



**KTH Electrical Engineering**

EE – Automatic Control  
2011-03-22

**EL2520**

**CONTROL THEORY AND PRACTICE  
ADVANCED COURSE**

Lå 12/13

**Exercises in Control Theory and Practice**



UPPSALA  
UNIVERSITET



ROYAL INSTITUTE  
OF TECHNOLOGY

## FÖRORD

Exempelsamlingen knyter an till läroboken

Torkel Glad och Lennart Ljung: *Reglerteori. Flervariabla och olinjära metoder.* andra upplagan. Studentlitteratur, 2003.

som användes vid fortsättningskurser i reglerteknik vid flera av landets tekniska högskolor. Vid KTH är den kurslitteratur för *Reglerteknik fortsättningskurs*. Vid Uppsala universitet användes boken vid kurserna *Reglerteknisk design* och *Datorbaserad styrning*.

Det finns liknande kurser på andra håll i landet, bl a vid Linköpings Tekniska Högskola, Chalmers och Lunds Tekniska Högskola. Dessa institutioner har välvilligt ställt övningsmaterial till förfoga. Den föreliggande exempelsamlingen med lösningar bygger därför på samlat material från flera högskolor.

Exemplen är ordnade efter kursbokens kapitel. Ett extra avsnitt har lagts in som ett kapitel 19: Observatörer och tillståndsmetodik. Det är avsett att repetera/komplettera delar av grundkursen som en förberedelse för behandlingen av flervariabla system.

Så långt det varit möjligt har för varje uppgift markerats varifram uppgiften ursprungligen kommer. (I en del fall har det varit svårt eller oklart med det precisa ursprunget.) Ett flertal uppgifter har ursprungligen givits som tentamenstäl. Sådana uppgifter har markerats med ett T.

Av praktiska skäl har uppgifterna inom varje kapitel *inte* sorterats i svårighetsordning. Likaså har vi valt att inte översätta några tentamensuppgifter utan låtit dessa kvaistå på engelska.

Exemplen har reviderats ett flertal gånger, i princip årligen. En större revidering gjordes 2002. Vi tackar alla kollegor vid olika högskolor som bidragit med problem, lösningar och tidigare redigeringsarbeten. Den resulterande exempelsamlingen är i högsta grad ett lagarbete.

I reglerteknikens värld är  *återkoppling* ett centralt begrepp. Så bör det vara också inom undervisningen. Välkommen med feedback, kommentarer och synpunkter!

Stockholm och Uppsala, 12 januari, 2009

Mikael Johansson

Avd för reglerteknik

Institutionen för signaler, sensorer och system

Kungliga Tekniska Högskolan

Torsten Söderström

Avd för systemteknik

Institutionen för informationsteknologi

Uppsala universitet

# EXEMPELSAMLING I REGLERTEORI

2006

## Innehåll

<b>I PROBLEM</b>	<b>1</b>
1 Inledning	1
2 Representation av linjära system	4
3 Egenskaper hos linjära system	11
4 Samplade system	24
5 Störningsmodeller	26
6 Det slutna systemet	43
7 Begränsningar och konflikter	51
8 Regulatorstrukturer och reglerdesign	61
9 Minimering av kvadratiska kriterier: LQG	73
10 Att forma kretsförstärkningen	88
11 Beskrivning av olinjära system	97
12 Stabilitet hos olinjära system	97
13 Kvalitativt uppförande. Fasplan	102
14 Självsvängningar och beskrivande funktion	107

15 Regulatorsyntes för olinjära system	117	11 Beskrivning av olinjära system	273
16 Prediktionsreglering: MPC, GPC och DMM	117	12 Stabilitet hos olinjära system	273
17 Att exakt kompensera bort olinjäriteter	119	13 Kvalitativt uppförande. Fasplan	275
18 Optimal styrning	121	14 Självsvängningar och beskrivande funktion	289
19 Observatörer och tillståndsmetodik	127	15 Regulatorsyntes för olinjära system	304
<b>II LÖSNINGAR</b>	<b>127</b>	16 Prediktionsreglering: MPC, GPC och DMM	304
1 Inledning	127	17 Att exakt kompensera bort olinjäriteter	307
2 Representation av linjära system	131	18 Optimal styrning	309
3 Egenskaper hos linjära system	137	19 Observatörer och tillståndsmetodik	323
4 Samplade system	158		
5 Störningsmodeller	161		
6 Det slutna systemet	194		
7 Begränsningar och konflikter	204		
8 Regulatorstrukturer och reglerdesign	217		
9 Minimering av kvadratiska kriterier: LQG	237		
10 Att forma kretsförstärkningen	258		



Del I

**PROBLEM**

# 1 Inledning

1.1

(LiTH)

Visa hur lagförstärkningssatsen följer ur Nyquistkriteriet för linjära system!

(b)

$$y(t) = \begin{cases} t, & t > 1 \\ 0, & t \leq 1 \end{cases}$$

(c)

$$y(t) = \begin{cases} e^{-t}(1 - e^{-t}), & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

1.2

(LiTH)

Vilken förstärkning har ett idealt relä? Ett idealt relä beskrivs av funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

1.3

(LiTH)

Consider the linear system

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 2}$$

the control signal first passes through a saturating valve:

$$\tilde{u} = \begin{cases} 1 & \text{om } u > 2 \\ \frac{1}{2}u & \text{om } |u| < 2 \\ -1 & \text{om } u < -2 \end{cases}$$

Hereby the control signal becomes

$$y(t) = G(p)\tilde{u}(t)$$

We use P-control, i.e.  $u(t) = -Ky(t)$ . For which values of  $K$  is the closed loop system guaranteed to be stable according to the small gain theorem?

1.4

(LiTH)

Calculate the norms  $\|\cdot\|_\infty$  and  $\|\cdot\|_2$  on the continuous time signals

(a)

$$y(t) = \begin{cases} a \sin(t), & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

1.5

(LiTH)

Consider the linear system

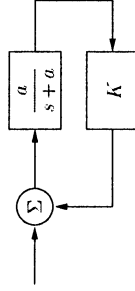
$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2}$$

Determine the gain  $\|G\|$  for the system for all values  $\omega_0 > 0$  and  $\zeta > 0$ .

1.6

(LiTH)

Examine the stability for the below system using both the small gain theorem and by computing the poles of the closed loop system.

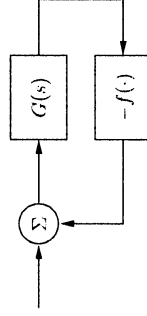


Explain the possible differences!

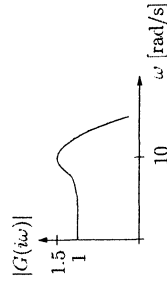
1.7

(T) (LiTH)

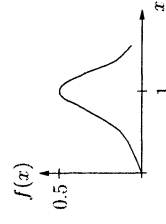
Betrakta två system som återkopplas enligt:



där  $G(s)$  är ett stabilt linjärt system med amplituddiagram enligt



och  $f(\cdot)$  är en förstärkare med följande insignal-utsignal karaktäristik



Är det slutna systemet stabilt?

### 1.8

Betrakta en DC-motor på tillståndsform

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= -ax_2(t) + au(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Den inversa tidskonstanten  $a$  kan variera som

$$a = 1 + \rho, \quad |\rho| < \delta \tag{1.2}$$

Systemet regleras med P-återkoppling  $u(t) = K(r(t) - y(t))$ .

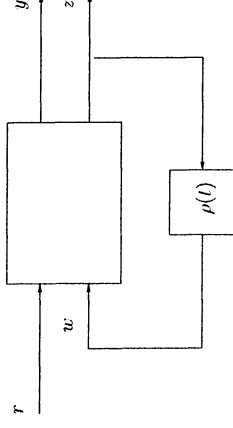
(a) Antag att  $a$  är konstant. Ange ett tillräckligt villkor på  $K$  så att det slutna systemet är stabilt för varje värde på  $a$  i området definierat av (1.2).

(b) Antag nu att  $a$  kan vara tidsvariabelt:

$$a = a(t) = 1 + \rho(t), \quad |\rho(t)| < \delta, \quad \forall t \tag{1.3}$$

där variationerna i tid kan ske godtyckligt snabbt. Ange ett tillräckligt villkor på  $K$  (en olikhet som karakteriserar sådana  $K$  implicit räcker) för att det slutna systemet skall vara stabilt för alla tidsvariationer på  $a(t)$  enligt (1.3).

*Tips:* Inför en ny påhittad insignal  $w$  och en ny påhittad utsignal  $z$  så att systemet (1.1) tillsammans med P-regulatorn kan beskrivas som i figuren nedan



## 2 Representation av linjära system

### 2.1

Man har observerat systemet

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) \end{aligned}$$

och erhållit följande värden

$$y(1) = 0, \quad u(1) = 1$$

$$y(2) = 1, \quad u(2) = -1$$

Bestäm tillståndsvariablernas värden i tidpunkten  $t = 3$ .

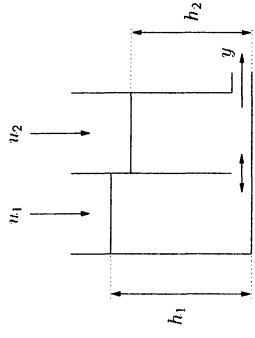
### 2.2

Visa att följande system med två insignaler

2.4

(LiTH)

Betrakta en tank med mellanvägg. Denna vägg har ett hål.



Infödet av vatten i vänstra halvan betecknas med  $u_1$  och i den högra med  $u_2$ . Dessa flöden är insignaler. Nivåerna i tankhalvorna betecknas med  $h_1$  resp.  $h_2$ . Utfödet  $y$  betraktas som proportionellt mot nivån i högra tankhalvan:

$$y(t) = \alpha h_2(t)$$

Flödet mellan tankhalvorna är proportionellt mot nivåskillnaden

$$f(t) = \beta(h_1(t) - h_2(t))$$

(flöde från vänster till höger)

Vi tänker oss  $h_1, u_1$  och  $y$  som avvikelser från "normalflöden". Därmed kan de också anta negativa värden. Antag att tankarnas areor är  $A_1 = A_2 = 1$ .

- (a) Skriv upp överföringsfunktionen från  $u_1, u_2$  till  $y$ .
- (b) Beräkna den statiska förstärkningen för systemet, dvs förstärkningen vid frekvensen noll. (Detta är alltså en skalär).
- (c) Det visar sig att detta tal blir större än 1. Hur är detta möjligt? Hur kan tanken - i "steady-state" - producera mer vatten ut än det som hålls i? Förklara denna paradox!

2.5

(LiTH)

Find a representation of the system

$$G(s) = \left[ \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad \frac{s+3}{(s+1)(s^2+s+1)} \right]$$

on state-space form.

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \\ \vdots & \vdots \\ b_n & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

$$y(t) = (1 \ 0 \ \dots \ 0) x(t)$$

svarar mot insignal-utsignalformen

$$A(q)y(t) = B(q)u_1(t) + C(q)u_2(t)$$

där

$$A(q) = q^n + a_1 q^{n-1} + \dots + a_n$$

$$B(q) = b_1 q^{n-1} + \dots + b_n$$

$$C(q) = c_1 q^{n-1} + \dots + c_n$$

2.3

(LiTH)

A (highly) simplified description of an AC-generator is: The armature windings are fed with the magnetizing current  $I_m$  and the rotor is driven by the mechanical moment  $M$ . In stator windings a AC-voltage is induced with a peak voltage  $e$ . This circuit is connected over a resistance  $R$ . The angular velocity of the motor is  $\omega$ . This gives the following expressions

$$e = R \cdot I_f \quad (I_f = \text{peak value of the current in the secondary circuit})$$

$$J\dot{\omega} = M - M_e \quad (\text{Driving moment minus electrical moment from the emf})$$

$$M_e = K_e \cdot \omega \cdot I_f$$

$$e = C_e \cdot I_m \cdot \omega$$

We consider  $e$  and  $\omega$  as outputs,  $M$  and  $I_m$  as inputs and  $R$  as a disturbance. Write this system on state-space form. Linearize it around

$$\omega_0 = R_0 = I_{m0} = M = 1$$

and set

$$K_e = C_e = 1, \quad J = 1.$$

Derive the transfer function matrix from

$$u = \begin{bmatrix} \Delta M \\ \Delta I_m \\ \Delta R \end{bmatrix} \text{ till } y = \begin{bmatrix} \omega \\ e \end{bmatrix}$$

2.6

(T) (LiTH)

Realisera systemet

$$y(t) = \frac{p}{p^2 + 4p + 4} u_1(t) + \frac{p-1}{p^2 + 5p + 6} u_2(t)$$

på tillståndsförm.

2.7

(LiTH)

A system is described by the differential equation

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2y = b_{11}\dot{u}_1 + b_{12}u_1 + b_{21}\dot{u}_2 + b_{22}u_2.$$

Find a state-space description of the system.

2.8

(LiTH)

Betrakta systemet

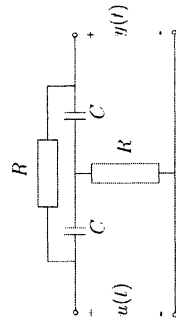
$$\begin{cases} \dot{y}_1 + y_2 = \dot{u} + 2u \\ \dot{y}_2 + y_2 + y_1 = u \end{cases}$$

Finn en tillståndsförm.

2.9

(Chalmers)

I figuren visas ett så kallat överbryggt T-nät.



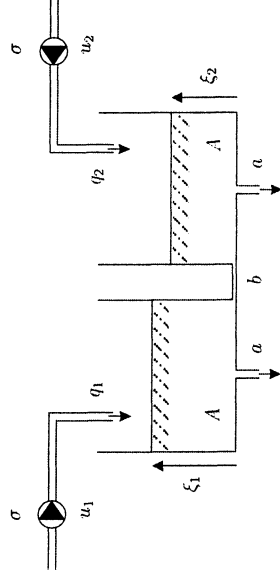
(a) Ange en tillståndsförm för systemet! Instorhet är spänningen  $u$  och utstorhet är spänningen  $y$ .

(b) Bestäm överföringsfunktionen från  $u$  till  $y$ ! Är detta ett minimumfssystem?

2.10

(Chalmers)

Betrakta de två identiska cylindriska kärlen i figuren. Vätskan kan rinna mellan kärnen i ett rör med tvärsnittsarean  $b$ . Vardera kärl har en bottenarea  $A$  och tvärsnittsarean i utloppsröret är  $a$ .



Systemets instorheter är inflödena  $q_1$  och  $q_2$  till de två tankarna. Dessa förhåller sig till de verkliga styrsignalerna till pumparna som

$$q_i = \sigma u_i, \quad i = 1, 2.$$

Vi låter nivåerna  $\xi_1$  och  $\xi_2$  som båda mäts, vara systemets tillstånd.

(a) Ange en tillståndsförm för detta system om utflödena antas följa Bernoullis ekvation!

(b) Vilka stationära flöden krävs för att nivåerna i tankarna skall vara

$$\bar{\xi}_1 = 9 \text{ dm} \text{ och } \bar{\xi}_2 = 8 \text{ dm?}$$

Följande värden kan antas:

$$A = 1 \text{ m}^2, \quad a = b = 1 \text{ dm}^2, \quad g = 9.8 \text{ ms}^{-2} \text{ och } \sigma = 0.1 \text{ dm}^3\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}.$$

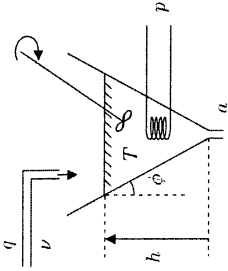
(c) Ange systemets linjäriserade tillståndsförm som gäller kring denna arbetspunkt!

2.11

(Chalmers)

Betrakta det trattformade kärlet i figuren. En vätska med densitet  $\rho$  och värme-kapacitet  $c$  tillförs kärlet. Flödet  $q$  med vilket detta sker, den tillförda vätskans

temperatur  $\nu$  och den tillförda effekten  $p$  för uppvärmningen av vätskan i kärlet är systemets instorheter. Denna tankprocess är väl omrörd. I botten av tanken finns ett utlopp med en liten area  $a$ . Vinkeln mellan trattens väggar och vertikallinjan är  $\phi$ .



(a) Låt vätskans temperatur  $T$  i tanken och nivån  $h$  på vätskytan vara systemets tillstånd. Ange systemets tillståndsmodell!

(b) Ange motsvarande linjära tillståndsmodell, som gäller nära arbetspunkten  $h = \bar{h}$  och  $T = \bar{T}$ , när inflödet temperatur varierar kring  $\bar{p}$ ! Vi kan anta att  $\bar{T} > \bar{p}$ . (Börja med att bestämma de stationära värdena  $q$  och  $p$ ).

(c) Vilka är systemets tidskonstanter?

Använd parametervärdena

$$\begin{aligned} \phi &= 44.34^\circ & a &= 0.226 \text{ dm}^2 & q &= 9.8 \text{ ms}^{-2} & \rho &= 1.0 \text{ kg/dm}^3 \\ c &= 4 \text{ kJ/(kgK)} & \bar{h} &= 1.0 \text{ m} & \bar{T} &= 20^\circ\text{C} & \bar{p} &= 10^\circ\text{C} \end{aligned}$$

Introducera parametern  $k$ , definierad som

$$k = \frac{\pi \tan^2 \phi}{3} = 1,$$

för att förenkla räkningarna.

## 2.12

(Chalmers)

I en idealt omrörd tankreaktor sker en reversibel reaktion mellan ämnen A och B. De molära koncentrationerna av de två ämnen är  $c_A$  och  $c_B$  i inflödet och  $c_A$  och  $c_B$  i själva reaktorn. Reaktortvolymen  $V$  och flödet  $Q$  genom tanken kan antas vara konstanta.

Reaktionshastigheten med vilken ämne A övergår till ämne B är

$$r = f(c_A, c_B) = k \ln(c_A/c_B) \quad (\text{mol m}^{-3}\text{s}^{-1}).$$

(a) Ange en tillståndsmodell för reaktorn och bestäm vilka koncentrationer som behövs i inflödet för arbetspunkten

$$\bar{c}_A = 0.2 \text{ mol m}^{-3} \text{ och } \bar{c}_B = 0.1 \text{ mol m}^{-3}.$$

(b) Ange den lineariserade tillståndsmodellen för denna arbetspunkt! Låt

$$V = 1 \text{ m}^3, \quad Q = 1 \text{ dm}^3\text{s}^{-1} \text{ och } k = 10^{-4} \text{ mol m}^{-3}\text{s}^{-1}.$$

## 2.13

(T) (Chalmers)

Vid tillverkning av isolerande block för husgrunder blandas material från två olika transportband i ett cylindriskt kär (se figur). På det ena transportbandet tillförs lerkulor av två olika dimensioner och på det andra tillförs bindemedel. Tillförseln sker via buffertankar. I kärlet tillförs med konstant flöde vatten under omrörning. Från botten av kärlet suges den färdiga blandningen vidare till gjutningen av blocken. Vikten på båda transportbanden mäts, liksom även höjden i kärlet.

Vi låter  $\Delta$  beteckna avvikelser från arbetspunkt och  $u_1$ ,  $u_2$  och  $u_3$  signalerna till pumparna som matar buffertankarna,  $m_1$  och  $m_2$  massorna på transportbanden och  $h$  nivån i kärlet. Med dessa beteckningar har man experimentellt bestämt överföringsfunktionerna

$$\begin{aligned} \frac{\Delta M_1(s)}{\Delta U_1(s)} &= \frac{1}{1+s}, & \frac{\Delta M_1(s)}{\Delta U_2(s)} &= \frac{1}{1+2s}, & \frac{\Delta M_2(s)}{\Delta U_3(s)} &= \frac{1}{1+s}, \\ \frac{\Delta H(s)}{\Delta I(s)} &= \frac{1}{1+3s}, & \frac{\Delta H(s)}{\Delta M_2(s)} &= \frac{1}{1+3s} \end{aligned}$$

### 3.2

Consider the system

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} -1 & 1.5 \\ -3 & 3.5 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} -1 & 0.5 \\ -2 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

- Is the system stable?
- Is there a state feedback stabilizing the system?
- Can the system be stabilized only using input  $u_1$ ?

### 3.3

Är systemet

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

styrbart?

Man försöker nu styra systemet från  $w(t)$ , där

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} w(t)$$

Är systemet styrbart från  $w(t)$  enbart?

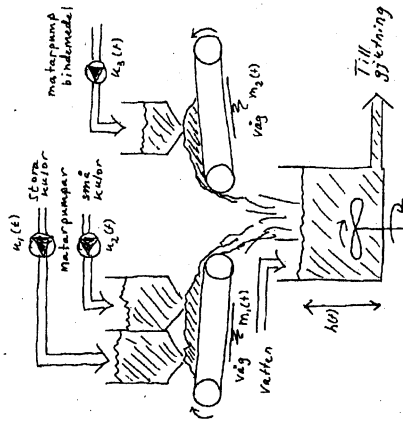
### 3.4

Betrakta följande tidsdiskreta system:

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u(t)$$

Bestäm om möjligt styrsignalen  $u(t)$  så att systemets tillstånd ändras från  $x(0)$  till  $x(t^*)$  på högst två samplingsintervall, då

$$(a) \quad x(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad x(t^*) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$



(a) Ta fram den överföringsmatris  $G(s)$  som beskriver hur de tre insignalerna påverkar de tre mätta utsignalerna!

(b) Bestäm det flervariabla systemets poler och nollställen i denna arbetspunkt!  
Tipp:  $\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2$

(c) Är systemet av minimumfasyp?

(d) Hur många tillstånd krävs vid en realisering av  $G(s)$ ?

## 3 Egenskaper hos linjära system

### 3.1

Är systemet

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

Styrbart? Observerbart?

(b)

$$x(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

I båda fallen gäller alltså  $t' = 1$  eller  $t' = 2$ . Ge en förklaring till de erhållna resultaten.

### 3.5

Betrakta systemet

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

Antag att matrisen  $F$  har alla egenvärden reella och olika:  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , där  $\lambda_1$  har störst absolutvärde. Låt motsvarande egenvektorer vara  $v_1, \dots, v_n$ . Antag att  $x(0)$  har någon komponent utmed  $v_1$  i basen av egenvektorer, och att  $u(t) = 0$ . Visa att då blir  $x(t)$  asymptotiskt parallell med  $v_1$ , då  $t$  går mot oändligheten.

### 3.6

För vilka värden på  $a$  och  $b$  har ekvationen

$$z^2 + az + b = 0$$

alla rötter innanför enhetscirkeln?

### 3.7

Ett samplat system med överföringsfunktionen

$$H(q) = \frac{K}{q(q + \frac{1}{4})(q + \frac{1}{2})}$$

återkopplas med  $-1$ . Bestäm med hjälp av rotortmetoden för vilka  $K$ -värden som det återkopplade systemet är stabilt.

### 3.8

Betrakta det samplade systemet

$$y(t+1) = 0.9y(t) + u(t)$$

som regleras med en PI-regulator

$$u(t) = K_1 e(t) + \frac{K_2}{1 - q^{-1}} e(t)$$

där

$$e(t) = r(t) - y(t)$$

Välj  $K_1 = 1$  och bestäm för vilka  $K_2$  slutna systemet är stabilt. Rita rotort med avseende på  $K_2$ .

### 3.9

Systemet

$$y(t) - \alpha y(t-1) = u(t)$$

återkopplas med regulatorn

$$u(t) = -K(y(t-1) + y(t-2)) + r(t).$$

där  $r(t)$  är referenssignalen till regulatorn. Talet  $\alpha$  är större än 1. Skissa rotorten för det slutna systemets poler med avseende på  $K$ . För vilka  $\alpha$  är det slutna systemet instabilt för alla värden på  $K$ ?

### 3.10

Systemet

$$y(t) = \frac{1}{q^2(q-0.5)} u(t)$$

$P$ -återkopplas; dvs  $u(t) = -Ky(t)$ . Avgör för vilka värden på  $K$  systemet är stabilt och skissa rotorten i a p  $K$ .

### 3.11

(a) Man vill reglera det tidsdiskreta systemet

$$y(t) = 1.2y(t-1) - 0.11y(t-2) + u(t-1) + 0.5u(t-2)$$

med en  $P$ -regulator

$$u(t) = K(r(t) - y(t))$$

Rita rotort m.a.p.  $K$  för det återkopplade systemet och ange för vilka  $K$ -värden ( $K > 0$ ) det blir stabilt.

(b) Man försöker förbättra regleringen genom att införa en PD-regulator

$$u(t) = K(r(t) - y(t) - T_D(y(t) - y(t-1)))$$

där  $T_D = 1$ . Rita rotort för detta system och ange för vilka  $K > 0$  det är stabilt.



**3.12**

Determine the poles and zeros for the following system with three inputs and two outputs:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} & \frac{3}{s+2} & \frac{3}{s+1} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

**3.13**

(LiTH)

Betrakta överföringsmatrisen

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+2} & -\frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{s+1}{s+2} & \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+2} \end{pmatrix}$$

Bestäm detta systems pol- och nollställes polynom. Vilket ordningstal behövs för en tillståndsrealisering?

**3.14**

(LiTH)

Bestäm poler och nollställen till

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2(s+1)^2 \end{pmatrix}$$

**3.15**

(LiTH)

Determine the poles (with multiplicity) to the system

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \begin{bmatrix} 1-s & \frac{1}{2} - s \\ 2-s & 1-s \end{bmatrix}.$$

What is the order for a minimal realization?

**3.16**

(LiTH)

(a) Vilket ordningstal krävs för att realisera

$$G(s) = \begin{pmatrix} -\frac{s+5}{s^2+3s+2} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \end{pmatrix}$$

på tillståndsform?

(b) Samma fråga för

$$G(s) = \begin{pmatrix} -\frac{s+5}{s^2+3s+4} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{1}{s+4} & \frac{1}{s+2} \end{pmatrix}$$

**3.17**

(LiTH)

Ett system beskrivs av följande in-/utsignal samband

$$\begin{cases} \dot{y}_1 + y_1 - \dot{y}_2 = u_1 - u_2 \\ \dot{y}_2 + \dot{y}_1 + y_2 = u_1 + u_2 \end{cases}$$

Skriv systemet som en matriskvot ( $y(t) = A(p)^{-1}B(p)u(t)$ ) samt ange systemets poler och nollställen.

**3.18**

(T) (LiTH)

Betrakta MIMO-systemet nedan:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) \end{aligned}$$

där  $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ ,  $y = [y_1 \ y_2]^T$  och  $u = [u_1 \ u_2]^2$ .

Ta fram en minimal realisering av systemet, d.v.s. en realisering som både är styrbar och observerbar.

**3.19**

(Chalmers)

Ett andra ordningens system ges av tillståndskvationerna

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x &= Ax + Bu \\ y &= C^T x \end{aligned}$$

där matriserna  $B$  och  $C$ , samt systemets övergångsmatris, ges av

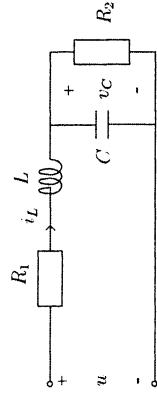
$$\begin{aligned} B &= \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \end{bmatrix} & C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\ e^{At} &= \begin{bmatrix} e^{-t}(\cos t - \sin t) & e^{-t} \sin t \\ -2e^{-t} \sin t & e^{-t}(\cos t \sin t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- (a) Bestäm systemets impulssvar och överföringsfunktion!  
 (b) Är systemet stabilt?

