



KTH Teknikvetenskap

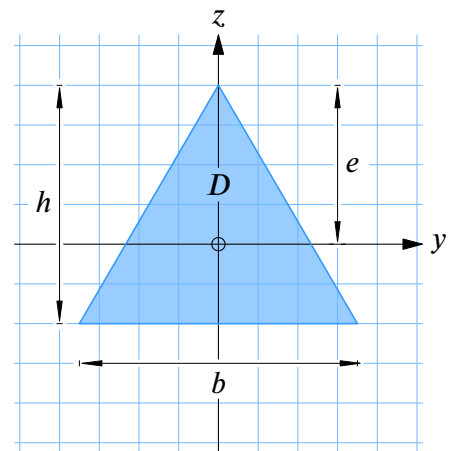
**SF1626 Flervariabelanalys**  
**Lösningsförslag med bedömningskriterier till kontrollskrivning 2**  
**Måndagen den 18 mars, 2013**

- (1) Yttröghetsmomentet  $I_y$  med avseende på  $y$ -axeln för en rak homogen balk utefter  $x$ -axeln med tvärsnitt  $D$  i  $yz$ -planet ges av

$$I_y = \iiint_D z^2 dy dz.$$

Beräkna  $I_y$  uttryckt i  $b$  och  $h$  för den balk som har det triangulära tvärsnittet  $D$  enligt figuren.

Området  $D$  är symmetriskt med avseende på  $z$ -axeln och placerad med tyngdpunkten i origo så att  $e = 2h/3$ . **(4 p)**



LÖSNINGSFÖRSLAG

Området  $D$  beskrivs av

$$-\frac{h}{3} \leq z \leq \frac{2h}{3},$$
$$-\left(\frac{b}{3} - \frac{b}{2h}z\right) \leq y \leq \frac{b}{3} - \frac{b}{2h}z.$$

Integralen för  $I_y$  blir alltså

$$\begin{aligned}
 I_y &= \int_{-h/3}^{2h/3} \left( \int_{-(b/3-bz/2h)}^{b/3-bz/2h} z^2 dy \right) dz \\
 &= \int_{-h/3}^{2h/3} z^2 \cdot 2 \left( \frac{b}{3} - \frac{b}{2h} z \right) dz \\
 &= \left[ \frac{2b}{3} \frac{z^3}{3} - \frac{b}{h} \frac{z^4}{4} \right]_{-h/3}^{2h/3} \\
 &= \frac{2b}{9} \left( \frac{2h}{3} \right)^3 - \frac{b}{4h} \left( \frac{2h}{3} \right)^4 - \frac{2b}{9} \left( -\frac{h}{3} \right)^3 + \frac{b}{4h} \left( -\frac{h}{3} \right)^4 \\
 &= \frac{16bh^3}{243} - \frac{4bh^3}{81} + \frac{2bh^3}{243} + \frac{bh^3}{4 \cdot 81} \\
 &= \left( \frac{16}{243} - \frac{12}{243} + \frac{2}{243} + \frac{3}{4 \cdot 243} \right) bh^3 \\
 &= \frac{27}{4} \cdot \frac{1}{243} \cdot bh^3 \\
 &= \frac{1}{4 \cdot 9} \cdot bh^3 \\
 &= \frac{bh^3}{36}.
 \end{aligned}$$

- (2) Använd Lagranges metod för att bestämma största och minsta värde för funktionen  $f(x, y) = x + 2y$  när  $(x, y)$  ligger på ellipsen  $x^2 + xy + y^2 = 2$ . **(4 p)**

#### LÖSNINGSFÖRSLAG

Maximum eller minimum för  $f(x, y) = x + 2y$  på ellipsen  $g(x, y) = x^2 + xy + y^2 = 2$  finns punkter där grad  $f$  och grad  $g$  är parallella. Alltså där

$$\text{grad } f = (1, 2) = \lambda(2x + y, x + 2y) = \text{grad } g$$

för något reellt tal  $\lambda$ . Detta ger

$$\begin{aligned}
 1 &= \lambda(2x + y), \\
 2 &= \lambda(x + 2y), \\
 x^2 + y^2 + z^2 &= 2.
 \end{aligned}$$

Vi ser att  $\lambda \neq 0$ , så första och andra ekvationerna ger

$$x + 2y = \frac{2}{\lambda} = 2 \cdot \frac{1}{\lambda} = 2(2x + y) = 4x + 2y$$

eller  $x = 4x$  vilket är uppfyllt om  $x = 0$ .

Tredje ekvationen ger sedan  $y^2 = 2$  vilket har lösningarna  $y = \pm\sqrt{2}$ . Största och minsta värden finns i punkterna  $(0, \sqrt{2})$  resp.  $(0, -\sqrt{2})$  och är

$$\begin{aligned} f(0, \sqrt{2}) &= 2\sqrt{2}, \\ f(0, -\sqrt{2}) &= -2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

(3) Gör variabelbytet

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

för att beräkna integralen

$$\iint_D x^2 y \, dx \, dy$$

där  $D = \{(x, y) : 1 \leq 4x^2 + y^2 \leq 16, x \geq 0, y \geq 0\}$ .

**(4 p)**

#### LÖSNINGSFÖRSLAG

Vid variabelbytet  $x = \frac{1}{2}r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  har vi

$$\frac{d(x, y)}{d(r, \theta)} = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cos \theta & -\frac{1}{2}r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = \frac{1}{2}r (\cos^2 \theta - (-\sin^2 \theta)) = \frac{1}{2}r$$

och

$$dx \, dy = \left| \frac{1}{2}r \right| dr \, d\theta = \frac{1}{2}r \, dr \, d\theta.$$

Vi har också

$$4x^2 + y^2 = 4 \cdot \frac{1}{2^2}r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = r^2$$

så området  $D$  beskrivs av

$$D = \{(r, \theta) : 1 \leq r^2 \leq 16, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}.$$

Integralen blir alltså

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 y \, dx \, dy &= \int_0^{\pi/2} \int_1^4 \frac{1}{4}r^2 \cos^2 \theta \, r \sin \theta \cdot \frac{1}{2}r \, dr \, d\theta \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta \int_1^4 r^4 \, dr \\ &= \left\{ u = \cos \theta, \, du = -\sin \theta \, d\theta, \, u: 1 \rightarrow 0 \right\} \\ &= \frac{1}{8} \int_0^1 u^2 \, du \left[ \frac{1}{5}r^5 \right]_{r=1}^{r=4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{8} \left[ \frac{1}{3} u^3 \right]_{u=0}^{u=1} \cdot \left( \frac{1024}{4} - \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1023}{4} \\ &= \frac{341}{32}. \end{aligned}$$

**Svar:**

- (1)  $bh^3/36$
- (2) Största värde är  $2\sqrt{2}$  och minsta värde är  $-2\sqrt{2}$ .
- (3)  $\frac{341}{32}$