



KTH Teknikvetenskap

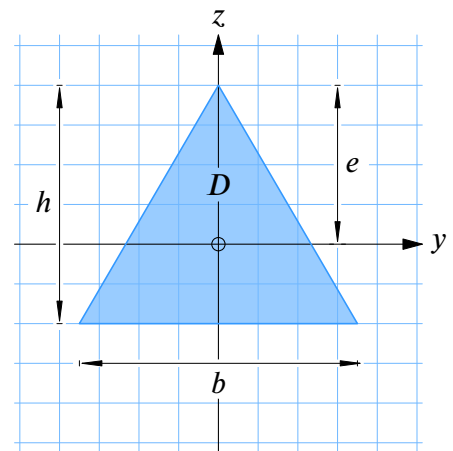
SF1626 Flervariabelanalys
Lösningsförslag med bedömningskriterier till kontrollskrivning 2
Måndagen den 18 mars, 2013

- (1) Yttröghetsmomentet I_y med avseende på y -axeln för en rak homogen balk utefter x -axeln med tvärsnitt D i yz -planet ges av

$$I_y = \iiint_D z^2 dy dz.$$

Beräkna I_y uttryckt i b och h för den balk som har det triangulära tvärsnittet D enligt figuren.

Området D är symmetriskt med avseende på z -axeln och placerad med tyngdpunkten i origo så att $e = 2h/3$. **(4 p)**



LÖSNINGSFÖRSLAG

Området D beskrivs av

$$-\frac{h}{3} \leq z \leq \frac{2h}{3},$$
$$-\left(\frac{b}{3} - \frac{b}{2h}z\right) \leq y \leq \frac{b}{3} - \frac{b}{2h}z.$$

Integralen för I_y blir alltså

$$\begin{aligned}
 I_y &= \int_{-h/3}^{2h/3} \left(\int_{-(b/3-bz/2h)}^{b/3-bz/2h} z^2 dy \right) dz \\
 &= \int_{-h/3}^{2h/3} z^2 \cdot 2 \left(\frac{b}{3} - \frac{b}{2h} z \right) dz \\
 &= \left[\frac{2b}{3} \frac{z^3}{3} - \frac{b}{h} \frac{z^4}{4} \right]_{-h/3}^{2h/3} \\
 &= \frac{2b}{9} \left(\frac{2h}{3} \right)^3 - \frac{b}{4h} \left(\frac{2h}{3} \right)^4 - \frac{2b}{9} \left(-\frac{h}{3} \right)^3 + \frac{b}{4h} \left(-\frac{h}{3} \right)^4 \\
 &= \frac{16bh^3}{243} - \frac{4bh^3}{81} + \frac{2bh^3}{243} + \frac{bh^3}{4 \cdot 81} \\
 &= \left(\frac{16}{243} - \frac{12}{243} + \frac{2}{243} + \frac{3}{4 \cdot 243} \right) bh^3 \\
 &= \frac{27}{4} \cdot \frac{1}{243} \cdot bh^3 \\
 &= \frac{1}{4 \cdot 9} \cdot bh^3 \\
 &= \frac{bh^3}{36}.
 \end{aligned}$$

- (2) Använd Lagranges metod för att bestämma största och minsta värde för funktionen $f(x, y) = x + 2y$ när (x, y) ligger på ellipsen $x^2 + xy + y^2 = 2$. **(4 p)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

Maximum eller minimum för $f(x, y) = x + 2y$ på ellipsen $g(x, y) = x^2 + xy + y^2 = 2$ finns punkter där grad f och grad g är parallella. Alltså där

$$\text{grad } f = (1, 2) = \lambda(2x + y, x + 2y) = \text{grad } g$$

för något reellt tal λ . Detta ger

$$\begin{aligned}
 1 &= \lambda(2x + y), \\
 2 &= \lambda(x + 2y), \\
 x^2 + y^2 + z^2 &= 2.
 \end{aligned}$$

Vi ser att $\lambda \neq 0$, så första och andra ekvationerna ger

$$x + 2y = \frac{2}{\lambda} = 2 \cdot \frac{1}{\lambda} = 2(2x + y) = 4x + 2y$$

eller $x = 4x$ vilket är uppfyllt om $x = 0$.

Tredje ekvationen ger sedan $y^2 = 2$ vilket har lösningarna $y = \pm\sqrt{2}$. Största och minsta värden finns i punkterna $(0, \sqrt{2})$ resp. $(0, -\sqrt{2})$ och är

$$\begin{aligned} f(0, \sqrt{2}) &= 2\sqrt{2}, \\ f(0, -\sqrt{2}) &= -2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

(3) Gör variabelbytet

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

för att beräkna integralen

$$\iint_D x^2 y \, dx \, dy$$

där $D = \{(x, y) : 1 \leq 4x^2 + y^2 \leq 16, x \geq 0, y \geq 0\}$.

(4 p)

LÖSNINGSFÖRSLAG

Vid variabelbytet $x = \frac{1}{2}r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ har vi

$$\frac{d(x, y)}{d(r, \theta)} = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cos \theta & -\frac{1}{2}r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = \frac{1}{2}r (\cos^2 \theta - (-\sin^2 \theta)) = \frac{1}{2}r$$

och

$$dx \, dy = \left| \frac{1}{2}r \right| dr \, d\theta = \frac{1}{2}r \, dr \, d\theta.$$

Vi har också

$$4x^2 + y^2 = 4 \cdot \frac{1}{2^2}r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = r^2$$

så området D beskrivs av

$$D = \{(r, \theta) : 1 \leq r^2 \leq 16, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}.$$

Integralen blir alltså

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 y \, dx \, dy &= \int_0^{\pi/2} \int_1^4 \frac{1}{4}r^2 \cos^2 \theta r \sin \theta \cdot \frac{1}{2}r \, dr \, d\theta \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta \int_1^4 r^4 \, dr \\ &= \left\{ u = \cos \theta, \, du = -\sin \theta \, d\theta, \, u: 1 \rightarrow 0 \right\} \\ &= \frac{1}{8} \int_0^1 u^2 \, du \left[\frac{1}{5}r^5 \right]_{r=1}^{r=4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{8} \left[\frac{1}{3} u^3 \right]_{u=0}^{u=1} \cdot \left(\frac{1024}{4} - \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1023}{4} \\ &= \frac{341}{40}. \end{aligned}$$

Svar:

- (1) $bh^3/36$
- (2) Största värde är $2\sqrt{2}$ och minsta värde är $-2\sqrt{2}$.
- (3) $\frac{341}{40}$