**3.20**

(Chalmers)

Betrakta den elektriska kretsen med inspänningen  $u$  i figuren.



- (a) Välj strömmen genom induktansen och spänningen över kapacitansen som tillståndstorheter och ställ upp tillståndsekvationerna på formen

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t).$$

- (b) Beräkna övergångsmatrisen  $\Phi(t) = e^{At}$  för fallet

$$R_1 = R_2 = 1 \Omega, L = 1 \text{ H}, \text{ och } C = 1 \text{ F!}$$

- (c) Kretsen är ansluten till en ackumulator, som har mycket låg inre resistans och vars EMK är 2 V. Stationärt tillstånd råder i kretsen. Den något opraktiske Flinko Filip kommer nu in på labbet. Filips första åtgärd är att lägga sin lägenhetsnyckel över ackumulatorns polskruvar (vid  $t = 0$ ) varvid ackumulatorn kokar. Rita in kretsens tillståndstorheter i ett diagram för  $0 < t < 3$  sekunder!

**3.21**

(Chalmers)

Betrakta följande linjära modell:

$$\frac{d}{dt}x(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt}u(t)$$

En linjär modell på standardformen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

önskas, vilket kan uppnås genom transformationen

$$x(t) = Tz(t) + Su(t).$$

Bestäm lämpliga transformationsmatriser  $T$  och  $S$ , samt ange den resulterande tillståndsmodellen! (Notera att  $u(t)$  och  $y(t)$  måste ha samma innehåll i den ursprungliga modellen med  $x$  som tillstånd och i den nya modellen med  $z$  som tillstånd.)

**3.22**

(Chalmers)

Ett dynamiskt system ges av en skalär differentialekvation tillsammans med ett algebraiskt uttryck:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\xi &= -\xi + u\eta^3 \\ 0 &= -\eta + u^2e^\eta. \end{aligned}$$

- (a) Ett regelsystem, som syftar till att hålla systemet vid en given stationär arbetspunkt  $\xi_0$ , skall designas. Bestäm den fullständiga arbetspunkten  $(\xi_0, u_0, \eta_0)$  när  $\xi_0 = 1$ !  
 (b) Systemets insignal är  $u$  och dess utsignal är  $y = \eta\xi$ . Bestäm en linjär tillståndsmodell, som är giltig nära arbetspunkten i a-uppgiften!  
 (c) Hur beror systemets stabilitet på den stationära arbetspunkten  $(\xi_0)$ ?

**3.23**

(Chalmers)

Följande tillståndsmodell är given:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= (1 \ -1) x(t) \end{aligned}$$

Undersök systemets stabilitet, styrbarhet och observerbarhet!

**3.24**

(Chalmers)

Ett MIMO-system ges av av följande modell:

$$\frac{d}{dt}x(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u(t)$$

Utred styrbarheten hos systemet för olika värden på  $\alpha$  och  $\beta$ !

**3.25**

(Chalmers)

Ett styrbart och observerbart tidsinvariant MIMO-system ges av

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$$

Visa att en linjär transformation  $x = Tz$ , där  $T$  är icke-singulär, ej påverkar systemets styrbarhet och observerbarhet!

**3.26**

(Chalmers)

I en autonom biologisk process förekommer två organismer ( $A$  och  $B$ ). De två organismerna samverkar så att de tillväxer proportionellt mot bada koncentrationerna,  $c_A$  och  $c_B$ . Samtidigt dör organismerna av i en hastighet proportionell mot deras antal. Processen beskrivs av följande bilinjära tillståndsekvationer:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}c_A &= -c_A + \alpha c_A c_B \\ \frac{d}{dt}c_B &= -c_B + \beta c_A c_B \end{aligned}$$

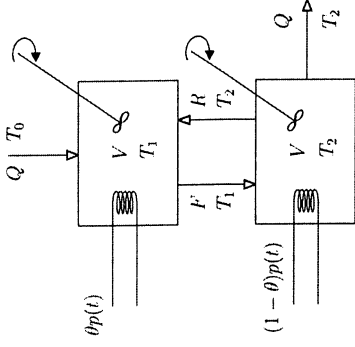
Det aritmetiska medelvärdet  $c_M = 0.5(c_A + c_B)$  mäts.

- (a) Bestäm systemets två möjliga stationära tillstånd och ange de linjariserade tillståndmodellerna kring dessa arbetspunkter!
- (b) Är de två modellerna stabila för alla kombinationer av processparametrarna  $\alpha$  och  $\beta$ ?
- (c) Är de två modellerna observerbara för alla kombinationer av  $\alpha$  och  $\beta$ ?

**3.27**

(Chalmers)

Betrakta systemet av idealt omrörda tankar i figuren. Den tillförda effekten  $p(t)$  i den elektriska uppvärmningen är systemets enda styrvariabel och temperaturvariationerna i det inkommande vattnet är den huvudsakliga störvariabeln. Uppvärmningseffekten är uppdelad i en konstant andel  $\theta$  mellan de två tankarna.  $d$  v s till den övre tanken tillförs effekten  $\theta p(t)$  och till den nedre tanken tillförs effekten  $(1 - \theta)p(t)$ .

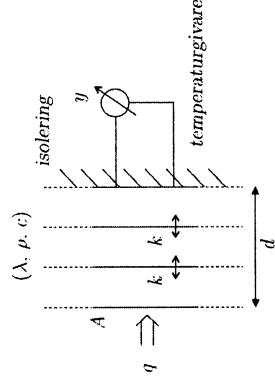


- (a) Välj temperaturerna i varje tank som systemets tillstånd och ange tillståndsekvationerna på formen  $\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t)$ .
- (b) Anta att volymerna i de två tankarna är  $V = 1 \text{ m}^3$  och att flödena är  $R = Q = 1 \text{ m}^3$ . Bestäm konditionsstalet för styrbarhetsmatrisen  $\mathcal{S}(A, B)$  för de två fallen  $\theta = 0.6$  och  $\theta = 0.4$ .
- (c) Finns det något värde på  $\theta$  då systemet ej är styrbart?

**3.28**

(Chalmers)

I figuren illustreras en homogen metallplatta med tjockleken  $d$ , ytan  $A$ , tätheten  $\rho$  och specifika värmekapaciteten  $c$ . Plattans värmekonduktivitet är  $\lambda$ .



För att förenkla den matematiska beskrivningen delas plattan in i  $N$  lika tjocka skikt där temperaturen approximativt anses konstant (in a p rumskoordinaten) inom skiktet. Vi kan då representera värmeledningen med  $N - 1$  rumsdiskreta värmeövergångstal

$$k = \frac{(N - 1)\lambda}{d}$$

Till plattans ena sida tillföres styreffekten  $q$  W/m<sup>2</sup>. Den andra sidan, som är termiskt isolerad, är försedd med en kontinuerlig temperaturmätare.

- (a) Antag att tre skikt är en lämplig approximationsnivå. Uppställ en tillståndsmodell för systemet!
- (b) Undersök om systemet är styrbart och observerbart!
- (c) Är systemet stabilt?

### 3.29

(T) (UU)

A simplified model of an inverted pendulum on a cart is given as follows

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ b_4 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

Here,  $x_1$  denotes the angular displacement of the pendulum,  $x_2$  its angular velocity,  $x_3$  the position of the cart,  $x_4$  the velocity of the cart, and  $u$  is the applied force. The servo for controlling the cart is assumed fast in the model. Further, the matrix elements in the model above are

$$a_{21} = \frac{3(m + M)g}{(m + 4M)L} \quad a_{41} = -\frac{3mg}{m + 4M}$$

$$b_2 = -\frac{3}{L(m + 4M)} \quad b_4 = \frac{4}{m + 4M}$$

where  $m$  is the mass of the pendulum,  $M$  is the mass of the cart,  $L$  is half the pendulum length,  $g$  is the constant of gravity.

- a) Use the first two state equations to derive

$$(p^2 - a_{21})x_1 = b_2u$$

- b) Use also the remaining state equations to derive

$$p^2(p^2 - a_{21})x_3 = [b_4p^2 + (b_2a_{41} - b_4a_{21})]u$$

- c) Determine the transfer function, from  $u$  to  $y$ , of the system. Also determine the poles and the zeros of the system.

### 3.30

(T) (LiTH)

A multivariable system consists of two coupled parallel tanks, and has the dynamics

$$\frac{d}{dt}x = \begin{pmatrix} -1 - \alpha & \alpha \\ \alpha & -1 - \alpha \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

The coefficient  $\alpha$  depends on the size of an opening between the two tanks, and  $\alpha > 0$  holds.

- (a) What is the transfer function of the system?
- (b) Verify that one of the poles is always located in  $s = -1$ , no matter what value  $\alpha$  has. Where is the other pole located?
- (c) Verify that the system has no zeros, no matter what value  $\alpha$  takes.

### 3.31

(T) (Chalmers)

Betrakta följande system:

$$\frac{d}{dt}x(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

- (a) Finns det värden på  $a$  för vilket systemet inte är styrbart?

- (b) Finns det värden på  $a$  för vilket systemet inte är stabilt?

a) The system  $G_1$  has the transfer function

$$G_1(s) = \left( \frac{2 \frac{s-2}{s+3}}{\frac{s+6}{s+1} \frac{s+3}{s+3}} \right) \quad (3 \text{ p})$$

Calculate the poles and zeros of  $G_1$  with multiplicity.

b) The system  $G_2$  is

$$G_2(s) = \left( -\frac{s+1}{s+1} \frac{\frac{s+2}{s+6}}{\frac{s-1}{4s^2+4s+1}} \right)$$

Assume that a constant input signal  $u$  shall be used to obtain

$$y(t) = y_{ref} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in stationarity. Explain why this is impossible. (2 p)

c) A square linear system  $G_3(s)$  with two inputs and two outputs has the following properties:

- $\text{rank}(G_3(0)) = 2$ .
- $\det(G_3(j\omega_1)) = 0$  for some  $\omega_1$

Consider an input signal on the form

$$u(t) = \begin{pmatrix} \alpha \sin(\omega_1 t) \\ \beta \sin(\omega_1 t + \varphi) \end{pmatrix}$$

where all parameters are real and  $\omega_1 > 0$ ,  $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ . Experiments with  $G_3$  show that for a particular choice of  $\alpha, \beta$  and  $\varphi$  the output signal  $y$  is zero, after initial transients have decayed.

- i) What can be said about the zeros of  $G_3$ ? (2 p)
- ii) Explain why the particular choice of input signal described above gives zero output. (2 p)
- iii) What can be said about the poles of  $G_3$ ? (1 p)

## 4 Samplade system

### 4.1

(T)

The system

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

is sampled with sampling interval  $T$ . Determine the system matrices for the sampled system on state-space form. For what values of  $T$  is the sampled system observable?

### 4.2

(T)

Consider the system

$$\dot{x} = Ax$$

$$y = Cx$$

where

$$A = \begin{bmatrix} \sigma & -\omega \\ \omega & \sigma \end{bmatrix}, \quad \omega \neq 0$$

(a) Show that  $x(t)$  can be computed from measurements of  $y(t)$  irrespectively of the value of  $C \neq 0$ .

(b) Assume that we measure  $y(T)$ ,  $y(2T)$ ,  $y(3T)$ , ... For what values on  $T$  is it possible to compute  $x(t)$  from these measurements? Prove that these values of  $T$  are independent of  $C \neq 0$ .

(c) Assume that we have the same measurements as in b) but

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$$

When can  $x(t)$  be computed from the measurements?

### 4.3

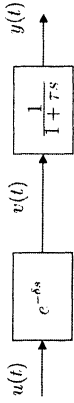
(Chalmers)

Ett första ordningens system med dödtid ges av  $Y(s) = G(s)U(s)$ , med överföringsfunktioner

$$G(s) = \frac{e^{-\delta s}}{1 + \tau s}$$

där  $\delta$  och  $\tau$  är konstanter. Systemet är samplat och insignalen  $u(t)$  är konstant mellan varje samplingstillfälle. Vidare gäller att  $\delta < h$ , där  $h$  är tiden mellan två samplingstillfällen.

Den mot  $G(s)$  svarande diskreta överföringsfunktionen  $H(z)$  skall bestämmas. En metod, där  $G(s)$  delas upp i en tidsfördröjning och en första ordningens process, föreslås (se figur):



Formulera en tillstandsmodell för processen med  $v(t)$  som insignal och  $y(t)$  som utsignal!

Bestäm faltningintegralen som beskriver hur utsignalen beror på insignalen!

Bestäm  $v(t)$  som funktion av  $u(t)$  för det ur regleringssynpunkt intressanta intervallet

$$kh - lh < t < kh, \quad k = 1, 2, \dots$$

Efter att ha satt in detta i integraluttrycket följer enkelt en diskret tillstandsmodell ur vilken  $H(z)$  kan bestämmas. Genomför dessa räkningar!

#### 4.4 (Chalmers)

Consider the system given by the following two state-space equations:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + u \end{aligned}$$

where the operator  $p$  represents differentiation with respect to time.

- (a) Show that the system is controllable!  
 (b) Investigate if the controllability of the corresponding discrete-time system for piecewise constant input  $u$  depends on the sampling interval  $T$ . Are there any critical values of  $T$ ?

#### 4.5 (T) (KTH)

Sample the unstable process  $G(s) = \frac{1}{s-1}$  med samplingintervallet  $T$ . Insignalen antas vara styckvis konstant. Bestäm sedan en tidsdiskret P-regulator  $u(kT) =$

$-Ky(kT)$  så att det återkopplade tidsdiskreta systemets pol hamnar i  $e^{-2T}$  (motsvarar en tidskontinuerlig pol i  $s = -2$ )

## 5 Störningsmodeller

### 5.1

Betrakta den stokastiska processen

$$y(t) + ay(t-1) = e(t) + ce(t-1) \\ |e| < 1, \quad |c| < 1$$

där  $e(t)$  är en svit av oberoende stokastiska variabler med

$$Ee(t) = 0, \quad Ee^2(t) = 1.$$

Vi skall i detta problem diskutera några olika sätt att beräkna  $V = Ey^2(t)$ .

- (a) Bestäm spektral tätheten för  $y(t)$  och använd denna för att beräkna  $V$ .  
 (b) Sätt  $v(t) = c(t+1)$ . Skriv systemet på tillstandsform. Välj  $x_1(t) = y(t)$ ,  $x_2(t) = v(t-1)$ .  
 (c) Bestäm den stationära variansen  $V$  genom att utnyttja tillståndsrepresentationen i (b).  
 (d) Bestäm koefficienterna  $h_k$  i representationen

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k e(t-k)$$

av processen. Utnyttja resultatet för att bestämma  $V$ .

### 5.2 (LiTH)

En kontinuerlig stokastisk process har effektspektrum  $\Phi(\omega)$ . Ange hur processen kan representeras genom att sända vitt brus genom ett linjärt filter. Bestäm det linjära filtret då

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \Phi(\omega) &= \frac{a^2}{\omega^2 + a^2} \\ \text{(b)} \quad \Phi(\omega) &= \frac{a^2 b^2}{(\omega^2 + a^2)(\omega^2 + b^2)} \end{aligned}$$

### 5.3

Den tidsdiskreta signalen  $w(t)$  har spektrum  $\Phi_w(\omega)$ . Beskriv signalen (om det går) som impulsvarett till ett stabilt linjärt system i följande fall:

$$(a) \Phi_w(\omega) = \frac{1.25 + \cos \omega}{1.64 + 1.6 \cos \omega}$$

$$(b) \Phi_w(\omega) = \frac{1}{(1 + a^2 + b^2) + 2(a + ab) \cos \omega + 2b \cos 2\omega}$$

där  $b > 0$  och  $|a| < 1$ .

$$(c) \Phi_w(\omega) = \frac{1}{\cos \omega}$$

### 5.4

(T) (LiTH)

En stationär stokastisk process  $y(t)$  har spektral tätheten

$$\tilde{\phi}(\omega) = \frac{10 - 6 \cos \omega}{1.25 - \cos \omega}$$

Beskriv  $y(t)$  som vitt brus filtrerat genom ett linjärt minfas-system.

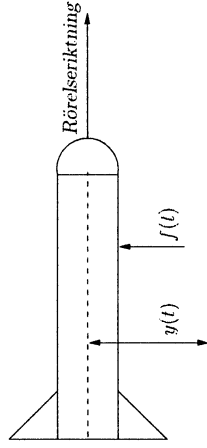
### 5.5

(LiTH)

En enkel modell för sidstyrning av en robot kan skrivas

$$m\ddot{y}(t) = f(t)$$

där  $y(t)$  är robotens läge mätt tvärs rörelseriktningen,  $m$  är robotens massa och  $f(t)$  är kraften på roboten, tvärs rörelseriktningen:



Kraften  $f(t)$  hör till styrningen, dvs roderutslaget  $u(t)$  och dels från vindstörningar  $z(t)$ .

$$f(t) = Ku(t) + z(t)$$

Roboten styrs av en dator som samplar signalerna med 10 Hz samplingsfrekvens. Ange en modell för robotdynamik och vindstörning som är lämplig då

(a) Man studerar robotens uppförande vid ett plötsligt vindkast.

(b) Man studerar robotens uppförande i normala vindförhållanden. Det är då lämpligt att beskriva vindkraften  $z(t)$  som en stokastisk process, för vilken värdena vid näraliggande tidpunkter är starkt positivt korrelerade, t ex en AR(1)-process med  $a$ -parametern  $-0.9$ .

### 5.6

Betrakta lagerstyrningsproblemet i avsnitt 2.6 i läroboken. Antag att man vill beskriva  $w(t) =$  lageruttagen = försäljningen som en AR-process, alltså

$$w(t) + a_1w(t-1) + a_2w(t-2) = \nu(t)$$

där  $\nu$  är en enhetsstörning. Ange en modell för lagerstyrningen, både på insignal-utsignalform och på tillståndsform.

### 5.7

(LiTH)

Betrakta en missil som drivs av dragkraften  $u$ . Dess lägeskoordinat är  $z$ . Luftmotståndet kan förenklat beskrivas som

$$f = k_1\dot{z} + v,$$

där  $v$  är mer eller mindre slumpmässiga variationer (vindbyar).

(a) Skriv ner, både på tillståndsform och på insignal/utsignal-form, hur den styrda utsignalen  $z$  beror på  $u$  och  $v$ !

(b) Systemstörningen  $v$  har beräknats ha spektral tätheten

$$\Phi_v(\omega) = k_0 \cdot \frac{1}{\omega^2 + a^2}, \quad (a > 0)$$

Utöka tillståndbeskrivningen i (a) så att systemstörningen kan uttryckas m h a vitt brus!

**5.8**

(LiTH)

Tidsenheten är sekunder. Vidare är  $v(t)$  oberoende normalfördelat brus med  $v(t) \in N(0, 0.1), \forall t$ .

Antag, i uppgift 5.7, att lägeskoordinaten  $z$  mäts med ett mätfel  $n(t)$ , dvs

$$\hat{y}(t) = z(t) + n(t).$$

Skriv ner, på standard tillståndsform, modellen för missilen om

(a)  $n(t)$  är vitt brus med intensiteten 0.1 ( $\Phi_n(\omega) \equiv 0.1$ ).

(b)  $\Phi_n(\omega) = 0.1 \frac{\omega^2}{\omega^2 + b^2}$  ( $b > 0$ )

(c)  $\Phi_n(\omega) = 0.1 \frac{1}{\omega^2 + b^2}$  ( $b > 0$ )

**5.9**

Systemet (samplade dubbelintegrator)

$$x(t+T) = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} T^2/2 \\ T \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

är givet.

Bestäm  $K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$  i observatören,

$$\hat{x}(t+T) = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{x}(t) + \begin{pmatrix} T^2/2 \\ T \end{pmatrix} u(t) + K(y(t) - \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{x}(t)),$$

sa att estimeringsfelet  $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  blir noll på två samplingsintervall. (Deadbeat estimering)

**5.10**

En spårningsstation på jorden följer en satellit, vars ena styrraket är igång. Satelliten kan, för de tider det här är fråga om, beskrivas med koordinaten  $y$  enligt

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v(t) + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

där  $x_1$  är satellitens läge  $y$  och  $x_2$  är satellitens hastighet.

Vid tiden  $t = 0$  går huvuddatorm sänder. Reservdatorm tar över efter 3 sekunder. Läget  $y(t)$  är exakt känt för  $t \leq 0$ .

(a) Var skall man börja leta, uttryckt i gamla värden för  $y(t)$  för att man med största sannolikhet skall hitta satelliten vid tiden  $t = 3$ ?

(b) Vilken varians har man i skattningen av  $y(3)$ ?

**5.11**

Signalen  $z(t)$  definieras genom

$$z(t) = az(t-1) + v(t)$$

där  $\{v(t)\}$  är vitt brus med medelvärde noll och varians ett. Den observeras med mätbrus:

$$y(t) = z(t) + e(t)$$

där  $\{e(t)\}$  är vitt brus med medelvärde noll och variansen ett, vilket är oberoende av  $\{v(t)\}$ . Man vill skatta  $z(t)$  från  $y(s), s \leq t$  med hjälp av exponentiell utjämning:

$$\hat{z}(t) = k\hat{z}(t-1) + (1-k)y(t)$$

Anges ett uttryck för hur variansen för felet  $z(t) - \hat{z}(t)$  beror på parametern  $k$ .

**5.12**

Givet systemet

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

Man bygger en observatör för tillståndet  $x_2$  enligt

$$\hat{x}_2(t+1) = 0.9\hat{x}_2(t) + 0.1 \cdot y(t) + 3u(t) + K \cdot (y(t+1) - 0.8y(t) - 0.2\hat{x}_2(t) - 2u(t))$$

Välj talet  $K$  i denna reducerade observatör så att skattningsfelet blir noll efter ett ändligt antal steg.



### 5.13

(LiTH)

I flygplan mäts i regel såväl acceleration som hastighet. Accelerationen mäts med accelerometrar och hastigheten beräknas från luftdatamätningar (dynamiskt tryck o d). Mätningarna är således oberoende, men självklart är de mätta storheterna relaterade.

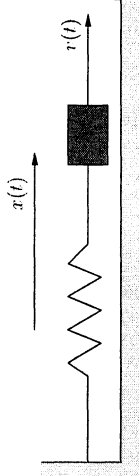
(a) Sätt upp ett dynamiskt system som beskriver sambanden. Låt de mätta värdena på hastighet respektive acceleration vara utsignaler och antag att derivatan av accelerationen är vitt brus. Antag att felen vid mätning av acceleration och hastighet kan beskrivas som oberoende vita brus.

(b) Diskutera hur man med Kalmanfiltrering kan uppnå bättre skattningar av såväl hastighet som acceleration.

### 5.14

(LiTH)

Ett dynamiskt system enligt figuren beskrivs av differentialckvationen



$$\ddot{x}(t) + x(t) = v(t)$$

Den yttre kraften  $v(t)$  är vitt brus med

$$E v(t) = 0$$

$$E v(t)v(s) = \delta(t-s)$$

Man vill ur mätningar räkna fram både läget  $x(t)$  och hastigheten  $\dot{x}(t)$  i varje tidpunkt. Man har tillgång till givare både för hastighet och läge men vill av kostnadsskäl bara ha en givare. Man har alltså att välja mellan

Alternativ I:

$$\text{Mätningen är } y_1(t) = x(t) + e_1(t)$$

Alternativ II:

$$\text{Mätningen är } y_2(t) = \dot{x}(t) + e_2(t)$$

Här är  $e_1(t)$  och  $e_2(t)$  de mätfel man får. Vi antar för enkelhets skull att båda är vita brus med

$$E e_1(t) = E e_2(t) = E[e_1(t)e_2(s)] = 0$$

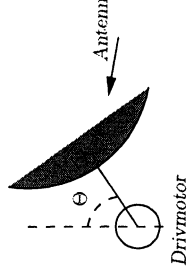
$$E e_1(t)e_1(s) = E e_2(t)e_2(s) = \delta(t-s)$$

Änge för vart och ett av alternativen det linjära filter som ur mätningar upp till tiden  $t$  ger den bästa skattningen av  $x(t)$  och  $\dot{x}(t)$  (bäst i den meningen att skattningens varians blir så liten som möjligt) i stationärt tillstånd. Ange också, med motivering, vilket alternativ som är bäst.

### 5.15

(LiTH)

Betrakta radarantennen i figuren.



Man vill från brusiga mätningar av antennens läge  $\Theta_m$  filtrera fram ett estimat av dess verkliga läge  $\Theta$ . För att kunna göra detta måste man ha en modell av systemet. Beskriv därför antennens dynamik med ekvationen

$$J\ddot{\Theta}(t) + B\dot{\Theta}(t) = \tau(t) + \tau_d(t).$$

Där  $J$  är tröghetsmomentet för de rörliga delarna på antennen.  $B$  är den viskösa friktionskoefficienten.  $\tau(t)$  är det vridmoment som motorn ger.  $\tau_d(t)$  är det vridmoment som orsakas av vinden. Antag att  $\tau_d(t)$  kan modelleras som vitt brus. Antag vidare att vridmomentet  $\tau(t)$  är proportionellt mot den pålagda spänningen över motorn,  $\mu(t)$ , dvs

$$\tau(t) = k\mu(t)$$

Låt oss till sist för enkelhets skull anta att mätfelet kan modelleras som additivt vitt brus  $e_m(t)$ . Utsignalen kan således beskrivas som

$$\Theta_m(t) = \Theta(t) + e_m(t).$$

Diskutera hur man m h a Kalman-filtret kan estimera fram  $\Theta(t)$  ur  $\Theta_m(t)$ . Tekniska data:

$$B/J = 4.6 \text{ s}^{-1}$$

$$k/J = 0.787 \text{ rad/us}^2$$

$$J = 10 \text{ kg m}^2$$

$$E \tau_d(t) \tau_d(s) = V_d \cdot \delta(t-s) = 10 N^2 m^2 \cdot \delta(t-s)$$

$$F \epsilon_m(t) \epsilon_m(s) = v_m \delta(t-s) = 10^{-7} \text{ rad}^2 \cdot s \cdot \delta(t-s)$$

### 5.16

(a) Betrakta systemet

$$x(t+1) = x(t) + v(t)$$

$$y(t) = x(t) + e(t)$$

där  $v(t)$  och  $e(t)$  är oberoende vita brus med medelvärde 0 och varians ett. Systemets tillstånd skattas med ett Kalmanfilter

$$\hat{x}(t+1) = \hat{x}(t) + \bar{K}(y(t) - \hat{x}(t)).$$

Ange  $\bar{K}$ .

(b) Antag istället att vi skattar tillståndet med en observatör

$$\hat{x}(t+1) = \hat{x}(t) + K(y(t) - \hat{x}(t)).$$

Gör en grov skiss av hur variansen för skattningsfelet  $x(t) - \hat{x}(t)$  beror av förstärkningen  $K$ . För vilka värden är variansen definierad? Vilket värde på  $K$  minimerar variansen? Ange skattningsfelets varians för detta minimerande  $K$ .

