{b}{2h}z\right) \le y \le \frac{b}{3} - \frac{b}{2h}z.$$

Integralen för I_y blir alltså

$$
\begin{aligned}
I_y &= \int_{-h/3}^{2h/3} \Big(\int_{-(b/3-bz/2h)}^{b/3-bz/2h} z^2 \, dy \Big) \, dz \\
&= \int_{-h/3}^{2h/3} z^2 \cdot 2\Big(\frac{b}{3} - \frac{b}{2h} z \Big) \, dz \\
&= \Big[\frac{2b}{3}\frac{z^3}{3} - \frac{b}{h}\frac{z^4}{4} \Big]_{-h/3}^{2h/3} \\
&= \frac{2b}{9}\Big(\frac{2h}{3}\Big)^3 - \frac{b}{4h}\Big(\frac{2h}{3}\Big)^4 - \frac{2b}{9}\Big(-\frac{h}{3}\Big)^3 + \frac{b}{4h}\Big(-\frac{h}{3}\Big)^4 \\
&= \frac{16bh^3}{243} - \frac{4bh^3}{81} + \frac{2bh^3}{243} + \frac{bh^3}{4 \cdot 81} \\
&= \Big(\frac{16}{243} - \frac{12}{243} + \frac{2}{243} + \frac{3}{4 \cdot 243} \Big) bh^3 \\
&= \frac{27}{4} \cdot \frac{1}{243} \cdot bh^3 \\
&= \frac{1}{4 \cdot 9} \cdot bh^3 \\
&= \frac{bh^3}{36}.
\end{aligned}
$$

(2) Använd Lagranges metod för att bestämma största och minsta värde för funktionen $f(x, y) = x + 2y$ när (x, y) ligger på ellipsen $x^2 + xy + y^2 = 2$. **(4 p)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

Maximum eller minimum för $f(x, y) = x + 2y$ på ellipsen $g(x, y) = x^2 + xy + y^2 = 2$ finns punkter där grad f och grad g är parallella. Alltså där

$$\operatorname{grad} f = (1, 2) = \lambda(2x + y, x + 2y) = \operatorname{grad} g$$

för något reellt tal λ. Detta ger

$$
\begin{aligned}
1 &= \lambda(2x + y), \\
2 &= \lambda(x + 2y), \\
x^2 + y^2 + z^2 &= 2.
\end{aligned}
$$

Vi ser att $\lambda \neq 0$, så första och andra ekvationerna ger

$$x + 2y = \frac{2}{\lambda} = 2 \cdot \frac{1}{\lambda} = 2(2x + y) = 4x + 2y$$

eller $x = 4x$ vilket är uppfyllt om $x \neq 0$.

Tredje ekvationen ger sedan $y^2 = 2$ vilket har lösningarna $y = \pm\sqrt{2}$. Största och minsta värden finns i punkterna $(0, \sqrt{2}\,)$ resp. $(0, -\sqrt{2}$ och är

$$f(0, \sqrt{2}\,) = 2\sqrt{2},$$
$$f(0, -\sqrt{2}\,) = -2\sqrt{2}.$$

(3) Gör variabelbytet

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} r \cos\theta \\ y = r \sin\theta \end{cases}$$

för att beräkna integralen

$$\iint_D x^2 y \, dx \, dy$$

där $D = \{(x, y) \colon 1 \le 4x^2 + y^2 \le 16, x \ge 0, y \ge 0\}$. **(4 p)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

Vid variabelbytet $x = \frac{1}{2} r \cos\theta$, $y = r \sin\theta$ har vi

$$\frac{d(x, y)}{d(r, \theta)} = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\theta & -\frac{1}{2} r \sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} r \big(\cos^2\theta - (-\sin^2\theta)\big) = \tfrac{1}{2} r$$

och

$$dx \, dy = \left| \tfrac{1}{2} r \right| dr \, d\theta = \tfrac{1}{2} r \, dr \, d\theta.$$

Vi har också

$$4x^2 + y^2 = 4 \cdot \tfrac{1}{2^2} r^2 \cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta = r^2$$

så området D beskrivs av

$$D = \left\{ (r, \theta) : 1 \le r^2 \le 16,\ 0 \le \theta \le \pi/2 \right\}.$$

Integralen blir alltså

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 y \, dx \, dy &= \int_0^{\pi/2} \int_1^4 \tfrac{1}{4} r^2 \cos^2\theta \, r \sin\theta \cdot \tfrac{1}{2} r \, dr \, d\theta \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta \int_1^4 r^3 \, dr \\ &= \left\{ u = \cos\theta,\ du = -\sin\theta \, d\theta,\ u \colon 1 \to 0 \right\} \\ &= \frac{1}{8} \int_0^1 u^2 \, du \left[\tfrac{1}{4} r^4 \right]_{r=1}^{r=4} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{8}\left[\tfrac{1}{3}u^3\right]_{u=0}^{u=1} \cdot \left(\frac{256}{4} - \frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{255}{4} \\
&= \frac{85}{32}.
\end{aligned}
$$

Svar:

(1) $bh^3/36$
(2) Största värde är $2\sqrt{2}$ och minsta värde är $-2\sqrt{2}$.
(3) $\frac{85}{32}$