### 5.17

Betrakta en elektrisk motor med överföringsoperatorn

$$G(p) = \frac{1}{p(p+1)}$$

från pålagd spänning till verkligt vinkelläge. Motorn arbetar i två olika sörsituationer:

i.

$$y(t) = G(p)u(t) + w(t)$$

ii.

$$y(t) = G(p)u(t) + w(t)$$

I båda fallen är  $w(t) = \frac{1}{T}v(t)$  där  $v(t)$  är en enhetsstörning (t ex en impuls).

(a) Realisera de båda fallen på tillståndsform. I fallet ii) antages att störningen inte ger upphov till gemensamma tillstånd med motorn.

(b) Ge exempel på fysikalisk tolkning av vad störtermen  $w(t)$  kan vara i de båda fallen.

(c) Studera de båda tillståndsrealiseringarna. Är alla tillstånd styrbara? Kan tillstånd som svarar mot  $w(t)$  göras icke observerbara i  $y(t)$ . Kan inverkan av  $w(t)$  på  $y(t)$  elimineras?

### 5.18

Betrakta följande system

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} 0.8 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} w(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

där  $w(t)$  är en stokastisk process med spektralitet

$$\Phi_w(\omega) = \frac{1}{1.25 - \cos(\omega)}$$

Visa hur ovanstående tillståndsmodell kan utökas så att den kan uttryckas på formen

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + Gv(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

där  $v(t)$  är vitt brus.

### 5.19

Betrakta en gungas rörelse i blåst. Gungan beskrivs av överföringsfunktionen

$$y(t) = \frac{1}{p^2 + p + 1} u(t)$$

där utsignalen  $y(t)$  är vinkelutslaget och insignalen  $u(t)$  är momentet kring upphängningspunkten. Vindens inverkan kan beskrivas som

$$u(t) = Kv(t)$$

där  $v(t)$  är en normalfördelad störning med spektrum

$$\Phi_v(\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}, \quad \alpha > 0.$$

$K$  är ett mått på vindens styrka och  $\alpha$  ett mått på dess bygghet.



(b) Anta att vi har bestämt spektrumet för mätbruset  $n$  som

$$\Phi_n(\omega) = \frac{\omega^2 + 4}{\omega^2 + 9}.$$

Skriv systemet på tillståndsformen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Nv_1(t) \\ y(t) &= Cx(t) + v_2(t), \end{aligned}$$

där  $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$  är vitt brus med intensitet  $R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{12}^T & R_{22} \end{pmatrix}$ !

(c) Vad blir intensitetsmatrisen  $K$  om  $n$  och  $d$  är oberoende?

### 5.23

(T) (UU)

Consider movement of a rocket in space. It can be modelled (in one dimension) as follows, where  $x_1$  denotes the position and  $x_2$  is the velocity

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x + e \end{aligned}$$

Here,  $v$  denotes a small random influence, that we model as a white noise with intensity  $\gamma^4$ , while  $e$  is a measurement noise with intensity 1.

It is of interest to estimate the position and velocity of the rocket in an accurate way from the noisy output measurements.

Consider a standard observer

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + K(y - C\hat{x})$$

which can be conceptually rewritten as

$$\dot{\hat{x}}(t) = \begin{pmatrix} G_1(p) \\ G_2(p) \end{pmatrix} y(t)$$

a) Set  $K = (k_1 \ k_2)^T$ . Derive the filter transfer functions  $G_1(p)$  and  $G_2(p)$ . Show that they are both lowpass filters in the sense that for small enough frequencies  $\omega$

$$\begin{aligned} G_1(i\omega) &= 1 + O(\omega^2) \\ G_2(i\omega) &= i\omega + O(\omega^2) \end{aligned}$$

where  $O(\omega^2)$  denotes a term of order  $\omega^2$ .

b) Assume that the observer gain  $K$  is determined as the Kalman filter gain. Express  $K$  in terms of  $\gamma$ .

c) Use the Kalman gain determined in part b). Determine the bandwidth  $\omega_B$  of the filter  $G_1(p)$ , in the sense

$$|G_1(i\omega_B)| = \frac{1}{\sqrt{2}}|G_1(0)|$$

### 5.24

(T) (UU)

Consider the scalar system

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + u + v \\ y &= x + e \end{aligned}$$

where the process noise  $v$  and the measurement noise  $e$  both have constant intensities  $\phi(\omega) \equiv 1$ .

a) Assume that the state  $x(t)$  is estimated using a standard observer

$$\dot{\hat{x}} = -\hat{x} + u + K(y - \hat{x})$$

with a constant gain  $K$ . Determine the stationary variance, say  $V$ , of the estimation error  $\hat{x} = x - \hat{x}$  as a function of  $K$ .

(b) Determine what value of the observer gain that minimizes  $V$ . Let  $K^*$  denote this value of the gain. What is the minimum value of  $V$ ?

(c) What is the solution to the associated Riccati equation?

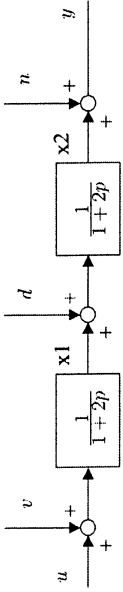
(d) Assume next that the gain  $K^*$  is used, but that the observation process is improved by using a more accurate sensor, so that the measurement noise has intensity  $\phi_e(\omega) \equiv 1/3$ . What is then the variance of the estimation error?

(e) How much lower value of  $V$  can be obtained by re-optimizing the observer gain for the case treated in part (e)?

### 5.25

(T) (Chalmers)

Betrakta blockschemat i figuren nedan!



Störningen  $v$  kan vi anta är vitt brus och störningen  $d$  har man bestämt spektrum för:

$$\Phi_d(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 1}$$

(a) Skriv systemet på tillstandsformen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Ne(t) \\ y(t) &= Cx(t) + n(t), \end{aligned}$$

där  $e(t)$  är vitt brus med intensitet  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{1}$

(b) Anta att vi har bestämt spektrumet för mäbruset  $n$  som

$$\Phi_n(\omega) = \frac{\omega^2 + 4}{\omega^2 + 9}.$$

Skriv systemet på tillstandsformen (OBS! Ej samma matriser som i a-uppgiften)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Nv_1(t) \\ y(t) &= Cx(t) + v_2(t); \end{aligned}$$

där  $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$  är vitt brus med intensitet  $R = \begin{pmatrix} R_1 & R_{12} \\ R_{12}^T & R_2 \end{pmatrix}$ !

(c) Vad blir intensitetsmatrisen  $R$  om  $n$ ,  $d$  och  $v$  alla är oberoende?

### 5.26

(T) (Chalmers)

Tillståndet i en dynamisk process skall skattas med ett Kalmanfilter. Systemet är utrustat med två helt oberoende givare och kan skrivas

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= -x(t) + v_1(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x(t) + v_2(t) \end{aligned}$$

Störningen  $\begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$  kan antas vara vitt brus med intensiteten  $R = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$ .

- Vilka villkor behöver ställas på  $\varepsilon$  så att  $R$  är icke-negativt definit?
- Bestäm variansen för estimeringsfelet.
- Bestäm Kalmanfiltret.
- Undersök Kalmanfiltret för de gränsvärdet av  $\varepsilon$  som erhållits i uppgift (a).
- Bestäm variansen för estimeringsfelet när bara en givare används, och undersök om det finns värden på  $\varepsilon$  då det inte längre lönar sig att använda två givare.

### 5.27

Betrakta en ARMA process som observeras med vitt mäbrus  $e(t)$ :

$$y(t) = \frac{q + 0.5}{q - 0.8}v(t) + e(t)$$

De vita brusen  $v(t)$  och  $e(t)$  är vita brus, med medelvärden noll, och varierar

$$\lambda_v^2 = 18, \quad \lambda_e^2 = 125.$$

Visa att observationerna  $y(t)$  kan skrivas som en ARMA process, och bestäm parametrarna för denna.

### 5.28

Betrakta första ordningens modell

$$(p + a)y(t) = e(t)$$

där  $e(t)$  har spektrum  $\phi_e(\omega) = \tau$ .

(a) Bestäm variansen för  $y(t)$  ur spektrum för  $y(t)$ .

(b) Bestäm variansen för  $y(t)$  genom att lösa en Lyapunovekvation.

### 5.29

Consider the scalar system

$$x_i(t + 1) = ax(t) + e(t),$$

where  $x(t_0)$  and all  $e(t)$  are independent and Gaussian distributed

$$x(t_0) \sim \mathcal{N}(m_0, P_0), \quad e(t) \sim \mathcal{N}(0, \lambda^2) \quad \forall t.$$

- (a) Show that for  $t \geq t_0$  the state  $x(t)$  is also Gaussian distributed

$$x(t) \sim \mathcal{N}(m_t, P_t).$$

and determine the mean  $m_t$  and the variance  $P_t$ .

- (b) Under what conditions do  $m_t$  and  $P_t$  have limits when  $t - t_0 \rightarrow \infty$ ? What are the limits?
- (c) Assume that the convergence condition is fulfilled. Let  $t_0 \rightarrow -\infty$ . Determine and sketch the covariance function of  $x(t)$ .
- (d) Determine and sketch the spectral density of  $x(t)$ . For what values of  $a$  will the spectrum be highest at low frequencies?
- (e) Write  $x(t)$  (for the case  $t_0 \rightarrow -\infty$ ) in the form

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k e^{i(\omega - 1 - k)t}$$

What are the coefficients  $\{h_k\}$ ? Compute the stationary variance of  $x(t)$  from this representation.

### 5.30

Playing certain forms of games can be modelled by the random walk model

$$x(t+1) = x(t) + e(t), \quad x(0) = 0, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

Here  $x(t)$  is the gain after  $t$  rounds of the game. At each game there are two possible outcomes

$$e(t) = \begin{cases} a & \text{with probability } p & \text{(a win for the player)} \\ -b & \text{with probability } q = 1 - p & \text{(a loss for the player)} \end{cases}$$

- (a) What is the averaged gain for the player at one round?
- (b) What is the averaged gain after  $t$  rounds?
- (c) What are the possible outcomes at  $t = 3$ ? (What values can  $x(3)$  take, and what are the probabilities?)
- (d) Show how the probabilities for what values  $x(t)$  can take can be described using a binomial distribution.
- (e) Assume that  $t$  is large, so that a Gaussian approximation applies. What is the probability that the player has won, that is, compute  $P(x(t) > 0)$ .

### 5.31

Determine the spectral densities corresponding to the covariance functions

- (a)  $r(\tau) = e^{-a|\tau|}$ ,  $(a > 0)$ ,
- (b)  $r(\tau) = C_1 e^{-a|\tau|} + C_2 e^{-b|\tau|}$ ,  $(a > 0, b > 0, C_1 > 0, C_2 > 0)$ .

### 5.32

Consider a continuous-time process with covariance function

$$r(\tau) = e^{-a|\tau|}, \quad a > 0.$$

- (a) Determine its spectrum,  $\phi_c(\omega)$ .
- (b) Assume that the signal is observed in discrete-time with sampling interval  $h$ . What is its discrete-time covariance function?
- (c) Determine the discrete-time spectrum,  $\phi_d(\omega)$ .
- (d) Compare  $\phi_c(\omega)$  and  $\phi_d(\omega)$ . Is any of them larger than the other? Determine also the limit

$$\lim_{h \rightarrow 0} \phi_d(\omega).$$

### 5.33

Consider a process

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t),$$

where  $a$  and  $b$  are independent random numbers with zero mean and variance  $\sigma^2$ . The frequency  $\omega_0$  is fixed. Determine the covariance function  $r_x(\tau)$  and the spectrum  $\phi_x(\omega)$ .

### 5.34

Let  $x(t)$  be a stationary continuous-time process with covariance function  $r_x(\tau)$  and spectral density  $\phi_x(\omega)$ .

(a) Consider the process

$$y(t) = x(t+1) - x(t-1).$$

Show that the covariance  $r_y(\tau)$  of  $y(t)$  is

$$r_y(\tau) = 2r_x(\tau) - r_x(\tau+2) - r_x(\tau-2),$$

and that its spectrum is

$$\phi_y(\omega) = 4\phi_x(\omega) \sin^2(\omega).$$

(b) Give an intuitive explanation why  $\phi_y(0) = 0$ .

## 6 Det slutna systemet

### 6.1

(LiTH)

For a given system  $G$  and a given controller  $F$  we have defined the four transfer functions required to be stable, for the system to be stable, as

$$H_{11} = (I + FG)^{-1}, \quad H_{12} = -(I + FG)^{-1}F$$

$$H_{21} = (I + GF)^{-1}G, \quad H_{22} = (I + GF)^{-1}$$

Show that

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & F \\ -G & I \end{bmatrix}^{-1}$$

### 6.2

(LiTH)

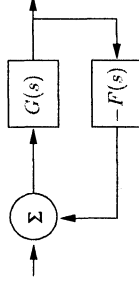
A system

$$G(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

is controlled in feedback using the controller

$$F(s) = \frac{s+2}{s-1}$$

according to



Compute  $G_c$ ,  $T$  and  $S$ . Are they stable? Is the system internally stable?

### 6.3

(T)

Till den tidsdiskreta modellen

$$y(t) = G(q)u(t)$$

finns en regulator

$$u(t) = F(q)r(t) - y(t)$$

så att det slutna systemet blir

$$y(t) = \frac{1-\alpha}{q-\alpha}r(t), \quad (\alpha > 0)$$

Visa att detta regelsystem kan tåla upp till 100% relativa förändringar i  $G(q)$  dvs  $|\Delta_G| < 1$  utan att det slutna systemet blir instabilt.

### 6.4

(T) (LiTH)

För ett tidskontinuerligt system  $G(s)$  konstrueras en tidskontinuerlig regulator  $F_y^c(s)$ , så att känslighetsfunktionens värde för frekvensen 0 blir ett önskat värde

$$S_c(0) = \sigma$$

och så att det maximala värdet på känslighetsfunktionen blir acceptabelt

$$\max_{\omega} |S_c(j\omega)| = \alpha.$$

Man använder nu en samplande regulator med samplingsintervallet  $T$ . Regulatorkoefficienterna för denna regulator beräknas med hjälp av Tustins formel ur  $F_y^c(s)$ :

$$F_y^{samplad}(q) = F_y^c\left(\frac{2}{T} \frac{q-1}{q+1}\right)$$

Vi beräknar känslighetsfunktionen  $S^{samplad}$  för det med den samplade regulatorn återkopplade systemet (alltså responsen i samplingsögonblicken, som vanligt).

(a) Visa att

$$S^{samplad}(e^{j\Omega}) = \sigma$$

oberoende av  $T$ .

(b) Visa (t ex genom exempel) att

$$\max_{\omega} |S^{samplad}(e^{j\omega T})|$$

kan bli hur stor som helst om inga ytterligare villkor ställs på  $G(s)$ ,  $F_y^c(s)$  och  $T$ .

**6.5**

(T) (KTH)

Assume that we have designed a controller  $F$  for the scalar system  $G$  such that the loop-gain  $L = GF$  and the corresponding closed-loop system are stable. Due to model errors the true loop-gain is equal to  $L_p$ . Define the relative model error as

$$L_p = (1 + \Delta_L)L.$$

We assume that  $\Delta_L$  is stable. Derive, using the Nyquist criterion, constraints on  $\Delta_L$  that guarantee stability for the true system.

**6.6**

(T) (KTH)

Betrakta en process som har den nominella modellen

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Antag nu att förstärkningen för insignal nummer två är osäker. Det verkliga systemet ges alltså av

$$G_p(s) = \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} 2 & \alpha \\ 0 & 2\alpha \end{bmatrix}$$

där  $\alpha$  representerar förstärkningen.

- (a) Använd den nominella modellen och designa en (frikopplande) regulator enligt

$$F(s) = \frac{k}{s} G^{-1}(s).$$

Välj  $k$  så att det återkopplade systemet blir lika snabbt som det ursprungliga öppna systemet.

- (b) Representera osäkerheten som ett relativt utsignamodellfel. Använd ett lämpligt robusthetskriterium för att bestämma för vilka  $\alpha$  som man kan garantera stabilitet.
- (c) Representera nu istället osäkerheten som ett relativt insignamodellfel. Avgör med lämpligt robusthetskriterium för vilka  $\alpha$  som man kan garantera stabilitet. Blir det någon skillnad jämfört med (b) uppgiften?
- (d) Beräkna det verkliga slutna systemets poler. För vilka  $\alpha$  är systemet stabilt?

**6.7**

(Chalmers)

Betrakta processen som beskrivs av följande tillståndsmodell:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Med tillståndsåterkoppling avses här den matris  $L = (l_1 \ l_2)$  sådan att en styrslag på formen  $u = Kr - Lx$  erhålls.

- (a) Bestäm matrisen  $L$  så att det återkopplade systemet får polerna  $p = -1.6 \pm j1.2!$
- (b) Bestäm överföringsfunktionen från  $R(s)$  till  $Y(s)$  för det återkopplade systemet!
- (c) Bestäm förstärkningsparametern  $K$  så att kvarstående fel ( $e = r - y$ ) inte uppstår vid stegvisa börvärdesändringar!

**6.8**

(Chalmers)

Antag i systemet i uppgift 6.7 att stegstörningar adderas till styrsignalen. För att eliminera inverkan av sådana forses regulatorn med integrerande verkan.

- (a) Ställ upp en tillståndsmodell för det utvidgade systemet!
- (b) Bestäm den utvidgade reglermatrisen  $\bar{L}$  så att det återkopplade systemet får polerna  $p = -1 + j$ ,  $p = -1 - j$  och  $p = -2!$
- (c) Uppställ det slutna systemets överföringsfunktion från  $R(s)$  till  $Y(s)!$

**6.9**

(Chalmers)

En tankprocess har överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

från styrbart inföde till uppmätt nivå. Tillsammans med det styrbara flödet kommer ibland också stegformiga störflöden. Nivån skall styras mot olika börvärden utan kvarstående fel genom tillståndsåterkoppling med integralverkan.



(a) Ställ upp en tillståndsmodell för det utvidgade systemet och bestäm en regulator sådan att det slutna systemet får en dubbelpol i -1!

(b) Med en regulator enligt ovan, vad händer om processens pol ändras från -1 till  $-1 + \delta$  där  $|\delta| \ll 1$ ? Vilken betydelse har tecknet på  $\delta$ ?

**6.10**

(Chalmers)

För det tidsdiskreta "dubbelintegral-"systemet

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) \end{aligned}$$

sker mätning av endast positionstillståndet ( $y = x_1$ ).

(a) Dimensionera en observatör sådan att observatörens poler hamnar i  $z = 0$  och  $z = 0.8$ !

(b) Visa att positionsskattningen i detta fall blir lika med själva mätningen och att observatördynamiken blir av första ordningen och endast berör hastighetsskattningen  $\hat{x}_2$  (så kallad reduced order observer)!

**6.11**

(Chalmers)

Betrakta det tidsdiskreta systemet

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x(t-1) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t-1) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) \end{aligned}$$

(a) Utred systemets stabilitet, styrbarhet och observerbarhet!

(b) Bestäm en tillståndsaterkoppling försedd med integrerande verkan sådan att det återkopplade systemets poler blir  $z = 0$ ,  $z = \rho e^{i\theta}$  och  $z = \rho e^{-i\theta}$ , där  $0 < \rho < 1$ !

(c) Bestäm en observatör för observation av processens tillstånd sådan att båda observatörspolerna hamnar i  $z = \nu$ , där  $0 < \nu < 1$ ! (Observera att "integraltillståndet" inte bör skattas med observatören!)

**6.12**

(T) (UU)

Consider a system where the open loop part is given by

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + w \end{aligned}$$

and the feedback is

$$\begin{aligned} z &= Fz + Gy \\ u &= -Hz - Jy \end{aligned}$$

- a) Represent the closed loop system in state space form.
- b) Give the sensitivity function  $S(s)$  expressed in the matrices  $A, B, C, F, G, H, J$ .

c) In the simple case when the open loop system has a transfer function  $G(s) = 1/(s+1)$ , and is controlled by a proportional regulator,  $u = -K'y$ , determine the sensitivity function  $S(s)$  by direct calculations, and verify that the expression derived in part b) leads to the same result.

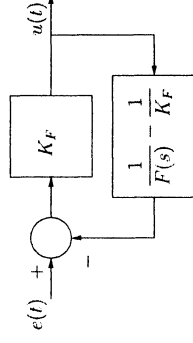
**6.13**

(T) (KTH)

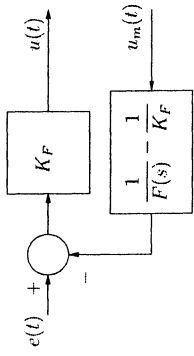
(a) Visa att en regulator  $U(s) = F(s)E(s)$ ,

$$K_F = \lim_{s \rightarrow \infty} F(s) \neq 0$$

kan implementeras enligt nedanstående blockschema.



(b) Antag att regulator  $F(s)$  är minimumfas och att vi har signalsmätning. Motivera varför det då är bra att implementera regulatorn enligt nedanstående blockdiagram ( $u_m(t)$  är den mättade styrsignalen).



6.14

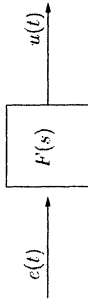
(T) (KTH)

(a) Antag att regulator  $F(s)$  i nedanstående blockdiagram kan beskrivas med följande tillståndsuodel

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bc(t) \\ u(t) &= Cx(t) + De(t) \end{aligned}$$

där  $D \neq 0$ . Visa att samma regulator kan realiseras som

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= (A - \frac{1}{D}BC)\hat{x}(t) + \frac{1}{D}Bu(t) \\ u(t) &= C\hat{x}(t) + De(t) \end{aligned}$$



(b) Anlag regulator  $F(s)$  i a) är minimumfas (*ledning*:  $A - \frac{1}{D}BC$  kommer då att ha egenvärden i vänster halvplan), samt att vi kan ha insignalismätning. Motivera varför det då är bra att implementera regulator enligt

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= (A - \frac{1}{D}BC)\hat{x}(t) + \frac{1}{D}Bu_m(t) \\ u(t) &= C\hat{x}(t) + De(t) \end{aligned}$$

där  $u_m(t)$  är den mättade styrsignalen.

6.15

(T) (KTH)

PID-regulatorer modifieras ofta så att derivatadeln filtreras och ej verkar på referensvärdet samt så att referensvärdet viktas i proportionaldelen. Den av PID-regulatorn beräknade styrsignalen  $\tilde{U}(s)$  ges då av

$$\tilde{U}(s) = K_c \left\{ bI(s) - Y(s) + \frac{1}{sT_i} [I(s) - Y(s)] - \frac{sT_d}{1 + sT_d/N} Y(s) \right\}$$

där  $R(s)$  är referensvärdet och  $Y(s)$  är mätvärdet.

(a) Visa att en tillståndsrealisering av PID-regulatorn ges av

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= Fx(t) + G_r r(t) - G_y y(t) \\ \tilde{u}(t) &= Hx(t) + D_r r(t) - D_y y(t) \end{aligned}$$

där

$$\begin{aligned} F &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -N/T_d \end{pmatrix}; \quad G_r = \begin{pmatrix} K_c/T_i \\ 0 \end{pmatrix}; \quad G_y = \begin{pmatrix} K_c/T_i \\ N/T_d \end{pmatrix} \\ H &= \begin{pmatrix} 1 & -K_c N \end{pmatrix}; \quad D_r = K_c b; \quad D_y = K_c(1 + N) \end{aligned}$$

(b) Notera att  $F$  har ett egenvärde i origo som svarar mot integrator-tillståndet. Antag att styrsignalen  $\tilde{u}(t)$  mätas och att den signal som ställdonet ställer ut ges av  $u(t)$ . Då finns det risk för vad som kallas uppriktning av integrator-tillståndet i regulatorn. Detta kan undvikas genom att modifiera regulatorn enligt

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= Fx(t) + G_r r(t) - G_y y(t) + M [u(t) - \tilde{u}(t)] \\ \tilde{u}(t) &= Hx(t) + D_r r(t) - D_y y(t) \end{aligned}$$

Låt

$$M = \begin{pmatrix} 1/T_r \\ 0 \end{pmatrix}$$

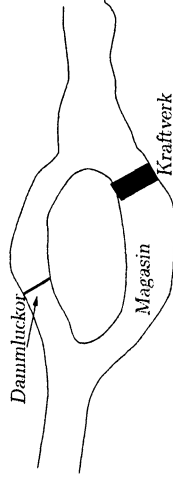
Hur ändras regulatorns poler med detta val av  $M$ ?

(c) Beräkna överföringsfunktionen från  $U(s) - \tilde{U}(s)$  till  $\tilde{U}(s)$  då  $M$  är valt som i deluppgift (b).

(d) I deluppgift (b) fann vi att endast en av regulatorns poler flyttades. Hur ska man välja  $M$  för att regulatorns poler ska ges av nollställena till det karakteristiska polynommet  $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$ ?

(e) Beräkna överföringsfunktionen från  $U(s) - \tilde{U}(s)$  till  $\tilde{U}(s)$  då  $M$  är valt som i deluppgift (d).

6.16



Figuren föreställer ett kraftverk, som är byggt i den ena av två flodarmar (sådana kraftverk är vanliga, exempelvis i Lagan). Genom ett regler dammbuckorna i den andra flodarmen, kan man styra nivån i vattenmagasinet ovanför kraftverket. Om nivån i vattenmagasinet är  $x(t)$ , tillflödet  $n(t)$  och uttaget i kraftverket  $T(t)$ , gäller alltså

$$\dot{x}(t) = x(t-1) + n(t) - T(t).$$

Tillflödet  $n(t)$  till magasinet beror på hur mycket vatten som släpps genom dammbuckorna och kan alltså styras. Vi betraktar det som insignal till systemet. Uttaget  $T(t)$  bestäms av efterfrågan på elkraft och betraktas som en störning.

Man vill av olika skäl hålla nivån i vattenmagasinet vid idealnivån  $x_0$ , och använder därför följande reglering:

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = x_0 - x(t) \\ n(t) = 0.5e(t-2) \end{cases}$$

(a) Bestäm sambandet mellan  $T$  och  $n$ ,  $n(t) = H^*(q^{-1})T(t)$ . Visa att systemet är stabilt, men att man får ett stationärt fel  $e$  vid en stegstörning av  $T$  (vi antar  $x(0) = x_0$ ).

(b) En nyutexaminerad civilingenjör har lärt sig att det är bra att integrera ibland och föreslår därför följande reglering:

$$n(t) = n(t-1) + 0.5e(t-2)$$

Visa att det återkopplade systemet blir instabilt.

(c) Sedan kraftverket reparerats och civilingenjören läst på återkommer han med följande förslag: Försök få bort en tidsfördröjning och inför en deriverande term, dvs

$$n(t) = n(t-1) + 0.5e(t-1) + 0.2(e(t-1) - e(t-2))$$

Visa att denna styrslag ger ett stabilt system utan stationärt fel i  $x$  vid en stegstörning i  $T$ .

## 7 Begränsningar och konflikter

### 7.1

Given a system

$$G(s) = \frac{s-3}{s+1}.$$

(LiTH)

we want the complementary sensitivity function

$$T(s) = \frac{5}{s+5}.$$

- Compute a feedback  $F_r = F_y = F$  which gives this  $T$ . Will it work?
- Suggest an alternative  $T$ , that has the bandwidth 5 rad/s as before, but gives a stable closed loop system with  $F_r = F_y = F$ .
- What is the corresponding sensitivity function?
- Could a solution with  $F_r$  and  $F_y$  different be a good alternative? More specific, could one choose  $F_r$  and  $F_y$ , so that none of them has a pole in  $s=3$  and giving the closed loop system transfer function

$$G_{rc} = \frac{GF_r}{1+GF_y} = \frac{5}{s+5}$$

### 7.2

(LiTH)

A continuous time system has a zero in  $s = 3$  and a time delay of 1.0 second. What is the highest realistic crossover frequency if the open loop systems amplitude curve is monotonically decreasing?

### 7.3

(LiTH)

A multivariable system is required to dampen all system disturbances ( $w$ ) by at least a factor 10 under 0.1 rad/sek. It should also dampen measurement noise ( $n$ ) by at least a factor of 10 over 2 rad/sek. Constant disturbances should be dampened by at least a factor 100 in stationarity.

- Formulate requirements on  $S$  and  $T$  (their singular values) which assures fulfillment of the specifications.
- Translate the specifications to requirements on the loop gain  $GF$ .
- Formulate the requirements using  $\|\cdot\|_\infty$  and the weight functions  $W_s$  and  $W_T$  according to the text book.
- What crossover frequency and phase margin could be expected according to (b)? Which lower limit does this impose on  $\|T\|_\infty$ ?
- How is this lower limit on  $\|T\|_\infty$  related to the requirements according to (c)?

**7.4**

(T) (LiTH)

On a certain closed loop control system we specify the following requirements:

- i. Noise on the output signal with frequency under 2 rad/s should be damped by a factor 1000.
- ii. The system should remain stable despite a model uncertainty

$$|\Delta G| \leq 100|G|$$

for frequencies over 20 rad/s where  $G$  is the nominal open loop system frequency function and  $\Delta G$  is the absolute error in the same.

Can this be achieved using a linear time-invariant controller?

**7.5**

(KTH)

För det oskalade systemet

$$y^f(t) = G^f(p)u^f(t) + G_d^f(p)d^f(t)$$

gäller att insignalen  $u^f$  kan variera mellan  $[-10, 10]$  och störning  $d^f$  varierar mellan  $[-15, 15]$ . Det acceptabla reglerfelet för  $y^f$  är  $\pm 5$ .

(a) Ange skalkningsfaktorerna  $D_u$ ,  $D_d$  och  $D$ .

(b) Ange de skalade överföringsfunktionerna  $G(s)$  och  $G_d(s)$  då

$$G^f(s) = \frac{1/5}{s+1}$$

$$G_d^f(s) = \frac{1/3}{s+2}$$

**7.6**

(T) (KTH)

Givet de två systemen

$$y^f = \frac{8/5}{s-2}u^f + \frac{1/5}{2s+1}d^f$$

$$y^f = \frac{8/5}{s+2}u^f + \frac{2/5}{2s+1}d^f$$

där  $u^f \in [-5, 5]$  och  $d^f \in [-10, 10]$ .

(a) Bestäm för respektive fall det skalade systemet

$$y = Gu + G_d d$$

så att  $u$  och  $d$  håller sig mellan  $-1$  och  $+1$  och att en avvikelse i  $y^f$  på  $\pm 2$  enheter är ett acceptabelt reglerfel.

(b) Antag att mätningen av  $y$  är tidsfördröjd. Ange för respektive fall en övre gräns på tidsfördröjningen för att systemet skall vara reglerbart.

**7.7**

(KTH)

Givet de två systemen

$$y^f = \frac{2(s+1)}{s+2}u^f + \frac{1}{3s+1}d^f$$

$$y^f = \frac{0.25}{s+2}u^f + \frac{0.5}{2s+1}d^f$$

där  $u^f \in [-10, 10]$  och  $d^f \in [-5, 5]$ . Bestäm för respektive fall det skalade systemet

$$y = Gu + G_d d$$

så att  $u$  och  $d$  håller sig mellan  $-1$  och  $+1$  och att en avvikelse i  $y^f$  på  $\pm 3$  enheter är ett acceptabelt reglerfel.

**7.8**

(KTH)

Givet systemet

$$\dot{x}(t) = A^f x(t) + B^f u^f(t) + E^f d^f(t)$$

$$y^f(t) = C^f x(t) + K^f u^f(t) + F^f d^f(t)$$

där  $u^f \in [-10, 10]$  och  $d^f \in [-5, 5]$ . Bestäm det skalade systemet så att  $u$  och  $d$  håller sig mellan  $-1$  och  $+1$  och att en avvikelse i  $y^f$  på  $\pm 3$  enheter är ett acceptabelt reglerfel.

a) Ange  $D_u$ ,  $D_d$  och  $D$ .

b) Vilka matriser måste modifieras så att systemet blir skalat?

**7.9**

(KTH)

Consider the process

$$G(s) = \frac{3(-2s + 1)}{(5s + 1)(10s + 1)}$$

(a) Derive a controller for the system fulfilling the following specifications:

- Crossover frequency  $\omega_c = 0.1$  rad/s
  - No steady state error if the reference signal is a step
  - Roll-off of at least -2 for high frequencies
- (b) Compute the phase margin for your solution.

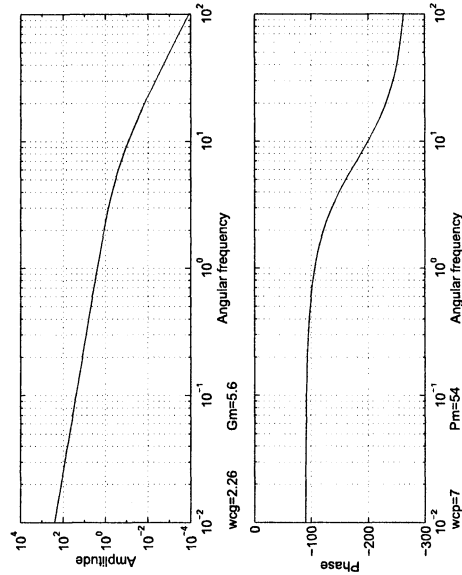
(c) Draw an approximative Bode diagram for the open loop system.

(d) Compute the transfer function for the closed loop system. How is the bandwidth computed?

**7.10**

(T) (KTH)

The system  $G(s)$  has the following Bode diagram



Derive a controller  $F(s)$  that fulfills the following specifications.

i) The system should have the crossover frequency  $\omega_c = 7$  rad/s.

ii) Phase margin  $\varphi_m = 50^\circ$ .

iii) Sinusoidal disturbances  $r(t) = \sin(\omega t)$  should have an amplitude of at most 0.005 in the output for frequencies  $\omega \leq 0.1$  rad/s.

**7.11**

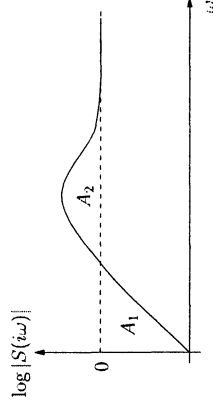
(LiTH)

Ge exempel på ett system för vilket man inte kan finna en regulator som ger ett stabilt slutet system, bra känslighetsreduktion vid låga frekvenser och bra dämpning av mätfel vid höga frekvenser.

**7.12**

(LiTH)

Ett regelsystem har känslighetsfunktionen  $S$ , enligt figuren nedan



Vad kan man säga om kretsförstärkningen om ytan  $A_2$  är större än ytan  $A_1$ ?

**7.13**

(LiTH)

Man har följande specifikation på ett envariabelt system

$$|S(j\omega)| \leq 10^{-3} \quad \omega \leq 1$$

$$|T(j\omega)| \leq 10^{-3} \quad \omega \geq 100$$

(a) Ange två icke-konstanta viktfunktioner  $W_S$  och  $W_T$  som garanterar dessa specifikationer.

(b) Då man försöker finna en regulator som uppfyller detta designkriterium, t ex enligt metoderna i kapitel 10 i läroboken, sa misslyckas man. Kunde man insett detta från början?

**7.14**

(T) (UU)

The engineer Civerth was given the task to design a SISO control system with the specifications:

- The stationary control error, when the reference signal is a ramp, should be zero (that is, the error coefficient  $e_1 = 0$ ).
- The step response for the closed loop system should not have an overshoot.

Did he succeed?

Investigate by treating the subproblems a) - c) below.

a) Rewrite the requirement  $e_1 = 0$  as a condition on the sensitivity function  $S(s)$ .

b) Assume that the condition in part a) holds. Show that, for a step in the reference signal

$$\int_0^\infty c(t)dt = \lim_{s \rightarrow 0} E(s) = 0$$

c) What does the relation in b) tell about the possible overshoot in the step response?

**7.15**

(T) (KTH)

(a) Låt

$$G(s) = \frac{1}{s} \left( \frac{-s+2}{s+2} \right)$$

och ansätt det slutna systemet

$$G_c(s) = \left( \frac{-s+2}{s+2} \right) \frac{1}{1+\tau s}$$

Bestäm motsvarande regulator

$$U(s) = F(s)[R(s) - Y(s)]$$

och visa att det återkopplade systemet blir internt stabilt.

(b) Bestäm motsvarande känslighetsfunktion  $S(s)$  och beräkna

$$W_s^{-1}(s) = \lim_{\tau \rightarrow 0} S(s)$$

dvs vi låter bandbredden för  $G_c(s)$  gå mot oändligheten.

(c) Från Sats 7.4 i kursboken vet vi att

$$\|W_s S\|_\infty \geq W_s(2)S(2)$$

för alla stabiliserande regulatorer. Visa att detta innebär här att man inte kan få störningsundertryckning ( $|S(i\omega)| < 1$ ) för frekvenser  $\omega > 2$ .

**7.16**

(T) (KTH)

Betrakta systemet

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} U(s) + \frac{2}{s+3} D(s)$$

där  $y(t)$  är utsignal,  $u(t)$  styrsignal och  $d(t)$  en störning. Störningen  $d(t)$  är konstant och ligger i intervallet  $-1 \leq d \leq 3$ . Styrsignalen  $u(t)$  är begränsad:  $|u(t)| \leq 1$ . Är det möjligt att konstruera en regulator som garanterar helt eliminerar inverkan av  $d(t)$  på  $y(t)$ ? Motivera.

**7.17**

(KTH T 050329:5abd)

A system with variable dynamics is modelled by

$$G(s) = \frac{as+1}{s+1}$$

where the (real) parameter  $a$  can vary. In the controller design, one decides to use a nominal model corresponding to  $a = 0$ , i.e.,

$$G_0(s) = \frac{1}{s+1}$$

and consider the variations in  $a$  as a model uncertainty. The uncertainty is modelled as a relative output uncertainty,

$$G(s) = (1 + \Delta_G(s))G_0(s)$$

(a) Determine the corresponding uncertainty  $\Delta_G(s)$ .

(2p)

- (b) With the uncertainty in (a), what is the bandwidth limitation if one requires that the robustness criterion is fulfilled? (3p)

- (d) The following controller has been designed for the system

$$F(s) = \frac{s+1}{s}$$

Use the robustness criterion to determine the largest variation one can tolerate in the parameter  $a$  if one wants to guarantee stability with this controller. How does the answer compare to the variations actually allowed? (3p)

### 7.18

(KTH T 060311:4)

There is a strong current interest in wireless automation, where wireless sensors replace traditional solutions to reduce cabling cost and increase flexibility. However, due to harsh radio conditions sensor messages sent over the wireless interface may be corrupted or lost. One way to deal with this is to let the system resend the data until it succeeds. This introduces an uncertain (communication) delay in the system between the plant and controller. In this problem, we will investigate the effects of such delays using the tools from the course.

- a) Consider a linear system  $G_0(s)$  where the output is sensed using a wireless sensor discussed above. We model the sensor as an uncertain delay, include this delay in the system model, and consider

$$G_p(s) = G_0(s)e^{-Ls}$$

where  $L \in [0, L_{\max}]$ . Show that the closed-loop control system under output feedback  $u = -F_y y$  can be represented as in Figure 1 (left), and verify that the associated transfer function  $\Delta$  satisfies  $\|\Delta\|_{\infty} \leq 2$  (2p)

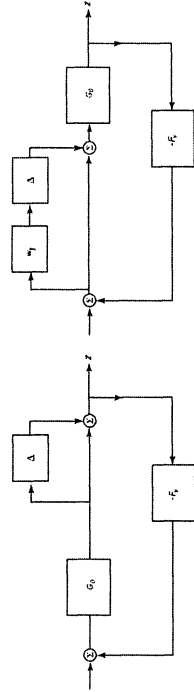


Figure 1: Uncertainty model for problem 7.18a. (left) and 7.18c. (right)

- b) Use the small-gain theorem to derive a criterion for robust stability of the closed-loop system for the uncertainty model in a, exploiting only the norm bound on the  $\Delta$  block. (2p)

- c) An alternative approach that has been discussed in class, is to consider the multiplicative input uncertainty description shown in Figure 1(right). Robust stability is then guaranteed if

$$|T(i\omega)| \cdot |w_I(i\omega)| \leq 1 \quad \forall \omega$$

where  $w_I$  bounds the relative error between the nominal model and all possible perturbed plants.

$$|w_I(i\omega)| \geq \left| \frac{G_p - G_0}{G_0} \right| \quad \forall C_p \quad (7.1)$$

Derive an expression for how the relative error between  $G_p$  and  $G_0$  depends on frequency, and show that this condition is less conservative than the condition derived in b) for all frequencies  $\omega \leq L_{\max}^{-1}$ . (4p)

- d) When  $L_{\max} = 1$ , the weight

$$w_I(s) = 2 \frac{s}{s+1}$$

satisfies the bound (7.1). Figure 2 shows the complementary sensitivity for two different controllers. Which of these guarantee robust stability of the closed-loop system? (2p)

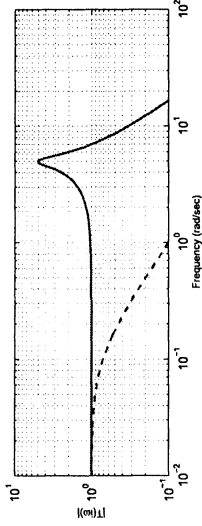


Figure 2: Complementary sensitivities for the two control designs in 5d).

### 7.19

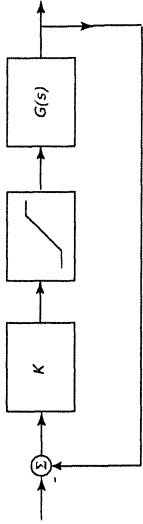
(KTH, T 060605:3)

The small-gain theorem is an important tool for robustness analysis, but it is also useful for nonlinear systems analysis. In order to avoid unnecessarily conservative results it is important how we go from an exact description of the nonlinearity to the gain description. As an example of this, consider the system

$$G(s) = \frac{1}{s + \varepsilon}$$

where  $\varepsilon > 0$  is a small number. We wish to speed up the system using proportional control with gain  $K$ . The control signal is limited to  $[-1, 1]$ , and the closed-loop

system is described by the system below.

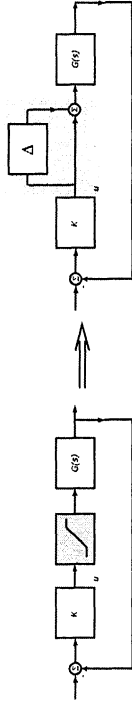


a) First, we consider the saturation as an uncertainty  $\Delta$ . Show that the saturation

$$\text{sat}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 1 \\ x & \text{if } -1 \leq x \leq 1 \\ -1 & \text{if } x \leq -1 \end{cases}$$

has gain 1, and use the small gain theorem to derive a condition on  $K$  that guarantees stability of the closed-loop system. What is the largest value of  $K$  for which your criterion guarantees stability? (5p)

b) An alternative approach is to represent the saturation as an additive uncertainty, see the figure below. Determine an expression for how  $\Delta$  depends on  $u$ , and show that its gain is equal to one. Use the small gain theorem to derive a stability criterion on the closed-loop system. What values of the control gain  $K$  guarantee stability using this approach? (5p)



## 8 Regulatorstrukturer och reglerdesign

8.1

(LiTH)

Given the multivariable system

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{0.1s + 1} \begin{pmatrix} 0.6 & -0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Assume that we want to control the system using a decentralized controller, and want to use *relative gain array* (RGA) to decide which control signal should be used to control which output signal. Further assume that we aim for a crossover frequency of  $\omega_c = 10$  rad/s. Determine how the signals should be paired.

61

8.2

(LiTH)

Consider the multivariable system

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10s+1} & \frac{-2}{2s+1} \\ \frac{1}{10s+1} & \frac{s-1}{2s+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Using RGA-analysis determine which control signal should be used to control which output signal.

(b) Assume we want to control the system using a decentralized controller, i.e.

$$F^{\text{diag}}(s) = \begin{pmatrix} F_{11}(s) & 0 \\ 0 & F_{22}(s) \end{pmatrix}.$$

Further assume that we do not want the stationary in one channel to affect the stationary error in the other channel. Give the structure of a controller  $F(s)$ , expressed in  $F^{\text{diag}}(s)$  above, that achieves this.

8.3

(LiTH)

Designa en regulator med IMC-metoden till en stabil första ordningens process

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}, \quad \tau > 0.$$

Vilken typ av regulator blir det? Beräkna känslighetsfunktionen och komplementära känslighetsfunktionen samt skissa känslighetsfunktionens Bodediagram. Vad säger Bodes integralsats i detta fall?

8.4

(LiTH)

Beräkna en regulator med hjälp av IMC-metoden till systemet

$$G(s) = \frac{6 - 3s}{s^2 + 5s + 6}.$$

Vilken "typ" av regulator erhålls?

8.5

(KTH)

Givet ett multivariabelt system

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{s/20 + 1} \begin{pmatrix} \frac{2}{s+1} & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

62



När systemet regleras vill man ha en skärfrekvens på  $\omega_c = 20$  rad/s. Bestäm RGA för denna frekvens och avgör hur signalerna skall paras ihop.

### 8.6

(LiTH)

Givet det multivariabla systemet

$$G(s) = \frac{1}{s/20+1} \begin{pmatrix} \frac{9}{s+1} & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

- Vilka poler och nollställen har  $G(s)$ ?
- Bestäm en regulator för systemet baserad på IMC.

### 8.7

(KTH)

Studera ett samplat system med överföringsfunktionen

$$G(q) = \frac{aq^{-4}}{1-aq^{-1}} \quad |a| < 1.$$

Designa en tidsdiskret regulator med hjälp av IMC-metoden för de olika valen nedan. Faktorisera först  $G(q)=G_+(q)G_-(q)$ . Välj sedan  $Q(q)=H(q)[G_-(q)]^{-1}$ . Bestäm i båda fallen nedan regulator och slutet system.

(a) Välj

$$\begin{aligned} H(q) &= \frac{(1-\lambda)q^{-1}}{1-\lambda q^{-1}}, \\ G_+(q) &= q^{-4}, \\ G_-(q) &= \frac{a}{1-aq^{-1}}. \end{aligned}$$

(b) Välj

$$\begin{aligned} H(q) &= \frac{(1-\lambda)q^{-1}}{1-\lambda q^{-1}}, \\ G_+(q) &= q^{-3}, \\ G_-(q) &= \frac{aq^{-1}}{1-aq^{-1}}. \end{aligned}$$

- Beräkna överföringsfunktionerna för det slutna systemet i de bägge fallen. Blir det någon skillnad? Vilket av alternativen bör man välja?

### 8.8

Vi önskar reglera systemet

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2}, \quad \omega_0 = 1, \quad \zeta = 0.2,$$

med en samplad IMC-regulator. Låt samplingstiden vara  $T = 1$  sekund och välj designfiltret  $H(q)$  till

$$H(q) = \frac{(1-\lambda)q^{-1}}{1-\lambda q^{-1}}.$$

- Designa en IMC-regulator som inverterar systemet.
- Designa sedan en IMC-regulator som inte inverterar systemet.
- Simulera stegsvar för respektive återkopplade system och jämför. Välj tex  $\lambda = 0.2$ .

### 8.9

Betrakta systemet

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.1 \\ 0.2 & 0.6 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

Bestäm tillståndsdead-beat strategin för systemet

- då alla tillståndsvariabler kan mätas.
- da endast den första tillståndsvariabeln är tillgänglig för mätning.

### 8.10

Överföringsfunktionen för en servomotor från insignal till varvtal beskrivs av

$$G(s) = \frac{K}{s+1}$$

där förstärkningen  $K$  approximativt är 1, men ej går att bestämma exakt.

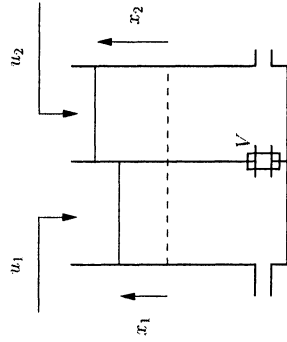
- Sampla systemet och bestäm en tillståndsdeadbeatregulator

$$u(t) = L_0 r(t) - Lx(t)$$

så att  $y(t) = r(t)$  stationärt (antag  $K = 1$ ). Vad händer med det stationära felet om  $K$  ej exakt är 1?

- (b) Inför en integration genom att införa ett extra tillstånd i systemet och bestäm en tillståndsdeadbeat-regulator för detta utökade system. Vad händer nu med det stationära felet?

### 8.11



Man vill införa digital reglering av ett system med vattentankar enligt figuren. Tanknivåernas avvikelser från det önskvärda tillståndet betecknas med  $x_1$  och  $x_2$ . Man vill hålla dessa nära noll genom att styra flödena  $u_1$  och  $u_2$ . Om ventilen  $V$  hålls stängd så får man med det valda samplingsintervallet följande ekvationer för tankarna

$$x_i(t+1) = 0.5x_i(t) + u_i(t) \quad i = 1, 2 \quad (8.1)$$

Man gör en individuell P-regulator för varje tank

$$u_i(t) = -Kx_i(t) \quad i = 1, 2 \quad (8.2)$$

Förstärkningen  $K$  är alltså densamma i båda regulatorerna.

- (a) Man väljer  $K$  så att man får tillstånds-dead-beat i varje tank för sig. Vilket  $K$ -värde uppfyller detta?  
 (b) Om man öppnar ventilen  $V$  får man följande system (där elementen i (1,2)- och (2,1)-positionerna representerar kopplingen via  $V$  mellan tankarna)

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.3 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u_1(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_2(t)$$

Man använder fortfarande de regulatorer som ges av (8.2) med den i a) framräknade förstärkningen. Vilka poler får systemet nu? Vad betyder denna polplacering för systemets uppförande jämfört med situationen i a)

- (c) Ange för vilka  $K$ -värden systemet är stabilt när  $V$  är öppen respektive stängd. Finns det några  $K$ -värden så att systemet är stabilt när  $V$  är stängd, men instabilt när  $V$  är öppen?

### 8.12

Systemet  $G(q)$  ges på tillstandsform av

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (8.3)$$

- (a) Ange en tillstandsrealisering för systemet

$$q^{-k}C(q) \quad (8.4)$$

- (b) För (8.3) ger tillståndsaterkopplingen

$$u(t) = -Lx(t) \quad (8.5)$$

det slutna systemet önskade poler. Ange en tillståndsaterkoppling för systemet (8.4) sådan att det slutna systemet får samma poler som ovan (och resten i origo). Ledning: För denna uppgift kan det vara lämpligt att välja

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t+k) \\ y(t+k-1) \\ y(t+k-2) \\ \vdots \\ y(t) \end{pmatrix}$$

som tillståndsvektor.

- (c) Diskutera hur tillståndsvektorn för återkopplingen i fallet b) kan rekonstrueras. Ange hur den så erhållna regulatorn begreppsmässigt relaterar sig till Otto Smith-regulatorn för system med tidsfördröjningar.

[Otto Smith-regulatorn ger insignalen

$$u(t) = -G_R(q)[y(t) + (1 - q^{-k})C(q)u(t)].$$

där  $u(t) = -G_R(q)y(t)$  är den regulator som ger önskat slutet system för systemet  $G(q)$  (utan tidsfördröjningar).]

**8.13**

Bestäm en tillståndsåterkoppling så att systemet

$$\begin{aligned} \dot{x}(t+1) &= \begin{pmatrix} -0.5 & 0.1 \\ 0.1 & -0.2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= (-2 \quad 3)x(t) \end{aligned}$$

får alla poler i 0.2.

**8.14**

(T) (LiTH)

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{10}{s-1} \\ \frac{1}{s+3} & \frac{5}{s-3} \end{pmatrix}.$$

Låt

(a) Bestäm RGA( $G(0)$ ).

(b) Vilken insignal-utsignal hopparning bör man undvika?

**8.15**

(LiTH)

Betrakta reglerdesign enligt IMC-principen för ett SISO-system som saknar poler och nollställen i origo. Vad är villkoret på överföringsfunktionen  $F$  för att regulatorn skall innehålla en integration?

**8.16**

En DC-motor beskrivs av

$$y = \frac{1}{p(p+1)}u.$$

Beräkna en regulator baserad på IMC för motorn! Ange den på formen  $u = -F_y(p)y$ , och skissa bodediagrammet för  $F_y(p)$ ! Vilken karaktär har regulatorn då man eftersträvar hög bandbredd hos de slutna systemet?

**8.17**

(T) (UU)

Consider the tank system in Problem 3.30. Set the parameter  $\alpha = 0.5$ . Assume the aim is to design a control system.

(a) Assume that decentralized control is to be used. With the numbering of the inputs and outputs in Problem 3.30, it may be possible to let  $u_1$  be connected to  $y_1$  and  $u_2$  connected to  $y_2$ . A second alternative is to instead make the connections  $u_1 - y_2$  and  $u_2 - y_1$ . Determine by using RGA for the static situation, which of the two alternatives that is preferable.

(b) Determine a decoupling matrix  $W_1(s)$  such that the system  $\hat{G}(s) = G(s)W_1(s)$  is decoupled for  $\omega = 0$ .

(c) Assume that the system is to be controlled by a diagonal proportional regulator

$$U(s) = W_1(s) \begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{pmatrix} (R(s) - Y(s))$$

where the regulator gains are set to  $K_1 = K_2 = 10$ . Determine the poles of the closed loop system, for two cases:

Case I: the regulator is applied without decoupling

Case II: the regulator is applied with the decoupling of part (b).

*Hint:* For the specific regulator, part (c) is easiest solved by using simple calculations in the state space model.

**8.18**

(T) (UU)

Consider an oscillative system with transfer function

$$G(s) = \frac{\omega_o^2}{s^2 + 2\zeta\omega_o s + \omega_o^2}$$

Design a feedback regulator using Internal Model Control. Will the regulator be integrating?

**8.19**

(T) (KTH)

Antag att den *stabila* regulatorn  $F(s)$  stabiliserar systemet  $G(s)$ . Uppgiften är att generalisera  $Q$ -parameteriseringen av alla stabiliserande regulatorer till motsvarande parameterisering av alla system som stabiliseras av en given regulator  $F(s)$ .

(a) Visa att alla system av formen

$$G(s) = \frac{Q(s)}{1 - F(s)Q(s)}$$

där  $Q(s)$  är stabil, stabiliseras av regulatorn  $F(s)$ .

(b) Antag det nominella systemet

$$G(s) = \frac{Q(s)}{1 - F(s)Q(s)}$$

där  $Q(s)$  är stabil, men att det verkliga systemet ges av

$$G^0(s) = \frac{[Q(s) + \Delta Q]}{1 - F(s)[Q(s) + \Delta Q]}$$

Motivera varför man har robust stabilitet så länge som  $\Delta Q(s)$  är stabil.

Visa sedan att

$$\Delta G_c(s) = F(s)\Delta Q(s)$$

där

$$G_c^0(s) = G_c(s) + \Delta G_c(s)$$

är överföringsfunktionen för det verkliga slutna systemet, och  $G_c(s)$  är överföringsfunktionen för det nominellt slutna systemet.

## 8.20

Antag att regulatorn  $F(s)$  vid standard återkoppling stabiliserar det stabila systemet  $G(s)$ . Vi vet från  $Q$ -parameteriseringen av alla stabiliserande regulatorer att  $F(s)$  då måste ha formen

$$F(s) = \frac{Q(s)}{1 - G(s)Q(s)}$$

där  $Q(s)$  är stabil.

Antag nu att  $Q(s)$  har följande struktur

$$Q(s) = sQ_1(s) + \frac{Q_2(s)}{G'(0)}$$

där  $Q_1(s)$  är en godtycklig stabil överföringsfunktion, och  $Q_2(s)$  en godtycklig stabil överföringsfunktion som uppfyller  $Q_2(0) = 1$ .

Antag också att referenssignalen  $r(t)$  är konstant.

Visa att detta innebär att reglerfelet,  $e(t) = (r(t) - y(t))$ , svänger in sig till noll då  $t \rightarrow \infty$ .

## 8.21

Betrakta systemet

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{4}{s+4} & \frac{16}{s+8} \\ \frac{10}{s+8} & \frac{4}{s+4} \end{bmatrix}$$

(a) Bestäm polerna och nollställena till  $G(s)$ .

(b) Man vill reglera systemet med två P-regulatorer och väljer mellan

$$u_1 = K_1(r_1 - y_1), \quad u_2 = K_2(r_2 - y_2)$$

och

$$u_1 = K_1(r_2 - y_2), \quad u_2 = K_2(r_1 - y_1)$$

Argör med hjälp av RGA vilket alternativ som är att föredra, om man vill ha skärfrekvens  $\omega_c \approx 3$  rad/s.

## 8.22

Studera systemet

$$G(s) = \frac{1}{s-p}$$

och antag att  $F(s)$  är en internt stabiliserande regulator för  $G(s)$ .

(a) Antag att  $Re(p) > 0$ , dvs polen  $p$  ligger i höger halvplan. Visa att då gäller följande interpolationsvillkor

$$\left. \frac{G(s)F(s)}{1 + G(s)F(s)} \right|_{s=p} = 1$$

(b) Visa med hjälp av ett exempel att detta villkor inte behöver gälla om  $Re(p) < 0$ , dvs  $p$  ligger i vänster halvplan.

Uppgiften är nu att beskriva klassen av alla internt stabiliserande regulatorer till  $G(s)$ . I fallet  $Re(p) < 0$  så ges den enligt kursboken sidan 255 av

$$F(s) = \frac{Q(s)}{1 - Q(s)G(s)}$$

där  $Q(s)$  är en godtycklig stabil överföringsfunktion. Den komplementära känslighetsfunktionen ges av  $T(s) = G(s)Q(s)$ .

- (c) Visa att ovanstående val av  $F(s)$  ej alltid fungerar om  $Re(p) > 0$ .

Från ovanstående interpolationsvillkoret inses att man dessutom borde kräva att  $Q(s) = (s - p)Q_1(s)$ , där  $Q_1(s)$  är en stabil överföringsfunktion som uppfyller

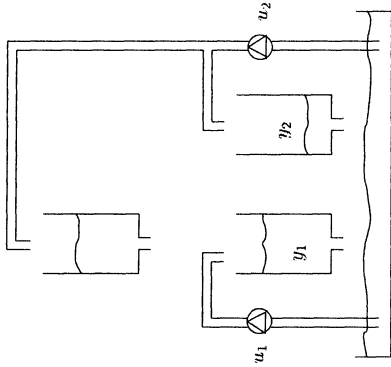
$$Q_1(p) = 1, \quad Q_1(\infty) = 0$$

- (d) Visa att ovanstående val av  $Q(s)$  ger klassen av alla regulatorer som internt stabiliserar

$$G(s) = \frac{1}{s - p}, \quad Re(p) > 0.$$

### 8.23

(T) (KTH)



En 3-tanksprocess enligt figuren nedan beskrivs av systemet

$$Y(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{0.5}{(s+1)^2} \\ 0 & \frac{0.5}{s+1} \end{bmatrix} U(s)$$

- (a) Bestäm systemets poler och nollställen med multiplicitet.  
 (b) Bestäm RGA för frekvensen 0 och föreslå en lämplig hopparning av styrsignaler och mätsignaler för decentraliserad reglering.  
 (c) Beräkna regulatorparametrar för två stycken PI-regulatorer med överföringsfunktioner

$$K_i \left( 1 + \frac{1}{sT_i} \right), \quad i = 1, 2$$

71

så att skärffrekvensen är 1 rad/s och fasmarginen är 90° för de envärjbara kretsförstärkningarna som beaktas vid decentraliserad reglering enligt förslaget i (b).

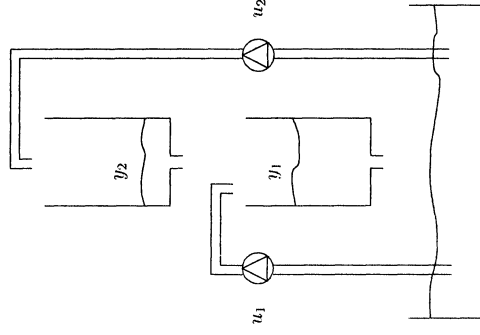
- (d) Bestäm en dynamisk frikoppling

$$U(s) = \begin{bmatrix} 1 & W_{12}(s) \\ W_{21}(s) & 1 \end{bmatrix} \tilde{U}(s)$$

samt rita ett blockschema, som bara innehåller *envariabla* överföringsfunktioner, för hur en regulator baserad på dynamisk frikoppling är strukturerad.

### 8.24

(T) (KTH)



En 2-tanksprocess enligt figuren nedan beskrivs av systemet

$$Y(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{(s+1)^2} \\ 0 & \frac{2}{s+1} \end{bmatrix} U(s)$$

- (a) Bestäm systemets poler och nollställen med multiplicitet.  
 (b) Bestäm RGA för frekvensen 0 och föreslå en lämplig hopparning av styrsignaler och mätsignaler för decentraliserad reglering.

72

(c) Beräkna regulatorparametrar för två stycken PL-regulatorer med överföringsfunktioner

$$K_i \left( 1 + \frac{1}{sT_i} \right), \quad i = 1, 2$$

så att skärfrekvensen är 1 rad/s och fasmarginen är 90° för de envariabla kretsförstärkningarna som beaktas vid decentraliserad reglering enligt förslaget i (b).

(d) Bestäm en dynamisk frikoppling

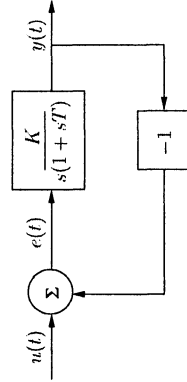
$$U(s) = \begin{bmatrix} 1 & W_{12}(s) \\ W_{21}(s) & 1 \end{bmatrix} \tilde{U}(s)$$

samt rita ett blockschema, som bara innehåller *envariabla* överföringsfunktioner, för hur en regulator baserad på dynamisk frikoppling är strukturerad.

## 9 Minimering av kvadratiske kriterier: LQG

### 9.1

In the below figure of the block diagram for a servo.



The input signal  $u(t)$  is a stationary process with power spectrum

$$\Phi_u(\omega) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + \omega^2}$$

- Determine the power spectrum for  $e(t)$  expressed in  $\omega_0$ ,  $K$  and  $T$ .
- Discuss the choice of  $K$  to get  $Ee^2(t)$  as small as possible.

### 9.2

Determine the time invariant feedback gain matrix  $L$ , which, for the system

$$x(t+1) = x(t) + u(t).$$

minimizes the criterion

$$\sum_{t=0}^{\infty} (x^2(t) + u^2(t))$$

### 9.3

Consider the double integrator

$$\ddot{y}(t) = u(t).$$

(LiTH)

One wants to construct a controller s.t. the criterion

$$\int_0^{\infty} (\dot{y}^2(t) + \eta \cdot u^2(t)) dt; \quad \eta > 0$$

is minimized. Assume that both  $y$  and  $\dot{y}$  can be measured.

Where do the poles of the closed loop system end up? What happens to the control signal if  $\eta$  is made smaller?

### 9.4

(LiTH)

Detta problem består av två delar. Observera att vardera delen kan lösas oberoende av den andra. De är dock sammankopplade så tillvida att de ger varandra ömsesidig ledning.

Del 1.

Betrakta en fjäderupplängd plattform utan dämpning.

9.5

(LiTH)

Betrakta antennen i uppgift 5.15. Man vill nu införa automatisk styrning av antennen. Ett lämpligt mått på det slutna systemets prestanda ges av

$$J = E\{\theta^2(t) + \rho \dot{\theta}^2(t)\}$$

där  $\rho$  är en konstant som man vill ha möjlighet att variera. Ange hur en optimal styrslag för systemet ser ut och hur den skall kombineras med det tidigare framräknade Kalman-filtrat.

9.6

(LiTH)

Betrakta styrning av DC-motorn

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Man vill använda motorn tillsammans med ett system som kan vara oscillativa kring frekvensen 0.5 rad/s, men man vet inte mycket om dess egenskaper. Beskriv hur man kan åstadkomma en LQG-regulator som ser till att robustheten är god – dvs den komplementära känslighetsfunktionen liten – vid denna frekvens!

9.7

(LiTH)

Consider the system

$$z = \frac{1}{p+1}u + \frac{1}{p+1}v$$

$$y = z + \epsilon$$

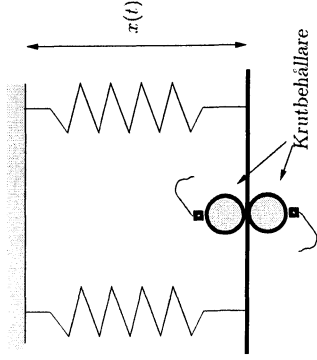
where  $v$  and  $\epsilon$  are unit disturbances with spectra

$$\Phi_v(\omega) \equiv r_1 \quad \text{resp} \quad \Phi_\epsilon(\omega) \equiv 1$$

We minimize the criterion

$$E\{q_1 z^2(t) + u^2(t)\}$$

- (a) Determine the loop transfer function for the closed-loop system.
- (b) What is the difference between  $r_1$ 's and  $q_1$ 's role in this?
- (c) Sketch the loop transfer function. What happens when  $r_1 \rightarrow \infty$  and when  $q_1 \rightarrow \infty$ , respectively?



Plattan styrs genom att krutladdningar bränns av med tids mellanrummet  $T$ . Dessa kan vara av varierande styrka och antingen uppåt eller nedåt riktade. Låt  $m_k$  vara den mängd krut som bringas att explodera vid tiden  $t = kT$  och låt  $u_k = m_k$  eller  $u_k = -m_k$  om explosionen sker i övre respektive undre behållarna.

Med lämpliga val av enheter kan systemet beskrivas av

$$\ddot{x}(t) + x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k \delta(t - kT)$$

där följden  $\{u_k\}$  och utsignalen  $\{y_k\}$ . Låt  $y_k = x(kT)$  och ange på vanlig samplad tillståndsform ett samband mellan insignalen  $\{u_k\}$  och utsignalen  $\{y_k\}$ .

Del 2.

Betrakta systemet

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

$$y(t) = Hx(t)$$

Dimensionen av  $x$  är  $n$  och  $u$  är en skalär.

Samtliga tillstånd är mätbara, och man vill med början vid tiden  $k = 0$  tillämpa en styrslag så att dels

$$x(N) = 0$$

och dels

$$\sum_{k=0}^N u(k) = 0.$$

Ange ett sätt att beräkna en sådan styrslag. Ge också en övre gräns för hur stort  $N$  som behövs.

9.8

(LiTH)

Ett system har statisk förstärkning =  $G_0$ . Det påverkas av systemstörningar, som har all sin energi vid frekvensen noll, dvs

$$\Phi_\nu(\omega) = \delta(\omega)$$

(Systemstörningen är alltså en konstant).

Referenssignalen är noll, liksom mätnuset. Vi väljer en regulator som minimerar

$$E\hat{y}^2(t) + \alpha E\dot{u}^2(t)$$

Vad blir känslighetsfunktionens värde vid frekvensen noll?

9.9

(LiTH)

Consider the system

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{p+1}u + \frac{1}{p+1}\nu \\ y &= z + e \end{aligned}$$

where  $\nu$  is a low-frequency noise

$$\nu = \frac{1}{p+\epsilon}$$

$v$  and  $e$  are white noise with  $\Phi_v(\omega) \equiv \Phi_e(\omega) \equiv 1$ .

(a) Determine the LQG controller that minimizes

$$Ez^2 + E\dot{u}^2$$

as  $\epsilon \rightarrow 0$ !

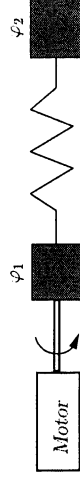
Determine the static gain of the corresponding sensitivity function!

(b) Use output LTR (LTR( $y$ )) to determine  $L$ . What is the static gain of the resulting sensitivity function?

9.10

(LiTH)

Betrakta en motor som driver två roterande massor, förenade med en vev axel:



$\varphi_1$  och  $\varphi_2$  är massornas vinkelågen och  $\omega_1$  och  $\omega_2$  är deras vinkelhastigheter. Deras tröghetsmoment är båda 10. Fjäderkonstanten i axeln är  $k$  och dess dämpning är 0.1. Insignalen är spänningen till motorn. Med tillståndet

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1 - \varphi_2 \\ x_2 &= \dot{\varphi}_1 \\ x_3 &= \dot{\varphi}_2 \end{aligned}$$

fås då tillstandsformnen

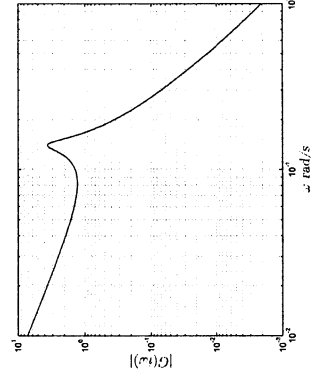
$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2}\omega_0^2 & -0.01 & 0.01 \\ \frac{1}{2}\omega_0^2 & 0.01 & -0.01 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_0 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ z &= (0 \ 0 \ 1) x \end{aligned}$$

där

$$\omega_0^2 = \frac{k}{50}$$

Bodediagrammet för detta system visas i figuren nedan för  $k = 1$ . Resonansstoppen inträffar för  $\omega_0$ . Fjäderkonstanten är inte exakt känd, men har ett värde kring 1. Man vill dock konstruera en regulator som ger ett bra - i varje fall stabilt - slutet system trots variationer i  $k$  (kring 1).

Hur kan modellen ovan utvidgas med en brusmodell så att man får god robusthet mot osäkerhet i värdet på  $k$ , då man använder LQG-design? Ge ett konkret exempel på ett sådant utvidgat system.





**9.11**

(LITH)

Betrakta systemet

$$\frac{1}{s-1}$$

representerat på tillståndsform med brus som

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + u + v_1 \\ z &= x \\ y &= x + v_2 \end{aligned}$$

Brusen  $v_i$  är vita med varianserna  $R_i$ . Vi använder kriteriet

$$V = Q_1 x^2 + Q_2 u^2,$$

och söker LQG-regulatorn.

- (a) Visa att regulatorn beror bara på kvoterna  $\alpha = Q_1/Q_2$  och  $\beta = R_1/R_2$ !
- (b) Beräkna det slutna systemets poler, samt kretsförstärkningen och skärfrekvensen som funktion av  $\alpha$  och  $\beta$ !

**9.12**

(T) (LITH)

Betrakta systemet

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} u(t)$$

Visa att

$$u(t) = (2 \ -3) x(t)$$

*inte* kan vara en optimal tillståndsåterkoppling i LQ-mening, för något kvadratisk kriterium av typen

$$\min \int (x^T(t)Q_1x(t) + Q_2u^2(t)) dt$$

där  $Q_1$  är en positiv definit matris!

**9.13**

(T) (LITH)

Betrakta systemet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix} u \\ y &= (1 \ 1) x \end{aligned}$$

Man önskar minimera kriteriet

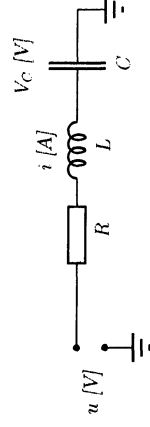
$$V(T) = \int_0^T [x^T(t)x(t) + u^2(t)] dt$$

Är det möjligt att finna en regulator  $u = -Lx$  (tillståndsåterkoppling) sådan att  $V(T) < \infty$  när  $T \rightarrow \infty$ ?

**9.14**

(T) (LITH)

I figuren nedan finns en enkel elektrisk krets återgiven.



Inför tillståndsvariablerna  $x_1 = V_C$  och  $x_2 = i$ . Med komponentvärdena

$$R = 5 \Omega, \quad L = 0.1 H, \quad C = 1000 \mu F$$

fas tillståndsformen

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1000 \\ -10 & -50 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= (1 \ 0) x(t) \end{aligned}$$

Beräkna en tillståndsåterkoppling som minimerar kriteriet

$$J = \int_0^\infty (x_2^2(t) + 0.01u^2(t)) dt$$

(Kriteriet återspeglar att man vill begränsa eff-kt-förhållandena utan att få för stora insignaler.)

**9.15**

(T) (LITH)

Ett system ges av tillståndsekvationen

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v(t)$$

$$z(t) = (1 \ 0 \ 0) x(t)$$

$$y(t) = z(t) + e(t)$$

där  $e(t)$  och  $v(t)$  är enhetsstörningar.

Man bestämmer regulatorn som återkoppling från rekonstruerade tillstånd genom att minimera

$$E \int_0^{\infty} (t + u^2(t)) dt$$

Hur påverkar talet  $A$  det slutna systemets känslighetsfunktion?

### 9.16

(T) (LTH)

En förenklad modell för hur höjdrodvinkeln påverkar ett flygplans rörelser ges av

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -0.01 & 0.03 & -10 \\ 0 & -1 & 300 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 4 \\ -20 \\ -10 \end{bmatrix} u$$

där

$$x = \begin{bmatrix} \text{rollvinkel} \\ \text{girvinkel} \\ \text{tippvinkelhastighet} \end{bmatrix}$$

Man är speciellt intresserad av reglering av tippvinkelhastigheten och väljer som reglerstorhet

$$z = [0 \ 0 \ 1]$$

Alla tillståndsvariablerna mätes (med brus)

$$y = x + e$$

Man vill göra en regulator av typen återkoppling från rekonstruerade tillstånd, med hjälp av linjärvadratisk metodik. Det är speciellt viktigt att känslighetsfunktionen är liten kring frekvensen 1 rad/sek. Visa hur flygplansmodellen skall modifieras så att en sådan känslighetsfunktion uppnås.

### 9.17 (\*)

Betrakta systemet

$$y(t) - 1.7y(t-1) + 0.7y(t-2) = 0.9\Delta u(t-1) - 0.6\Delta u(t-2)$$

där  $\Delta u(t) = u(t) - u(t-1)$ . Beräkna den styrslag av typen

$$\Delta u(t) = -F_y(q)y(t) + F_r(q)r(t)$$

som erhålls enligt LQ da kriteriet är

$$J = \sum_{k=1}^3 (r(t+k) - \hat{y}(t+k))^2 + 0.1 \cdot (\Delta u(t+k-1))^2.$$

### 9.18

(Chalmers)

Den tidsdiskreta processen

$$x_1(t+1) = x_2(t)$$

$$x_2(t+1) = 0.2x_2(t) + u(t)$$

skall styras från startvärdet  $x(0) = (1 \ 0)^T$  så att följande kriterie minimeras

$$V = \sum_{t=0}^{\infty} \{x_1^2(t) + 0.5u^2(t)\}.$$

(a) Bestäm den optimala styrslagen  $u(t) = -Lx(t)$ !

(b) Undersök för vilka värden på  $L$  i en återkoppling  $u(t) = -Lx(t)$  som det återkopplade systemet är stabilt! Illustrera resultatet i parameterplanet  $(l_1, l_2)$ !

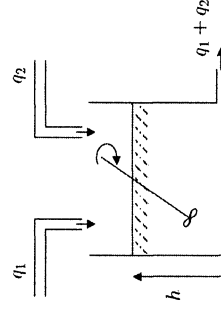
### 9.19

(Chalmers)

En linjäriserad modell av en tank med avlopp och två tillflöden har tagits fram (se figur):

$$(s+1)\Delta H(s) = \Delta Q_1(s) + \Delta Q_2(s),$$

där  $\Delta H$ ,  $\Delta Q_1$  och  $\Delta Q_2$  är avvikelserna i nivå, styrflöde och störflöde kring arbetspunkten  $(h, \hat{q}_1, \hat{q}_2)$ .



Ett digitalt regelsystem för konstanthållning av den uppmätta nivån  $h$  skall konstrueras så att inga kvarstående fel uppstår vid stegförändringar i störffödet  $q_2$ . Samplingstiden väljs så kort att ett tidsdiskret prestationsmått för linjärvadratisk reglering kan väljas direkt:

$$V = \sum_{t=0}^{\infty} \{x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)\}$$

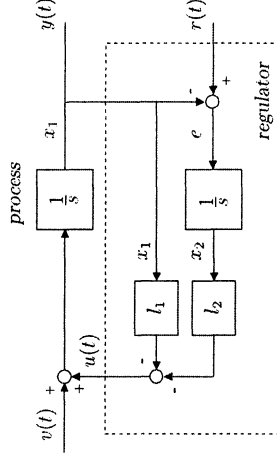
där  $x_1(t) = \Delta h(t)$  och  $x_2(t)$  är ett integrallstånd.

- (a) Ange de matriser som behövs för lösning av Ricattiekvationen i detta fall!
- (b) Rita ett blockschema som i detalj visar hur regelsystemet fungerar! Varje komponent skall vara SISO.

**9.20**

(Chalmers)

Ett system, som utgörs av en skalär integration, skall PI-regleras. Man önskar i detta fall realisera en PI-regulator som en optimal tidsdiskret regulator genom linjärvadratisk metodik. Utgångspunkten för problemet är blockschemat i figuren.



Kriteriet som skall minimeras är givet i *kontinuerlig tid* på integrallform:

$$V = \int_0^{\infty} \{x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)\} dt$$

Samplingsintervall är valt till en tidsenhet ( $T = 1$ ) och styrsignalen är konstant mellan två på varandra följande sampel.

Ange de tidsdiskreta koefficientmatriser som krävs för att lösa den tidsdiskreta Ricattiekvationen, vars lösning ger styrlagen  $L = (l_1 \ l_2)$ !

**9.21**

(LTH)

Antag att vi har en modell som beskriver ett verkligt system bra förutom i ett smalt frekvensintervall där modellosäkerheten är stor. Förklara hur man i en LQG-design kan ta hänsyn till detta så att det slutna systemet blir robust. (Inga beräkningar behöver göras.)

**9.22**

(TU)

A DC servo, with transfer function  $C(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ , is represented in state space form as

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

An LQ based regulator,  $u = -Lx + mr$ , is designed using the criterion

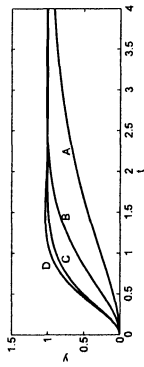
$$V = \int_0^{\infty} (x^T(t)Q_1x(t) + u^T(t)Q_2u(t)) dt$$

Some different cases, corresponding to different weighting matrices  $Q_1$  and  $Q_2$ , were tried as follows:

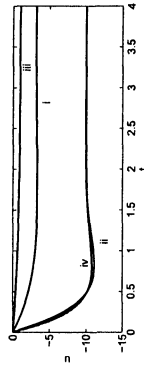
case	$Q_1$	$Q_2$
1	$\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	1
2	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	1
3	$\begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	1
4	$\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	0.1

The response in  $u$  and  $y$  on a step in the reference signal  $r$  for the closed loop system are shown in the figures below.

Output



Input



Determine (and motivate!) which case that corresponds to the different curves in the plots. As the plots ii) and iv) are very close, it is not required that these two are distinguished.

*Hint:* It may be useful to realize that  $x_1$  is the position, and to find out the physical meaning of  $x_2$ .

**9.23** (T) (UU)

A DC servo, with transfer function  $C(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ , is represented in state space form as

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

An LQG based regulator,  $u = -L\hat{x} + mr$  is designed using the criterion

$$V = \int_0^\infty (x^T(t)Q_1x(t) + u^T(t)Q_2u(t)) dt$$

with

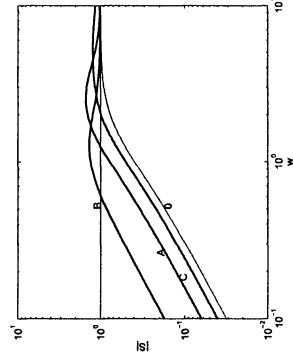
$$Q_1 = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = 1$$

In the regulator  $\hat{x}$  is determined using a Kalman filter designed using some covariance matrices  $R_1$  and  $R_2$  as follows

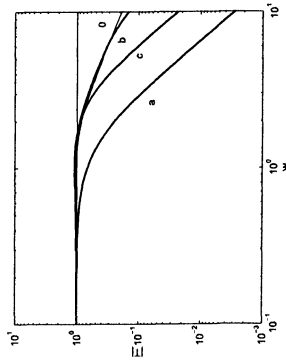
Case	$R_1$	$R_2$
1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	0.01
2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}$	0.01
3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{pmatrix}$	0.01

In the diagrams below are displayed the sensitivity function  $S(i\omega)$  and the complementary sensitivity function  $T(i\omega)$  for these cases. The curves marked '0' refer to the case of an exact state feedback.

Sensitivity functions



Complementary sensitivity functions



a) Determine (with motivation) which curves of  $S(i\omega)$  and  $T(i\omega)$  that correspond to each case. [The curves marked 0 corresponds to the pure LQ case.]

b) What result will be obtained if the covariance matrices were chosen as

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}; \quad R_2 = 1$$

**9.24** (T) (KTH)

Vi vill reglera systemet

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

(a) Vi vill reglera detta system samtidigt som vi vill straffa både  $u(t)$  och ändringarna i  $u(t)$ , dvs  $\dot{u}(t)$ .

Et sätt att åstraka detta är att införa den nya fiktiva insignalen  $\bar{u}(t) = \dot{u}(t)$ , och det extra tillståndet  $x_{r+1}(t) = u(t)$ .

Änge motsvarande utvidgade tillståndsmodell, med  $\bar{u}(t)$  som insignal.

(b) Antag att man nu designar en tillståndsåterkoppling, mha t.ex. LQ, för det utvidgade systemet. Hur kan man implementera denna styrslag via  $u(t)$ ? Dvs ange motsvarande överföringsfunktionsmatris från  $\bar{u}(t)$  till  $u(t)$ . Förklara sedan varför man med denna design kan få en "lugnare" styrsignal.

**10 Att forma kretsförstärkningen**

**10.1** (LiTH)

Consider the system

$$y = \frac{1}{p+1}u.$$

We would like to design a closed-loop system with  $S$ ,  $T$  and  $G_{\text{var}}$ , such that

$$\int |S(i\omega)/\omega|^2 + |0.5T(i\omega)|^2 + |5G_{\text{var}}(i\omega)|^2 d\omega$$

is minimized. Determine a controller that achieves this!

**10.2** (LiTH)

Betrakta systemet

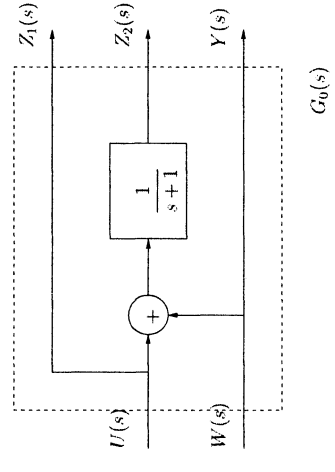
$$y = \frac{1}{p+1}u$$

Vi vill skapa ett slutet system med  $S$ ,  $T$  och  $G_{\text{var}}$ , sådant att

$$\begin{aligned} |S(i\omega)| &< \gamma/\omega \\ |T(i\omega)| &< 2\gamma \\ |G_{\text{var}}(i\omega)| &< 0.2\gamma \end{aligned}$$

Skriv upp de ekvationer och villkor som bestämmer denna regulator.

**10.3** (T) (KTH)



Consider the extended system  $G_0(s)$  given by the block diagram above.

(a) Show that

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= -x(t) + u(t) + w(t) \\ z(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= w(t) \end{aligned}$$

is a state-space description of  $G_0(s)$ .

(b) An observer-based controller is given by

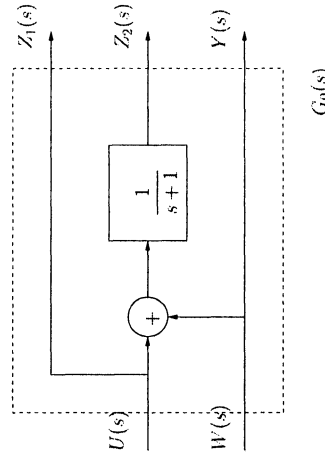
$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}(t)}{dt} &= -\hat{x}(t) + u(t) + y(t) \\ u(t) &= -L\hat{x}(t) \end{aligned}$$

Determine  $L$  such that  $\|G_{ec}\|_2$  is minimized, where  $G_{ec}(s)$  is the closed-loop transfer function from  $W(s)$  to  $Z(s)$ . Compute the controller transfer function from  $Y(s)$  to  $U(s)$  for this optimal  $L$ .

(c) What is the value of  $\|G_{ec}\|_2$  for the optimal controller determined in (b)?  
Hint:  $\|G_{ec}\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}(G_{ec}(i\omega)G_{ec}^T(-i\omega)) d\omega$

(d) Let  $U(s) = -KY(s)$ , i.e. consider proportional control. Determine the value of  $K$  that minimizes  $\|G_{ec}\|_2$ , where  $G_{ec}(s)$  is the closed-loop transfer function from  $W(s)$  to  $Z(s)$  under proportional control. What is the minimal value of  $\|G_{ec}\|_2$ ?

10.4



(T) (KTH)

Consider the extended system  $G_0(s)$  given by the block diagram above.

89

(a) Show that

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= -x(t) + u(t) + w(t) \\ z(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= w(t) \end{aligned}$$

is a state-space description of  $G_0(s)$ .

(b) An observer-based controller is given by

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}(t)}{dt} &= -\hat{x}(t) + u(t) + y(t) \\ u(t) &= -L\hat{x}(t) \end{aligned}$$

Determine  $L$  such that  $\|G_{ec}\|_{\infty} \leq 1$  and such that the closed-loop system is internally stable, where  $G_{ec}(s)$  is the closed-loop transfer function from  $W(s)$  to  $Z(s)$ . (Observe that the claim that (a)  $F_y$  satisfies all conditions (10.19) on page 318 of the text book can be replaced by (a)  $F_y$  satisfies (10.18))

(c) Determine the same observer-based controller as in (b). Determine the  $L$  that minimizes  $\|G_{ec}\|_{\infty}$  and that ensures that the closed-loop system is internally stable. Compute the controller transfer function from  $Y(s)$  to  $U(s)$  for this optimal  $L$ .

(d) Let  $U(s) = -KY(s)$ , i.e. assume proportional control. Determine the value of  $K$  which minimizes  $\|G_{ec}\|_{\infty}$ , where  $G_{ec}(s)$  is the closed-loop system transfer function from  $W(s)$  to  $Z(s)$  under proportional control. What is the smallest value of  $\|G_{ec}\|_{\infty}$ ?

10.5

(T) (LiTH)

Consider the SISO system with state-space representation

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

We would like to use loop shaping with the weights

$$W_S = \frac{1}{s}, \quad W_T = 1, \quad W_u = 1$$

(a) State the equations which determine the optimal controller in the  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_{\infty}$  sense, respectively.

90

- (b) Write out the observer equations for the extended state-vector and show that the optimal controller can be written as

$$u(t) = \frac{\alpha}{1 + L(pI - A)^{-1}B} \int_0^t y(\tau) d\tau$$

- for some  $L$ , where  $\alpha = 1$  for the  $\mathcal{H}_2$  controller and  $\alpha > 1$  for the  $\mathcal{H}_\infty$  controller. State the equation that determines  $L$ .
- (c) Show that the controller implements integral action unless  $G(s)$  itself contains an integrator.

### 10.6 (LiTH)

Betrakta återigen systemet i uppgift 9.10.

- (a) Ge förslag på viktfunktioner  $W_S$ ,  $W_T$  och  $W_u$  så att man får god robusthet mot osäkerhet i värdet på  $k$  då man använder  $\mathcal{H}_2$ - eller  $\mathcal{H}_\infty$ -design.
- (b) Ange det utökade systemet från  $u$  och  $w$  till  $z$  på tillståndsform.

### 10.7 (Chalmers)

Om inga störningar förekommer kan följande differentialekvation antas beskriva en process:

$$\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = u(t).$$

Processen skall  $\mathcal{H}_2$  regleras, och man antar viktfunktionerna

$$W_S(s) = \frac{1}{s}; \quad W_T(s) = 1 \quad \text{och} \quad W_u = 1.$$

- (a) Ställ upp en tillståndsmodell för det utvidgade systemet på standardformen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Nu(t) \\ z(t) &= Mx(t) + Du(t) \\ y(t) &= Cx(t) + w(t) \end{aligned}$$

- (b) Bestäm  $F_v(p)$ , där  $u(t) = -F_v(p)y(t)$  är den resulterande regulatorn!

### 10.8 (T) (Chalmers)

Anta att vi har följande processbeskrivning:

$$\begin{aligned} z(t) &= G(p)u(t) + w(t) \\ y(t) &= z(t) + n(t) \end{aligned}$$

Vi skall reglera  $z$  med en  $\mathcal{H}_\infty$ -regulator, d v s en återkoppling  $u(t) = -F_y(p)y(t)$  som minimerar  $\|G_{ec}\|_\infty$ , där

$$G_{ec}(s) = \begin{bmatrix} W_U(s)G_{wu}(s) \\ -W_T(s)T(s) \\ W_S(s)S(s) \end{bmatrix}$$

$G_{wu}(s)$  är överföringsfunktionen från  $w$  till  $u$ ,  $T$  är komplementära känslighetsfunktionerna och  $S$  är känslighetsfunktionen. Följande viktfunktioner har antatts:

$$W_S(s) = \frac{s + \omega_S}{s}; \quad W_T(s) = \frac{s + \omega_T}{\omega_T} \frac{1}{1 + \epsilon s} \quad \text{och} \quad W_U(s) = 1,$$

där  $\epsilon \ll 1/\omega_T$ .

- (a) Om vi ökar  $\omega_S$  kan vi förvänta oss bättre eller sämre dämpning av lågfrekventa processförändringar?
- (b) Om vi ökar  $\omega_T$  kan vi förvänta oss en ökning eller en minskning av det slutna systemets bandbredd?

### 10.9 (T) (Chalmers)

En  $\mathcal{H}_\infty$ -regulator  $F_y$  (se figur) har bestämts för processen

$$G(s) = \frac{1 + s}{1 + 0.3s + 2s^2}$$

så att  $\|G_{ec}\|_\infty < \gamma$ , där  $\gamma = 2.5$  och

$$\begin{aligned} G_{ec} &= \begin{pmatrix} W_u G_{wu} & -W_T T & W_S S \end{pmatrix}^T \\ W_u &= \text{konstant} \\ W_T &= \frac{s + 3}{1 + 0.1s} \\ W_S &= \frac{s + 3}{s} \end{aligned}$$

$S$  är det återkopplade systemets känslighetsfunktion.  $T$  är dess komplementära känslighetsfunktion och  $G_{wu}$  är överföringsfunktionen från störningen  $w$  till styrsignalen  $u$ .

2. Approximate the process dynamics as

$$G_P(s) = e^{-s\tau} = \frac{1 - s\tau/2}{1 + s\tau/2}$$

and represent the loop gain  $G_P G_I$  in state space form.

3. Design a  $H_\infty$  controller based on the Glover-McFarlane design principle.

Tasks to be solved:

- Choose  $\beta = 0.5$  (which will give the phase margin  $\varphi_m \approx 33^\circ$ ) and give a state space realization in observable canonical form for the loop gain (see point 2 above).
- In the design of the robust controller the solutions to the pertinent Riccati equations are

$$Z = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 2.5 \end{pmatrix}$$

You do not need to verify these solutions. Determine the matrix  $L$  in the feedback.

- When determining the matrix  $K$ , the design parameter  $\alpha$  is chosen as somewhat larger than 1. What will happen if one makes the choice  $\alpha = 1$ ?
- Why has a pure integrator, and not a PI-regulator, been chosen as the initial design?

### 10.11

(T) (UU)

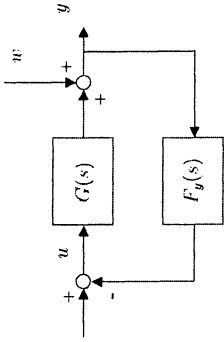
Consider control of an integrating scalar system given by

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u \\ y &= x + w \end{aligned}$$

Assume that the specifications for the control are given in terms of the weighting functions

$$W_T = 0.5, \quad W_S = \frac{a}{s}, \quad W_u = b$$

- Represent the extended system with artificial outputs  $z$ , see (10.4) in the textbook, in state space form.



(a) Vilken ordning har regulatorn  $F_f$ ?

(b) En av specifikationerna för systemet var att störningar  $w$  som är långsammare är 0.1 rad/s skall dämpas minst en faktor 10. Är detta uppfyllt för det nominella systemet (d v s om  $G$  enligt ovan antas vara en exakt beskrivning av processen)?

(c) För att hålla ned ordningen på regulatorn har man vid modelleringen, d v s när man bestämde att  $G$  skulle se ut som ovan, ignorerat en snabb dynamisk mod i processen. En mer korrekt modell är

$$G(s) = \frac{1 + s}{1 + 0.3s + 2s^2} \frac{1}{1 + 0.1s}$$

Om vi antar att detta är den sanna processen är det med oförändrat  $F_f$  reglerade systemet stabilt?

### 10.10

(T) (UU)

A certain SISO system is given by

$$y(t) = u(t - \tau) + w(t)$$

( $u$  input,  $w$  process disturbance) that is, it consists of a pure time-delay with no additional dynamics. However, the time-delay  $\tau$  is not precisely known, but the objective of the feedback system is to make the system robust against variations in the value of  $\tau$ . Some experiments indicate that  $\tau \approx 2$ , which can be used for a nominal model. The design will be based on the following scheme.

- First design an integrator as feedback.

$$G_I(s) = \frac{1}{s}$$

so that the system gets a reasonable phase margin.



b) Are the conditions

$$D^T M = 0, \quad D^T D = I$$

satisfied? If not, describe what can be done about it?

**10.12**

(T) (Chalmers)

Anta att vi har följande processbeskrivning:

$$\begin{aligned} z(t) &= G(p)u(t) + w(t) \\ y(t) &= z(t) + n(t) \end{aligned}$$

Vi skall reglera  $z$  med en  $\mathcal{H}_\infty$ -regulator, d v s en återkoppling  $u(t) = -F_y(p)y(t) + F_w(p)w(t)$  som minimerar  $\|G_{ec}\|_\infty$ , där

$$G_{ec}(s) = \begin{bmatrix} W_U(s)G_{wu}(s) & \\ -W_T(s)T(s) & \\ W_S(s)S(s) & \end{bmatrix}$$

$G_{wu}(s)$  är överföringsfunktionen från  $w$  till  $u$ ,  $T$  är komplementära känslighetsfunktionen och  $S$  är känslighetsfunktionen.

(a) Följande viktfunction på komplementära känslighetsfunktionen  $T$  ansätts

$$W_T(s) = \frac{s + \omega_T}{\omega_T} \frac{1}{1 + \epsilon s}$$

där  $\epsilon \ll 1/\omega_T$ . På vilket sätt kan vi förvänta oss att det slutna systemets robusthet påverkas av att vi ökar  $\omega_T$ ?

(b) Låt viktfunctionen på känslighetsfunktionen vara  $W_S$ . En av viktfunctionerna nedan resulterar i att regulatorn får integrerande verkan. Vilken?

$$W_S(s) = 1, \quad W_S(s) = \frac{s + \omega_S}{s}, \quad W_S(s) = \frac{s}{s + \omega_S}$$

Svaren till varje fråga kräver en kort motivering.

**10.13**

(T) (Chalmers)

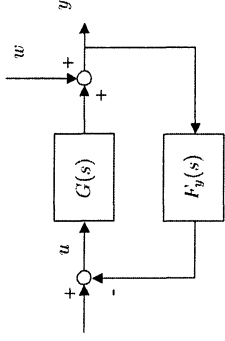
En  $\mathcal{H}_\infty$ -regulator  $F_y$  (se figur) har bestämts för processen

$$G(s) = \frac{1 + s}{1 + 0.3s + 2s^2}$$

så att  $\|G_{ec}\|_\infty < \gamma$ , där  $\gamma = 2.5$  och

$$\begin{aligned} G_{ec} &= \begin{pmatrix} W_u G_{wu} & -W_T T & W_S S \end{pmatrix}^T \\ W_u &= \text{konstant} \\ W_T &= \frac{s + 3}{1 + 0.1s} \\ W_S &= \frac{s + 3}{s} \end{aligned}$$

$S$  är det återkopplade systemets känslighetsfunktion.  $T$  är dess komplementära känslighetsfunktion och  $G_{wu}$  är överföringsfunktionen från störningen  $w$  till styrsignalen  $u$ .



(a) Vilken ordning har regulatorn  $F_y$  (motivering krävs)?

(b) En av specifikationerna för systemet var att störningar  $w$  som är lågsannare än  $0.1 \text{ rad/s}$  skall dämpas minst en faktor 10. Är detta uppfyllt för det nominella systemet (d v s om  $G$  enligt ovan antas vara en exakt beskrivning av processen)?

(c) För att hålla ned ordningen på regulatorn har man vid modelleringen, d v s när man bestämde att  $G$  skulle se ut som ovan, ignorerat en snabb dynamisk mod i processen. En mer korrekt modell är

$$G(s) = \frac{1 + s}{1 + 0.3s + 2s^2} \frac{1}{1 + 0.1s}$$

Om vi antar att detta är den samma processen är det med oförändrat  $F_y$  reglerade systemet stabilt?

**10.14**

(T) (KTH)

(a) Uppgiften är att konstruera en regulator för det instabila systemet

$$G(s) = \frac{1}{s - p}, \quad p > 0.$$

genom att minimera kriteriet

$$V = \int_0^{\infty} [y^2(t) + Q_2 u(t)^2] dt.$$

Här är  $y(t)$  utsignal och  $u(t)$  insignal.

Var hamnar det slutna systemets pol då  $Q_2 \rightarrow \infty$ ?

- (b) Antag att vi istället vill använda oss  $\mathcal{H}_{\infty}$  design, genom att konstruera en  $P$ -regulator ( $F(s) = K$ ) som minimerar överföringsfunktionen från störning till styrsignal, dvs

$$\min_K \|KS(s)\|_{\infty}$$

där  $S(s)$  är motsvarande känslighetsfunktion. Det öppna systemet är samma som i uppgift a), dvs

$$G(s) = \frac{1}{s-p}, \quad p > 0$$

Ange det optimala värdet på  $K$  och motsvarande slutna systems pol!

*Lösning:* Den optimala lösningen satisfierar här

$$|K_{opt}S_{opt}(i\omega)| = \text{en konstant.}$$

dvs förstärkningen för den optimala överföringsfunktionen från störning till styrsignal är frekvensoberoende.

## 11 Beskrivning av olinjära system

## 12 Stabilitet hos olinjära system

### 12.1

Givet den olinjära differentialekvationen

$$\ddot{y} + 0.2(1 + \dot{y}^2)y + y = 0$$

Låt tillståndsvariablerna vara  $x_1 = y$  och  $x_2 = \dot{y}$ . Ställ upp stabilitetsvillkoren för systemets nollösning. Pröva som Lyapunovfunktion

$$V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2).$$

97

### 12.2

Betrakta systemet

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sin x_1 + x_2^3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 \end{aligned}$$

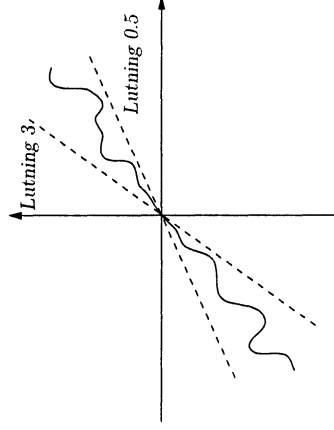
Kan funktionen

$$V(x_1, x_2) = -\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^4$$

användas som Lyapunovfunktion för att visa stabilitet hos detta system? Motivera!

### 12.3

En olinjär funktion ligger mellan linjerna enligt figur.



Vilken cirkel i det komplexa talplanet svarar denna olinjåritet mot enligt cirkelkriteriet?

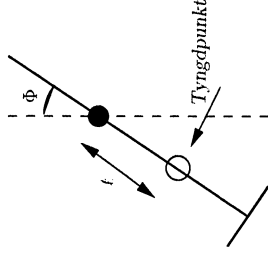
### 12.4

Ett olinjärt system beskrivs av följande blockschema

98

### 12.6

Betrakta gungan i figuren nedan.



Gungans rörelse beskrivs av ekvationen

$$J \frac{d^2 \Phi}{dt^2} + mg\ell \sin \Phi = 0$$

där  $m$  är massan och  $J$  tröghetsmomentet. Genom att stävande på gungbrädet omväxlande böja och rätta på knäna kan man styra gungan. Tyngdpunktsavståndet  $\ell$  är då styrsignal, medan vi tillåter oss betrakta  $J$  som konstant.

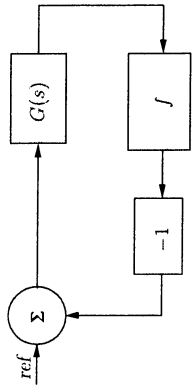
Visa att insignalen

$$\ell = \ell_0 + \varepsilon \Phi, \quad \varepsilon > 0$$

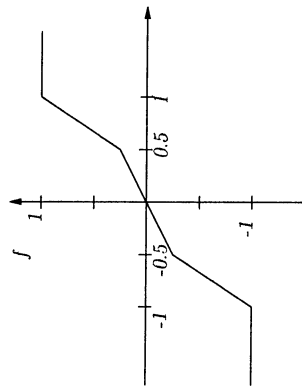
gör att gungan återförs till viloläge i  $\Phi = 0$ .

### 12.7

Nedanstående uppkoppling är given

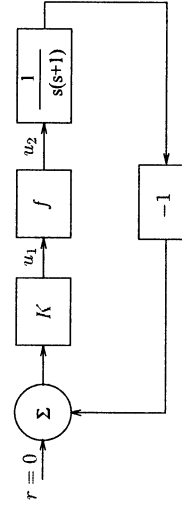


där  $G(s)$  är ett linjärt system och den statiska olinjäriteten  $f$  ges i figuren nedan.

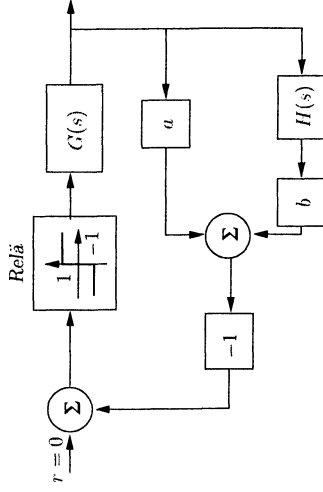


Vilka krav måste man enligt cirkekriteriet ställa på  $G(s)$  för att garantera stabilitet hos det återkopplade systemet?

### 12.5



Den olinjära länken  $f$  är sådan att  $u_2$  har samma tecken som  $u_1$  men är i övrigt okänd. Vilka  $K$ -värden ( $K > 0$ ) kommer enligt cirkekriteriet att garantera stabilitet?



Här är  $H(s) = s$  och  $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$ . Hur ska (tillstånd)återkopplingen  $a$  och  $b$  väljas för att garantera stabilitet enligt Lyapunovteori.

Ledning: Ansätt en kvadratisk Lyapunovfunktion.

### 12.8

I ett servosystem finns en olinjäritet där sambandet mellan insignalen  $u$  och utsignalen  $y$  ges av

$$y = u + \arctan(u)$$

Vilket krav ställs på den linjära delen av servosystemet om stabilitet enligt cirkelkriteriet skall kunna garanteras?

### 12.9

En förenklad modell för hur höjdrodvinkeln påverkar ett flygplans rörelse ges av

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -0.01 & 0.03 & -10 \\ 0 & -1 & 300 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 4 \\ -20 \\ -10 \end{bmatrix} u$$

där

$$x = \begin{bmatrix} \text{rollvinkel} \\ \text{girvinkel} \\ \text{tippvinkelhastighet} \end{bmatrix}$$

Alla tillstånd kan mätas och man använder styrlagen

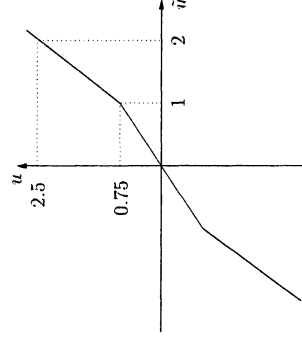
$$\ddot{u} = -L\dot{x} + \ddot{r}$$

där  $L$  beräknats som den återkoppling som minimerar

$$\int_0^{\infty} (x^T(t)Q_1x(t) + u^2(t)) dt$$

för  $Q_1 = 10 \cdot I$

Den kommanderade rodevinkeln  $\ddot{u}$  skiljer dock sig från den verkliga  $u$ , pga effekter i de hydrauliska rodeservoerna. Sambandet visas i figuren nedan.



Blir det slutna systemet ändå stabilt? Motivera!

## 13 Kvalitativt uppförande. Fasplan

### 13.1

Givet differentialekvationen

$$\ddot{x} - (0.1 - \frac{10}{3}x^2)\dot{x} + x + x^2 = 0$$

Bestäm de singulära punkterna och deras karaktär.

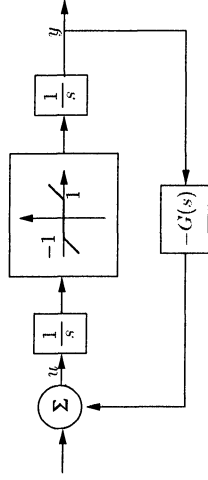
### 13.2

Bestäm fasporträttet för ett positionsservo enligt figuren.

### 13.4

(LiTH)

Linus befinner sig på hemväg efter tentamensperiod. På motorvägen utanför Linköping griper en vindstöt tag i bilen och driver den ett stycke ur önskad position i sidled. Din uppgift består i att med hjälp av fasplananalys avgöra hur bilens avvikelse i sidled utvecklar sig (t ex kommer bilen att återgå till den önskade positionen). Om bilen har konstant hastighet i färdriktningen kan situationen beskrivas av följande figur



Här är  $u$  det vridmoment som föraren påverkar ratten med. Glappet finns i en kuggväxel i styrinrättningen.  $y$  är bilens fel i sidled.  $G(s)$  är överföringsfunktionen från Linus synintryck av avvikelser till den kraft med vilken han vrider ratten. Skilj på två fall.

1.  $G(s) = 1$  (tentamensperioden slutade med fest)
2.  $G(s) = 1 + s$  (tentamensperioden slutade utan fest)

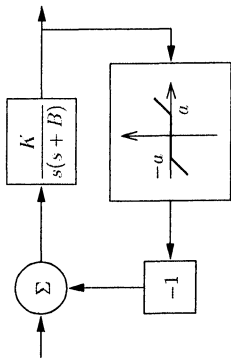
### 13.5

I ett enkelt ekosystem finns två slags fiskar. Den ena sorten lever på alger och den andra sorten lever på den förra. Låt  $x_1$  beteckna mängden av algätande fiskar och låt  $x_2$  beteckna mängden fiskätande fiskar. Då gäller

$$\dot{x}_1 = 2x_1 - \frac{x_1 x_2}{1 + \frac{1}{6}x_1} - 0.2x_1^2$$

$$\dot{x}_2 = -3x_2 + \frac{x_1 x_2}{1 + \frac{1}{6}x_1}$$

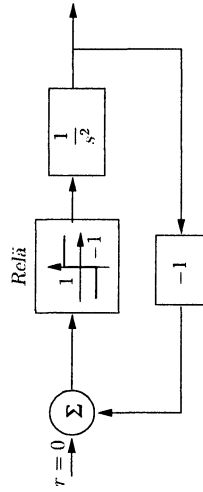
(a) Bestäm de stationära punkterna till dessa ekvationer.



Positionen avkänns med en F-transformator, som kan beskrivas med ett olinjärt block av typ dödmodrad. Antag att  $K > \frac{B^2}{4}$ .

### 13.3

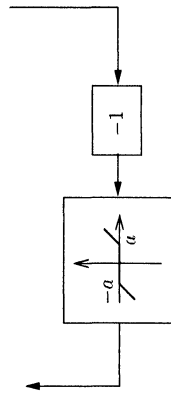
Följande system är givet



(a) Da insignalen till reläet är noll är utsignalen +1 eller -1, beroende på insignalens tidigare värde. Reläet slår alltså inte om, förrän insignalen bytt tecken.

Bestäm fasporträttet.

(b) På grund av ofullkomligheter i återkopplingslänken blir emellertid den verkliga återkopplingen enligt figur nedan.



Bestäm fasporträttet för det så erhållna systemet.

(b) Bestäm karaktären hos de stationära punkterna och skissa fasplanen i deras närhet. (Det räcker alltså att betrakta respektive linjäriserade ekvationer).

(c) Sätt samman fasplanen för de linjäriserade ekvationerna på ett sätt som verkar rimligt utan att göra några beräkningar. Det räcker att betrakta  $x_1 > x_2 > 0$ .

Tolkningen av de givna ekvationerna är följande:

Om de algätande fiskarna hade obegränsad tillgång till föda och saknade fiender, skulle de tillväxa exponentiellt enligt

$$\dot{x}_1 = 2x_1$$

Eftersom tillgången på alger är begränsad inträder dock en mättning av tillväxten enligt

$$\dot{x}_1 = 2x_1 - 0.2x_1^2.$$

Finns nu dessutom fienden  $x_2$  närvarande kommer algätarna att bli uppätta i takt

$$\frac{x_1 x_2}{1 + \frac{1}{6} x_1}$$

Tolkningen av denna term är att om  $x_1$  är stort kan varje  $x_2$ -fisk äta sig mätt, vilket svarar mot 6  $x_1$ -fiskar per tidsenhet. Är däremot  $x_1$  relativt litet åter  $x_2$ -fiskarna mindre.

Den andra ekvationen betyder att om tillgången på mat är obegränsad ( $x_1 = \infty$ ) så förökar sig  $x_2$ -fiskarna enligt

$$\dot{x}_2 = 3x_2.$$

Saknas däremot mat ( $x_1 = 0$ ) dör  $x_2$ -fiskarna ut enligt

$$\dot{x}_2 = -3x_2$$

### 13.6

En kropp är upphängd i en fjäder. Dess läge  $y(t)$  uppfyller då differentialekvationen

$$\ddot{y}(t) + y(t) = f(t)$$

Där  $f(t)$  är en extern kraft som påverkar kroppen. Rita fasplan för systemet om

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{om } \dot{y}(t) > 0 \\ +1 & \text{om } \dot{y}(t) < 0 \end{cases}$$

Kommer systemet att svänga in sig mot något jämviktsläge?

### 13.7

Betrakta systemet

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -x_1^3 + u \\ x_1 \end{pmatrix}$$

(a) Skissa fasplanet för  $u = 0$ .

(b) Använd Lyapunovfunktionen

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2$$

för att föreslå en styrslag  $u = f(x_1, x_2)$

som gör origo globalt asymptotiskt stabilt. Skissa fasplanet för det återkopplade systemet nära origo.

### 13.8

For each of the following systems, find all equilibrium points, and determine the type of each isolated equilibrium.

(a)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \frac{x_2^3}{6} - x_2 \end{aligned}$$

(b)

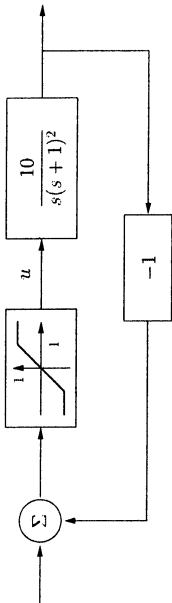
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2(1 - 3x_1^2 - 2x_2^2) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (1 - x_1)x_1 - \frac{2x_1x_2}{1 + x_1} \\ \dot{x}_2 &= \left(2 - \frac{x_2}{1 + x_1}\right)x_2 \end{aligned}$$

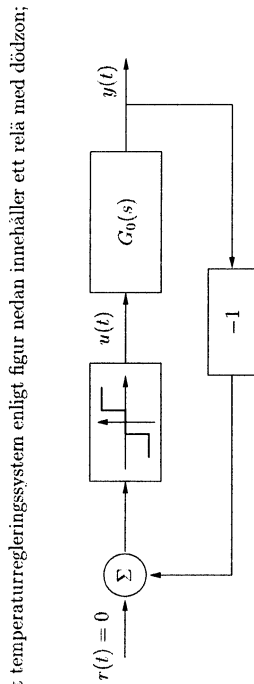
## 14 Självsvängningar och beskrivande funktion

14.1



Undersök systemets stabilitet. Om en periodisk lösning existerar bestämt då frekvens och amplitud hos denna.

14.2



där  $G_0(s) = \frac{1}{s(1+s)^2}$ ,  $\pm D$  är dödzonens bredd och  $\pm H$  är reläets utsignalnivå. Dessa storheter har sådana värden att en stabil självsvängning nått och jämt existerar (dvs om  $H$  minskas eller  $D$  ökas något kan ingen stabil själv svängning existera). Självsvängningens amplitud är 2.5 enheter. Bestäm  $D$ ,  $H$  och självsvängningens frekvens.

Olinjäritet: Relä med dödzon

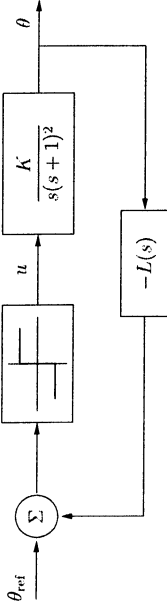
$$\operatorname{Re}\{Y_N(\sigma)\} = \frac{4H}{\pi \cdot C} \sqrt{1 - D^2/C^2}, \quad C \geq D$$

$$\operatorname{Im}\{Y_N(\sigma)\} \equiv 0$$

107

14.3

Ett reläservo ges av följande figur



Förstärkningen  $K$  uppfyller  $K > 0$ . Den beskrivande funktionen för reläet bifogas.

(a) Man använder återkopplingen  $L(s) = 1$ . Visa att man får en självsvängning för alla värden på  $K$ .

(b) För att förslutningen på systemet inte skall bli alltför stor vill man att amplituden hos svängningen i  $\theta$  skall vara mindre än 0.1. För vilka  $K$ -värden är detta uppfyllt?

(c) Man vill kunna använda större förstärkning  $K$  än vad som är möjligt enligt (b). Ange en återkopplingslänk  $L(s)$  med  $L(0) = 1$  som gör detta möjligt. (Inga detaljerade räkningar behövs i denna deluppgift. Ange bara länkens överföringsfunktion och en motivering till varför den bör kunna lösa problemet).

14.4

(KTH)

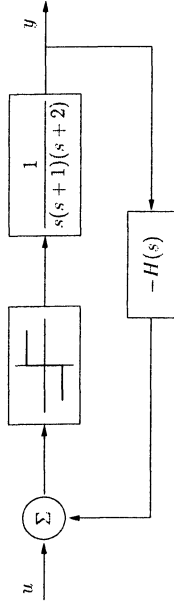
Om man vill ställa in en regulator automatiskt ("auto-tuning"), behöver man viss kunskap om processen. En metod för detta använder sig av ett relä experiment. Betrakta samma experiment som i uppgift 14.3 då  $K = 1$ . Ange lämpliga regulator inställningar för både PI och PID regulator med hjälp av Ziegler-Nichols inställningsregler som ges i tabellen nedan.

regulator	$K_c$	$T_i$	$T_d$
P	$0.5 K_u$	-	-
PI	$0.4 K_u$	$0.8 T_u$	-
PID	$0.6 K_u$	$0.5 T_u$	$0.12 T_u$

108

14.5

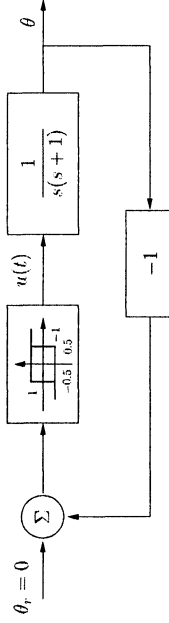
Betrakta det olinjära systemet



- (a) Om systemet regleras mha P-reglering, dvs  $H(s) = 1$ , uppkommer en stabil självsvängning. Bestäm amplitud och frekvens för denna.
- (b) För att eliminera självsvängningen används istället PD-återkoppling, dvs  $H(s) = 1 + Ks$ . Ange hur  $K$  skall väljas för att svängningen skall elimineras.

14.6

En servomotor styrs av ett relä med hysteres enligt figuren nedan.

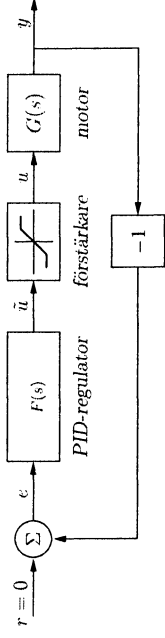


- (a) Ange amplitud och frekvens för eventuella självsvängningar i systemet. Ange också om eventuella svängningar är stabila eller inte.
- (b) Inför lämpliga tillståndsvariabler och skissera fasplanets utseende.

14.7

Betrakta nedanstående servosystem där man vill styra en likströmsmotor.

(KTH)



Processen och regulatorn beskrivs av

$$G(s) = \frac{1}{s(s+0.1)}, \quad F(s) = K_c \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right).$$

Regulatorns parametrar är följande:

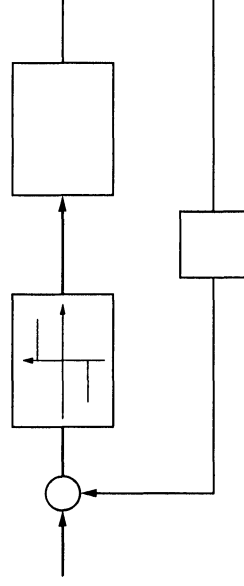
$$K_c = 1; \quad T_i \in [1, 15]; \quad T_d = 2.$$

Dessutom har man en begränsad styrsignal i förstärkaren.

- (a) Församma mätningen och undersök om det slutna systemet är asymptotiskt stabilt för alla värden på integraltiden  $T_i$ .
- (b) Ta nu hänsyn till mätningen. Som bekant kan statiska olinjäriteter ge upphov till svängningar i reglerkretsar. Kan det givna slutna systemet självsvänga? Om så är fallet, bestäm de värden på  $T_i$  för vilka detta inträffar.

14.8

Givet det olinjära systemet



(KTH)

där

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}.$$





- (b) Notera att  $F$  har ett egenvärde i origo som svarar mot integratorstillståndet. Antag att styrsignalen  $\tilde{u}(t)$  mätts och att den signal som ställdonet ställer ut ges av  $u(t)$ . Då finns det risk för vad som kallas upprivning av integratorstillståndet i regulatorn. Detta kan undvikas genom att modifiera regulatorn enligt

$$\frac{dx(t)}{dt} = Fx(t) + G_r r(t) - G_y y(t) + M [u(t) - v(t)]$$

$$\tilde{u}(t) = Hx(t) + D_r r(t) - D_y y(t)$$

Låt

$$M = \begin{pmatrix} 1/T_i \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hur ändras regulatorns poler med detta val av  $M$ ?

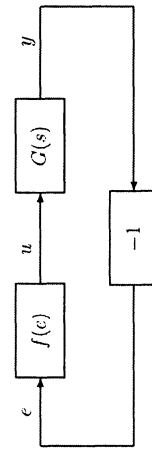
- (c) Beräkna överföringsfunktionen från  $U(s) - \tilde{U}(s)$  till  $\tilde{U}(s)$  då  $M$  är valt som i deluppgift (b).
- (d) I deluppgift (b) fann vi att endast en av regulatorns poler flyttades. Hur ska man välja  $M$  för att regulatorns poler ska ges av nollställena till det karakteristiska polynommet  $s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$ ?
- (e) Beräkna överföringsfunktionen från  $U(s) - \tilde{U}(s)$  till  $\tilde{U}(s)$  då  $M$  är valt som i deluppgift (d).

#### 14.11

(T) (UU)

Consider the control system depicted in the figure below, where the linear system has a transfer function  $G(s) = \frac{K}{s(s+1)}$ . The nonlinear block is static and given by

$$u(t) = \begin{cases} -1 & \text{if } e < -1 \\ e & \text{if } -1 \leq e \leq 1 \\ 1 & \text{if } 1 < e \end{cases}$$

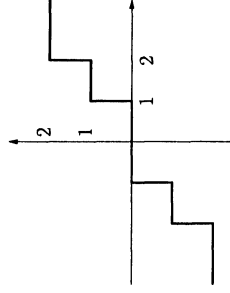


- a) What would the use of describing function technique indicate about stable oscillations in the system?
- b) Apply the circle criterion, and derive some sufficient condition for the system to be internally stable.

#### 14.12

(T) (KTH)

När man mäter signaler får man oftast kvantiseringsfel. Antag den förenklade modellen för kvantisering enligt nedstaende figur



Här kan man bara få fem mätvärden 0, ±1, ±2. Man avser att analysera ett återkopplat system med motsvarande kvantiserade utsignal mha beskrivande funktionsmetoden. Beräkna beskrivande funktionen i följande steg.

- (a) Ange beskrivande funktionen för ett relä med dödzon.
- (b) Visa att parallellkoppling av två olinjära länkar ( $J = f_1 + f_2$ ) ger en beskrivande funktion  $Y_f(C) = Y_{f1}(C) + Y_{f2}(C)$
- (c) Använd denna idé samt uppgift (a) för att bestämma beskrivande funktionen för den givna kvantiseraren.

#### 14.13

(T) (KTH)

En likströmsmotor beskrivs av överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

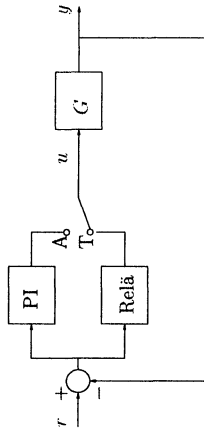
Motorn återkopplas med hjälp av en olinjär förstärkare

$$f(e) = K(e + e^3), \quad K > 0.$$

- Bestäm den beskrivande funktionen,  $Y_f(C)$ , för olinjäriteten  $f(e)$ .
- Skissa likströmsmotorns Nyquistkurva och  $-1/Y_f(C)$  i det komplexa talplanet, och ange krav för stabilitet vid val av förstärkningen  $K$ .
- Antag nu att likströmsmotorn innehåller ytterligare dynamik i form av en faktor i nämnaren hos dess överföringsfunktion. Utnyttja beskrivande funktionsmetoden för att diskutera om detta är farligt eller inte ur stabilitetssynpunkt.

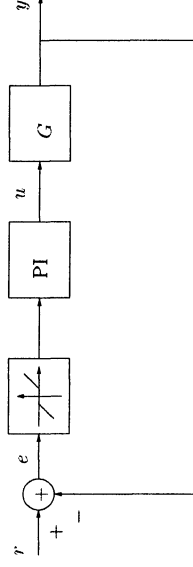
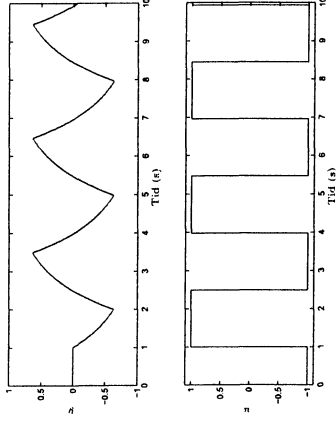
#### 14.14

(T) (KTH)



- I figuren nedan ses insignalen  $u(t)$  och utsignalen  $y(t)$  från ett reläexperiment enligt figuren ovan. Bestäm en PI-regulator med hjälp av data från reläexperimentet enligt Ziegler-Nichols frekvensvarsmetod.

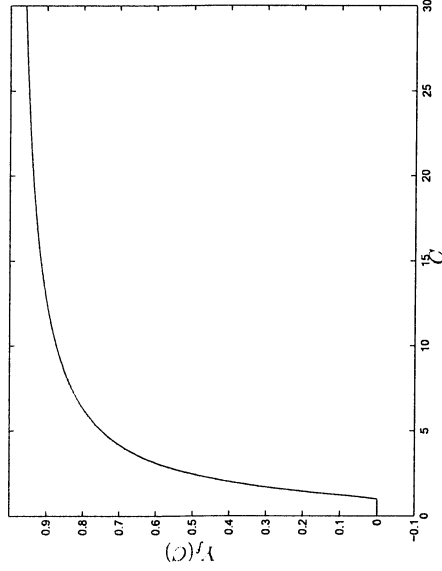
Regulator	$K$	$T_i$	$T_d$
P	$0.5K_u$		
PI	$0.4K_u$	$0.8T_u$	
PID	$0.6K_u$	$0.5T_u$	$0.125T_u$



- För att filtrera bort mätbrus kan en dödzon som i figuren ovan användas. Antag att

$$G(s) = \frac{b}{s + a}$$

där  $a$  och  $b$  är strikt positiva konstanter. Prediktera metoden med beskrivande funktion självsvängning för slutna systemet? *Leching*: Den beskrivande funktionen för dödzonen ses i figuren nedan.



## 16.2

A state-space realization of the system in Exercise 16.1 (observable canonical form) is

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} 1.7 & 1 \\ -0.7 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0.9 \\ -0.6 \end{pmatrix} \Delta u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

Compute the control law on the form

$$\Delta u(t) = -F_y(q)y(t) + F_r(q)r(t)$$

which is obtained by MPC for the criterion

$$J = \sum_{k=1}^3 (r(t+k) - \hat{y}(t+k))^2 + 0.1 \cdot (\Delta u(t+k-1))^2$$

and the state space model is used for the predictions. Verify that the results are the same as in Exercise 16.1 and Exercise 9.17.

## 16.3

Inom kemisk processindustri är det mycket vanligt att formulera MPC i termer av stegvarscoeffienter för det samplade systemet  $y(t) = G(q)u(t)$ .

- (a) Härled det optimeringsproblem som måste lösas för att beräkna styrsignalen. Vi antar för enkelhets skull att vi inte har några begränsningar på styrsignalen samt att kriteriet är kvadratisk i reglerfel och styrsignalkrement, dvs

$$J = \sum_{k=1}^N (r(t+k) - \hat{y}(t+k))^2 + Q \cdot (\Delta u(t+k-1))^2.$$

- (b) Vilka för- respektive nackdelar finns det med ovanstående angreppssätt?

## 16.4

(KTH, T 050830:2c)

A system with constraints on the input is to be controlled with an MPC controller. The model is

$$y_{k+1} = -y_k + 2u_k$$

The MPC optimization problem is formulated as

$$\min_u \left[ \sum_{i=k}^{k+N_p} y_i^2 + \sum_{i=k}^{k+N_p-1} u_i^2 \right]$$

## 15 Regulatorsyntes för olinjära system

### 16 Prediktionsreglering: MPC, GPC och DMM

#### 16.1

Consider the discrete-time system

$$y(t) - 1.7y(t-1) + 0.7y(t-2) = 0.9\Delta u(t-1) - 0.6\Delta u(t-2)$$

where  $\Delta u(t) = u(t) - u(t-1)$ . Determine the control law of type

$$\Delta u(t) = -F_y(q)y(t) + F_r(q)r(t)$$

obtained by MPC for the criterion

$$J = \sum_{k=1}^3 (r(t+k) - \hat{y}(t+k))^2 + 0.1 \cdot (\Delta u(t+k-1))^2$$

and the input-output model is used to predict. Compare your result with exercise 9.17.

subject to the constraint

$$-1 < u < 1$$

For the horizon  $N_P = 1$ , translate the MPC problem into a Quadratic Programming (QP) problem

$$\min_u u^T H u + h^T u; \quad \text{subject to } L u \leq b$$

to be solved at each sample. That is, determine  $H$ ,  $h$ ,  $L$  and  $b$ .

*Note: the output  $y_k$  at the current sampling time is assumed given, while the input  $u_k$  is to be computed.*

## 17 Att exakt kompensera bort olinjäriteter

### 17.1

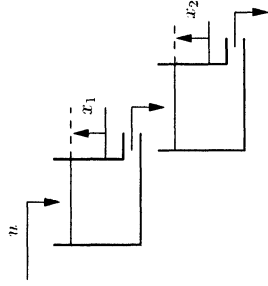
Ange för systemet

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

en exakt linjäriserande återkoppling.

### 17.2

Betrakta systemet med två vattentankar:



119

Dynamiken ges av

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 1 + u - \sqrt{1+x_1} \\ \dot{x}_2 &= \sqrt{1+x_1} - \sqrt{1+x_2} \end{aligned}$$

Vilket tillstånd skall väljas som utsignal för att man skall få starkt relativt gradtal 2? Ange en exakt linjäriserande återkoppling.

### 17.3

(T)

Ange en återkoppling för systemet

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 7x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + \cos x_1 + u$$

som åstadkommer "exakt linjärisering".

### 17.4

(T)

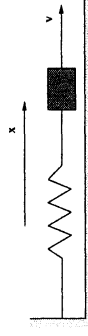
Ange en utsignalåterkoppling för systemet

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 + 8x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= -x_3 + x_1^4 - x_1^2 + u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

som åstadkommer "exakt linjärisering".

### 17.5

En kropp med massa  $m$  är festsatt i en fjäder:



Kraften  $F$  genereras av kommanderad kraft  $u$  (styrsignalen) genom ett ställdon så att

$$F = \frac{1}{s+1} u$$

120

Kroppens läge är  $y$ . Fjäders har en olinjär karaktärstik och en olinjär viskös dämpning. Detta betyder att kraften från fjädern är

$$-k(y) - d(\dot{y}).$$

- (a) Ställ upp detta system på tillståndsform med  $u$  som insignal och  $y$  som utsignal.
- (b) Kan systemet i (a) transformeras till ett linjärt system med exakt linjärisering i tillståndsrummet? Ange i så fall en sådan transformation.

## 18 Optimal styrning

### 18.1

En strömstyrd likströmsmotor med vinkeläge  $\theta$ , vinkelhastighet  $\omega$  och styrsignal  $u$  (strömmen) beskrivs av

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = u \end{cases}$$

Antag att man bara behöver positionera med en noggrannhet som ges av parametern  $\varepsilon$ , så att villkoret på sluttilståndet är

$$\omega(t_f) = 0, \quad |\theta(t_f)| \leq \varepsilon$$

Angi en styrlag som når detta sluttilstånd på minimal tid om strömmen är begränsad:

$$-2 \leq u \leq 1$$

### 18.2

Betrakta en likströmsmotor med insignal  $u$  och utsignal  $y$  och överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

Inför tillstånden  $x_1 = y$ ,  $x_2 = \dot{y}$  och beräkna en styrlag som för tillstånden från ett godtyckligt utgångsläge till origo på kortast möjliga tid om styrsignalen är begränsad:

$$|u| \leq 1$$

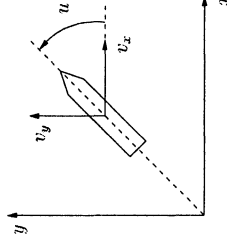
### 18.3

Lös motsvarande problem för fallet

$$G(s) = \frac{1}{s(s-1)}$$

### 18.4

Om man försömmar luftmotståndet och jordytans krökning så kan satellituppskjutning beskrivas med följande ekvationer



$$\begin{cases} \dot{x} = v_x \\ \dot{y} = v_y \\ \dot{v}_x = \frac{F}{m} \cos u \\ \dot{v}_y = \frac{F}{m} \sin u - g \end{cases}$$

Här är  $x$  den horisontella och  $y$  den vertikala lägeskoordinaten,  $v_x$  horisontell och  $v_y$  vertikal hastighet,  $F$  dragkraften,  $m$  massan och  $g$  tyngdkraftsaccelerationen. Styrsignalen  $u$  är vinkeln mot horisontalplanet.  $F$  och  $m$  antas konstanta. Kriteriet kan t ex vara att maximera höjd eller hastighet i sluttidpunkten under bivillkor på de övriga variablerna. Visa att en extremal då har en styrsignal av formen  $\tan u = \frac{At+B}{Ct+D}$  där  $A, B, C, D$  är konstanter. Diskutera hur  $A, B, C$ , och  $D$  kan beräknas.

### 18.5

Antag att (mer realistiskt)  $m$  och  $F$  inte är konstanta i satellituppskjutningsexemplet i uppgift 18.4. Lat  $F$  vara en styrsignal med begränsningarna

$$0 \leq F \leq F_{max}$$

och anta massan varierar enligt

$$\dot{m} = -\gamma F$$

(bränsleförbrukning proportionell mot dragkraften)

Diskutera hur styrsignalerna för en extremal ser ut kvalitativt.

### 18.6

Betrakta det skalära systemet

$$\dot{x} = +x + u$$

Bestäm den styrslag som minimerar kriterierna

(a) 
$$\int_0^{\infty} (x^2 + u^2) dt$$

(b) 
$$\int_0^{\infty} (x^4 + u^2) dt$$

(c) 
$$\int_0^{\infty} (x^2 + x^4 + u^2) dt$$

Diskutera kvalitativa skillnader mellan fallen.

### 18.7

Betrakta åter systemet

$$\dot{x} = x + u.$$

Bestäm den styrslag som minimerar kriteriet

$$\int_0^1 (x^2 + u^2) dt$$

under bivillkoret

$$x(1) = 0.$$

### 18.8

Man vill styra systemet

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2^2 + (1 + x_1)u \end{cases}$$

med starttillstånd  $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1$  så att kriteriet

$$\int_0^1 e^{x_1^2} + x_2^2 + u^2 dt$$

minimeras. Visa att normala extremaler till problemet uppfyller ekvationer av formen

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) \\ \dot{\lambda}_1 &= f_3(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) \\ \dot{\lambda}_2 &= f_4(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) \end{aligned}$$

Vad blir  $f_1, f_2, f_3, f_4$ ? Vilka villkor måste  $\lambda_1$  och  $\lambda_2$  uppfylla vid sluttidpunkten?

### 18.9

Betrakta problemet att styra dubbelintegratorn

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u, \quad |u| \leq 1 \end{cases}$$

från ett godtyckligt begynnelsevärde till origo så att kriteriet

$$\int_0^{t_f} (1 + |u|) dt$$

minimeras. ( $t_f$  är den tidpunkt då  $x(t_f) = 0$ ). Visa att en extremal är av formen

$$u(t) = \begin{cases} -1 & 0 \leq t \leq t_1 \\ 0 & t_1 \leq t \leq t_2 \\ 1 & t_2 \leq t \leq t_f \end{cases}$$

eller

$$u(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq t_1 \\ 0 & t_1 \leq t \leq t_2 \\ -1 & t_2 \leq t \leq t_f \end{cases}$$

för några  $t_1, t_2$  med  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_f$ . Något tidsintervall kan alltså ha längden 0. Antag att problemet är normalt.

**18.10**

Vi vill styra systemet

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

från tillståndet  $x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  till  $x(t_f) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  på så kort tid som möjligt ( $\min_{t_f}$ ) under bivillkoret att

$$|u(t)| \leq 3.$$

Visa att den optimala styrslagen är antingen

$$u(t) = \begin{cases} -3 & 0 \leq t \leq t_1 \\ +3 & t_1 \leq t \leq t_f \end{cases}$$

eller

$$u(t) = \begin{cases} +3 & 0 \leq t \leq t_1 \\ -3 & t_1 \leq t \leq t_f \end{cases}$$

för något värde på  $t_1$ .

**18.11**

Betrakta systemet

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases} \quad |u| \leq 1$$

med kriteriet

$$\min \int_0^{t_f} \frac{1}{2} e^{-\lambda t} dt, \quad x(0) = x_0, \quad x(t_f) = 0$$

Sluttiden för  $t_f$  är fix.

Skriv ner de ekvationer som svarar mot maximumprincipen. Visa att de ger bang-bang styrning om ett visst villkor på multiplikationerna  $\lambda$  är uppfyllt. Det finns ett begynnelsestillstånd  $x(0)$  som uppenbart inte leder till bang-bang styrning. Vilket är detta?

**18.12**

Ett föremål som rör sig med hastigheten  $v$  i ett visköst medium accelereras av en jetmotor med dragkraften  $u$  (styrsignal). Rörelseekvationen är

$$\dot{v} = u - v, \quad v(0) = 0; \quad 0 \leq u \leq 1.$$

Jetmotorn konsumerar bränsle enligt ekvationen

$$\dot{m} = -u, \quad m(0) = 1.$$

där  $m$  är mängden bränsle i tanken.

Man vill maximera hastigheten vid  $t = 2$ , då man förutsätter att allt bränsle är konsumerat:

$$m(2) = 0.$$

Visa att en bang-bang-styrning med ett omslag satisficerar maximumprincipen. När bör omslaget ske och i vilken riktning (0 till 1 eller 1 till 0)?

**18.13**

Antag att man med en styrsignal  $u$  kan styra en vagns acceleration. En tillståndsmodell för vagnen ges då av

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases},$$

där  $x_1$  betecknar vagnens läge och  $x_2$  betecknar vagnens hastighet. Styrsignalen är begränsad så att  $|u| \leq 1$ . Betrakta problemet att från godtycklig initial position och hastighet styra vagnen till stillastående med lägeskoordinat 0 så att kriteriet

$$\int_0^{t_f} (1 + 2|u|) dt$$

minimeras ( $t_f$  är den tidpunkt då  $x(t_f) = 0$ ).

Antag normala extremaler.

(a) Visa att en extremal är av formen

$$u(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leq t \leq t_1 \\ 0, & t_1 \leq t \leq t_2 \\ 1, & t_2 \leq t \leq t_f \end{cases}$$

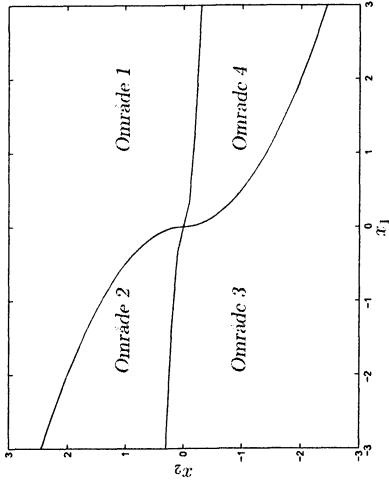
eller

$$u(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq t_1 \\ 0, & t_1 \leq t \leq t_2 \\ -1, & t_2 \leq t \leq t_f \end{cases}$$

för några  $t_1, t_2$  med  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_f$ .

(b) Om man löser problemet som en tillståndsaterkoppling erhålles en partition av tillståndsrummet enligt nedan





Inom varje område skall en av styrsignalerna  $-1$ ,  $0$  eller  $1$  användas. Ange vilken styrsignal som tillhör vilket område i figuren ovan.

### 18.14

Man vill styra en trippelintegrator

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= u, \quad |u| \leq 1 \end{aligned}$$

från ett godtyckligt begynnelsevärde  $x(0)$  till ett slutvärde  $x(T) = 0$ , så att tiden  $T$  minimeras. Antag normala extremer. Visa att den optimala styrsignalen har formen

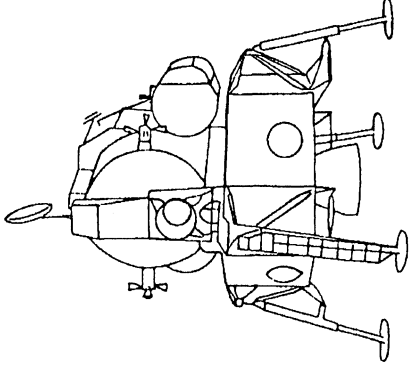
$$u(t) = \text{sign } p(t)$$

där  $p(t)$  är ett polynom. Ange gradtalet på polynomet och diskutera hur många gånger  $u$  kan byta tecken. (Det är inte nödvändigt att beräkna värdena på koefficienterna i  $p(t)$ ).

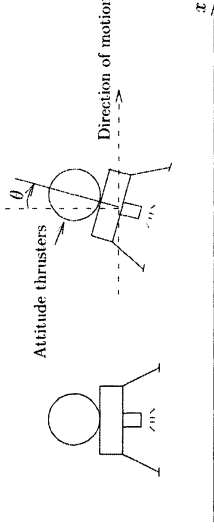
## 19 Observatörer och tillståndsmetodik

### 19.1

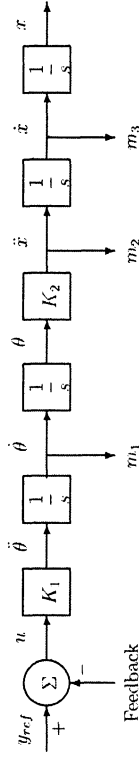
The picture below shows the Lunar Excursion Module from the Apollo project.



Consider the module hovering a short distance above the surface of the moon using its main engine. If the pitch angle of the module (angle between the vertical line and the direction of movement) differs from zero, a horizontal component of the force is obtained and the module is accelerating along the surface.



We will at this point study a block diagram which shows the connection between the input  $u$  (the control signal to the attitude thrusters), the pitch angle  $\theta$  and the position coordinate  $x$ .



The module is both in the  $\theta$ -direction and in the  $x$ -direction obeying Newton's law of motion without any kind of damping. The transfer function from the control

signal of the astronaut ( $y_{ref}$ ) to velocity  $\dot{x}$  is

$$\frac{K_1 K_2}{s^3}$$

which is impossible to control by hand.

- a) In order to make the control duty of the astronaut easier we change the dynamics of the module by making internal feedback. The following signals are available:
- $m_1$  = the attitude angular velocity measured using rate gyro.
  - $m_2$  = the acceleration in  $x$ -direction measured using accelerometers positioned on gyro-stabilized platforms.
  - $m_3$  = the velocity in  $x$ -direction measured using doppler-radar.
- Calculate a state-feedback using these signals such that the closed-loop system obtains its poles in  $s = -\frac{1}{2}$  and the control signal of the astronaut becomes the reference signal of the velocity in  $x$ -direction. How does this affect the step response?

- b) Suppose we by safety reasons are interested in the possibility of controlling the module even if the sensors measuring  $m_1$  and  $m_2$  not are working. Design a controller that can handle this and has approximately the same behaviour as in a).

## 19.2

A DC motor with an external load is described by

$$\begin{aligned} \omega &= \dot{\theta} \\ \dot{\omega} &= -\frac{1}{T}\omega + c_1 u + c_2 T \end{aligned}$$

where  $\theta$  is the angle,  $\omega$  the angle velocity,  $u$  the control signal and  $T$  the torque of the load.

- a) Introduce a controller
- $$u = \ell_0 \theta_{ref} - \ell_1 \dot{\theta} - \ell_2 \omega$$
- such that the poles of the closed-loop system becomes  $\frac{1}{T}(-1 \pm i)$  and  $\theta = \theta_{ref}$  in steady-state if  $T = 0$  and  $\theta_{ref} = \text{constant}$ .
- b) Modify the controller such that  $\theta = \theta_{ref}$  in steady-state even if  $T = \text{constant} \neq 0$  and  $\theta_{ref}$  is constant. The dynamical properties should be the same.

## 19.3

Consider the system

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y &= (1 \ 1) x \end{aligned}$$

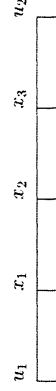
The behavior of the system is not the desired, we want to have the poles in  $-3$  and  $-4$ .

- a) Design a controller, using feedback from all states, which gives the system the wanted behavior.
- b) If only the output is measurable, can we reconstruct the states such that the error between the reconstructed state and the real state decreases as  $p(t)e^{-t}$ , where  $p(t)$  is a polynomial in  $t$ ?
- c) Is it possible to reconstruct the state with an error decreasing as  $p(t)e^{-2t}$ , where  $p(t)$  is a polynomial in  $t$ .

Give a comment to the results.

## 19.4

We want to control the temperature in a long copper rod by heating or cooling its endpoints. Principally, this problem is described by a partial differential equation. To simplify the problem we assume that the temperature profile in the rod can be approximated by the temperatures  $x_1, x_2$  and  $x_3$  at three points. The temperatures in the end points are the inputs,  $u_1$  and  $u_2$ . All temperatures are relative to the temperature of the surroundings.



We get the following equations

$$\dot{x}_1 = \alpha(u_1 - x_1) + \alpha(x_2 - x_1) \tag{19.1}$$

$$\dot{x}_2 = \alpha(x_1 - x_2) + \alpha(x_3 - x_2) \tag{19.2}$$

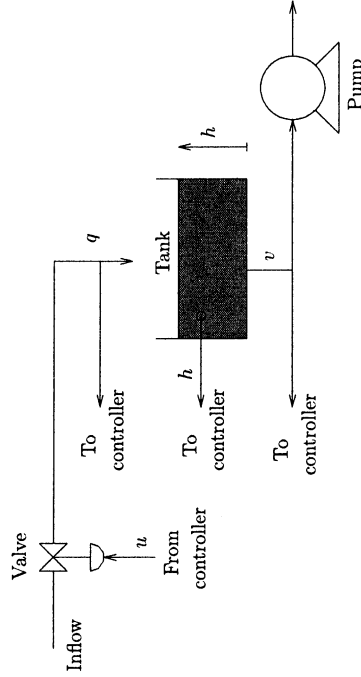
$$\dot{x}_3 = \alpha(x_2 - x_3) + \alpha(u_2 - x_3) \tag{19.3}$$

where  $\alpha$  is a constant that depends on the coefficient of thermal conductivity and the specific heat of the rod. For simplicity, let  $\alpha = 1$ . Consider the problem of controlling the temperature in  $x_1, x_2$  and  $x_3$  with  $u_1$  only, assuming  $u_2 = 0$ .

- Assume that we want to have an arbitrary temperature profile, i.e. arbitrary values of  $x_1$ ,  $x_2$  and  $x_3$ . Is this possible? Why/why not?
- Assume that all the temperatures  $x_1$ ,  $x_2$  and  $x_3$  are measurable. Find a state feedback so that the error after a step disturbance decrease as  $e^{-3t}$ .
- Assume that only one of the temperatures  $x_1$ ,  $x_2$  or  $x_3$  is measurable, and that we still want a controller which damps a disturbance as  $e^{-3t}$  by using an observer. The sensor can be placed so that any of the three values  $x_1$ ,  $x_2$  or  $x_3$  is measured. Which choices of measure point make it possible to control the system as desired? Give a motivation. Choose one of the points making the wanted design possible and design a controller, i.e. an observer and a state feedback, giving the desired error damping.

### 19.5

In the figure below a level control system for a tank is shown. The objective is to keep the level at a desired value.



Let  $u$ ,  $h$ ,  $q$  and  $v$  denote small variations around the desired working point. The inflow  $q$  to the tank is determined by the valve  $u$ , calculated by the controller. The outflow  $v$  is determined by the pump and deviations from zero is considered as process noise. The valve does not have an immediate response, which is modeled with the transfer function

$$Q(s) = \frac{K_1}{1 + T_s} U(s)$$

from  $u$  to  $q$ , where  $K_1 = 1$  and  $T = 0.5$ . The level is given by

$$A\dot{h} = q - v,$$

where the tank cross-section area is  $A = 1\text{m}^2$ .

- Let  $q$  and  $h$  be state variables and give a corresponding state space model of the process. Compute a state feedback  $u = -l_1q - l_2h + r$ , such that the closed loop system poles both are  $-2$ .
- How large is the steady-state level error for a constant disturbance  $v = 0.1$  if  $r = 0$ ?
- Consider the closed loop system in a) and compute a feedforward control law from  $v$  to  $r$  such that the influence from  $v$  is completely eliminated. Exclude all terms in the control law in which  $v$  is differentiated to make it implementable. How does this modified feed forward control law work? Steady-state level error?
- Suppose that  $K_1$  differs slightly from 1, but that the same control law as in c) is used (the control law derived under the assumption  $K_1 = 1$ ). What happens with the steady-state level error?
- Propose a modified control law such that the stationary level error is zero for constant disturbances regardless of small deviations from the nominal value of  $K_1$ .

### 19.6

Let

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = (1 \ 0) x(t)$$

- Construct an observer for the system above with the eigenvalues of the observer in  $-10$ .
- Suppose that  $u(t) = 0$ , and let  $\hat{y}(t) = (1 \ 0) \hat{x}(t)$ , where  $\hat{x}(t)$  is the state of the observer constructed in a). Compute the transfer function from  $y(t)$  to  $\hat{y}(t)$ . Note that  $\hat{y}(t)$  can be regarded as an input to the observer.

### 19.7

Consider a very simple model of a bioreactor shown in Figure 3. The reactor is completely mixed, and the influent flow rate is equal to the effluent (output) flow rate  $Q$  [volume/time]. The influent biomass concentration is assumed to be zero.

A model for the biomass growth is given by (see the course in Wastewater treatment)

$$\frac{dX}{dt} = (\mu - D)X \tag{19.4}$$

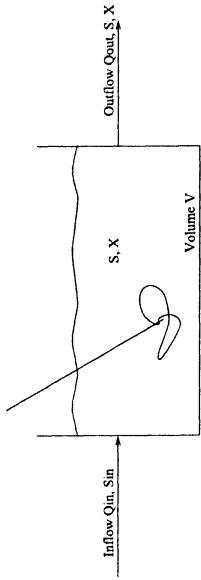


Figure 3: A completely mixed bioreactor.

where  $\mu$  is the specific growth rate and  $D = Q/V$  is the dilution rate. The substrate consumption model is

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\mu}{Y}X + D(S_{in} - S) \quad (19.5)$$

where  $Y$  is the yield.

- Assume that the specific growth rate  $\mu$  is a constant. Derive a state space model for the system given by (19.4), (19.5), using  $S_{in}$  as input. Assume that the substrate concentration  $S$  is the measured output.
- Examine if the system is controllable and observable.
- Calculate the transfer function  $G(s)$ , and examine whether or not there are common poles and zeros.
- Assume next that the specific growth rate  $\mu$  depends on the substrate concentration  $S$  as

$$\mu(S) = \mu_o \frac{S}{S + K}$$

where  $\mu_o$  and  $K$  are constants. Let  $\bar{S}_{in}$  be a constant input, and find an equilibrium point, where the steady state values  $\bar{X}$  and  $\bar{S}$  both are nonzero. Find the linearized state space model around this equilibrium.

- Examine if the linearized system in part d) is controllable and observable.

### 19.8

- Consider the microbial growth process



which is modelled as

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} S \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 \\ 1 \end{pmatrix} \varphi(S, X) - D \begin{pmatrix} S \\ X \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} DS_{in} \\ 0 \end{pmatrix}$$

and in linearized form as

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} x &= \begin{pmatrix} S \\ X \end{pmatrix} & A &= \begin{pmatrix} -k_1 \\ 1 \end{pmatrix} (\varphi_S \ \varphi_X) - DI \\ B &= \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} & C &= (1 \ 0) \\ \varphi_X &= \frac{\partial \varphi}{\partial X} & \varphi_S &= \frac{\partial \varphi}{\partial S} \end{aligned}$$

Examine if the linearized system is observable.

- Consider the related growth model with an additional product



which is modelled as

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} S \\ X \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 \\ 1 \\ k_2 \end{pmatrix} \varphi(S, X, P) - D \begin{pmatrix} S \\ X \\ P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} DS_{in} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

and in linearized form as

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} x &= \begin{pmatrix} S \\ X \\ P \end{pmatrix} & A &= \begin{pmatrix} -k_1 \\ 1 \\ k_2 \end{pmatrix} (\varphi_S \ \varphi_X \ \varphi_P) - DI \\ B &= \begin{pmatrix} D \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & C &= (1 \ 0 \ 0) \\ \varphi_X &= \frac{\partial \varphi}{\partial X} & \varphi_S &= \frac{\partial \varphi}{\partial S} & \varphi_P &= \frac{\partial \varphi}{\partial P} \end{aligned}$$

Examine if the linearized system is observable. Would it be observable if  $X$  or  $P$  is measured instead of  $S$ ?

Del II

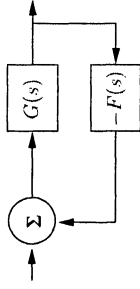
## LÖSNINGAR

# 1 Inledning

## 1.1

“Lågförstärkningsatsen” (för linjära problem)

Antag att  $G(s)$  och  $F(s)$  båda är stabila överföringsfunktioner. återkopplade enligt figuren nedan.



Det slutna systemet är då asymptotiskt stabilt om

$$|G(i\omega)| \cdot |F(i\omega)| < 1, \quad \forall \omega.$$

(Mer restriktiv variant på tillräckligt villkor är:  
 $\sup_{\omega} |G(i\omega)| \cdot \sup_{\omega} |F(i\omega)| < 1$  ( $\Rightarrow \|G\| \cdot \|F\| < 1$ )  
 ty  $|G(i\omega)| \cdot |F(i\omega)| \leq \|G\| \cdot \|F\|$ )

Bevis: Det slutna systemet ges av  $G_c(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)F(s)}$  och är enligt Nyquistkriteriet stabilt om Nyquistkurvan för  $G(i\omega)F(i\omega)$  ej omcirklar punkten  $-1$ . (Vi utnyttjar då att både  $G$  och  $F$  är stabila.)

Alltså: Om vi kräver att

$$|G(i\omega)F(i\omega)| \leq |G(i\omega)| \cdot |F(i\omega)| < 1.$$

så ser vi att Nyquistkriteriet är uppfyllt, och därmed är vi klara.

(Notera att asymptotisk stabilitet  $\Rightarrow$  insignal-utsignalstabilitet, där det senare begreppet används i den generella “Lågförstärkningsatsen”.)

## 1.2

Vi har  $y(t) = f(u(t))$  där  $f(\cdot)$  är det ideala reläet.

Förstärkning:

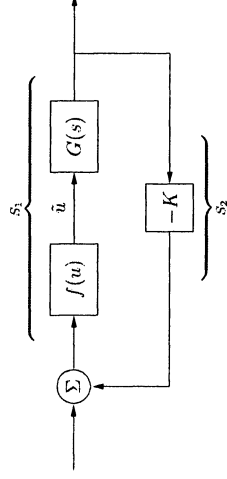
$$\|f\| = \sup_u \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2}$$

Vi har att  $|f(u)| \equiv 1, \quad \forall u(t) \neq 0$ . Detta ger:

$$\|y\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} y^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T [f(u(t))]^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} 2T = \infty$$

för alla val av  $u(t) \neq 0$  sådana att  $0 < \|u\|_2 < \infty$ . (Tag t ex  $u(t) = \frac{1}{t}$ )  
 Alltså: Ett idealt relä har *oändlig* förstärkning.

## 1.3



According to the small gain theorem the above system is stable if  $\|S_1\| \cdot \|S_2\| < 1$ .

We have:  $\begin{cases} \|S_1\| \leq \|f(u)\| \cdot \|G\| \\ \|S_2\| = K \end{cases}$

where

$$\|G\| = \sup_{\omega} |G(i\omega)| = \sup_{\omega} \frac{2}{\sqrt{(2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2}} = 1 \quad (\text{for } \omega = 0)$$

$$\begin{aligned} \|f(u)\|^2 &= \frac{\|y\|_2^2}{\|u\|_2^2} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (f(u(t)))^2 dt}{\|u\|_2^2} \leq \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)| dt \right] \\ &\leq \frac{\frac{1}{4} \|u\|_2^2}{\|u\|_2^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \|f(u)\| \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\|S_1\| \cdot \|S_2\| \leq \frac{1}{2} \cdot K < 1$$

i.e., we have to chose  $K < 2$  to guarantee stability (input – output)

1.4

- (a)  $\|y\|_\infty = |a|, \quad \|y\|_2 = \infty$
- (b)  $\|y\|_\infty = 1, \quad \|y\|_2 = 1$
- (c)  $\|y\|_\infty = \frac{1}{4}, \quad \|y\|_2 = \frac{1}{\sqrt{12}}$

1.5

$$\|G\| = 1, \quad \zeta > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\|G\| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad 0 < \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

1.6

- I.  $a > 0 \Rightarrow$  Linear system stable, small gain theorem  $\Rightarrow$  Stable if  $|K| < 1$ .  
Linear theory  $\Rightarrow$  Stable if  $K < 1$ .
- II.  $a < 0 \Rightarrow$  Linear system unstable  $\Rightarrow$  We can not use the small gain theorem.  
Linear theory  $\Rightarrow$  Stable if:  
 $a(1-K) > 0$  (the pole comes from  $s + a(1-K) = 0$ )

$$\text{If } a > 0: \quad 1 - K > 0 \Rightarrow K < 1$$

$$\text{If } a < 0: \quad 1 - K < 0 \Rightarrow K > 1$$

1.7

Förstärkningen för  $f$  är 0.5 och för  $G$  är den 1.5  
 $0.5 \cdot 1.5 < 1$

alltså är det slutna systemet stabilt enligt lögförstärkningssatsen.

1.8

(a) Med P-återkopplingen  $u(t) = K(r(t) - y(t)) = K\tau(t) - Kx_1(t)$  fås

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -aKx_1(t) - ax_2(t) + aK\tau(t)$$

Karakteristiska ekvationen ges av

$$s^2 + as + aK = s^2 + (1 + \rho)s + (1 + \rho)K = 0$$

Det slutna systemet är stabilt om  $(1 + \rho) > 0$  och  $(1 + \rho)K > 0$ . T.ex. gäller att slutna systemet är stabilt för all  $K > 0$  om  $\delta < 1$ .

(b) Notera att

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -a(Kx_1(t) + x_2(t)) + aK\tau(t)$$

$$= -Kx_1(t) - x_2(t) - \rho(t)(Kx_1(t) + x_2(t)) + aK\tau(t)$$

Därför gäller att

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ aK \end{bmatrix} r(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} K & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

med  $w(t) = \rho(t)z(t)$  beskriver slutna systemet. Enligt Exempel 1.6 i läroboken gäller att  $\|\rho\| = \delta$ . Enligt lögförstärkningssatsen gäller då att

$$\|G_{wz}\|_\infty \cdot \|\rho\| < 1 \Leftrightarrow \|G_{wz}\|_\infty^2 < 1/\delta^2$$

är ett tillräckligt villkor för att garantera stabilitet, där  $G_{wz}$  är överföringsfunktionen från  $w$  till  $z$ . Denna ges av

$$G_{wz}(s) = \frac{s + K}{s^2 + s + K}$$

och följaktligen gäller att

$$|G_{wz}(i\omega)|^2 = \frac{\omega^2 + K^2}{(K - \omega^2)^2 + \omega^2}$$

Det gäller vidare att

$$\sup_{z \geq 0} \frac{x + K^2}{(K - x)^2 + x} = \frac{\sqrt{K^4 + 2K^3}}{2K^4 + 4K^3 - (2K + 2K^2 - 1)\sqrt{K^4 + 2K^3}}$$

för  $x = -K^2 + \sqrt{K^4 + 2K^3}$ . Detta ger följande tillräckliga stabilitetsvillkor

$$\frac{\sqrt{K^4 + 2K^3}}{2K^4 + 4K^3 - (2K + 2K^2 - 1)\sqrt{K^4 + 2K^3}} < 1/\delta^2$$

## 2 Representation av linjära system

### 2.1

$$\begin{cases} x_1(t+1) = Fx_1(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx_1(t) \end{cases}$$

$$y(1) = Hx_1(1)$$

$$y(2) = Hx_1(2) = HFx_1(1) + HG u(1)$$

$$x_1(3) = Fx_1(2) + Gu(2) = F^2x_1(1) + FG u(1) + Gu(2)$$

Sätt in värdena på matriserna

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} = x_2(1)$$

$$\begin{aligned} y(2) &= 1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 1 = \\ &= x_1(1) + x_2(1) \Rightarrow x_1(1) = 1 \\ x(3) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 1 + \\ &+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (-1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### 2.2

$$x(t+1) = Fx_1(t) + (G_1 \ G_2) \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

$$x_1(t+1) = Fx_1(t) + G_1u_1(t)$$

$$x_2(t+1) = Fx_2(t) + G_2u_2(t)$$

Om de två ekvationerna summeras fås

$$x_1(t+1) + x_2(t+1) = F(x_1(t) + x_2(t)) + (G_1 \ G_2) \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

vilket ger

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$y(t) = Hx(t) = H(x_1(t) + x_2(t))$$

Sätt

$$y_1(t) = Hx_1(t) \text{ och } y_2(t) = Hx_2(t)$$

$$\Rightarrow y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

divs. utsignalen från systemet är summan av utsignalerna från systemen med tillstånd  $x_1$  och  $x_2$  och med insignalerna  $u_1$  resp  $u_2$ .

$$x_1(t+1) = Fx_1(t) + G_1u_1(t)$$

och

$$y_1(t) = Hx_1(t)$$

ger eftersom tillståndsrealisationen är på observerbar kanonisk form insignal-utsignalsambandet

$$A(q)y_1(t) = B(q)u_1(t)$$

och på samma sätt fas

$$A(q)y_2(t) = C(q)u_2(t)$$

$$y = y_1 + y_2$$

ger

$$A(q)y(t) = B(q)u_1(t) + C(q)u_2(t)$$

### 2.3

$$\begin{pmatrix} \Delta\omega \\ \Delta e \end{pmatrix} = \frac{1}{s+2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & s+1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta M \\ \Delta Im \\ \Delta R \end{pmatrix}$$

### 2.4

(a)

$$y = \alpha h_2, \quad f = \beta(h_1 - h_2)$$

$$h_1 = \frac{1}{A_1}(u_1 - f), \quad h_2 = \frac{1}{A_2}(u_2 + f - y)$$

$$h = \begin{pmatrix} -\frac{1}{A_1}\beta & \frac{1}{A_1}\beta \\ \frac{1}{A_2}\beta & -\frac{1}{A_2}(\beta + \alpha) \end{pmatrix} h + \begin{pmatrix} \frac{1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2} \end{pmatrix} u$$

$$y = (0 \ \alpha) h$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + (2\beta + \alpha)s + \alpha\beta} \begin{pmatrix} \alpha\beta & 0 \\ \alpha(s + \beta) \end{pmatrix}$$



(b)

$$C(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\sigma}(C(0)) = \max_i \sqrt{\lambda_i(C^*(0)C(0))} = \sqrt{2}$$

(c) dim  $u=2$ , dim  $y=1$ . Förstärkningen i överföringen från  $u_1$  till  $y$ , respektive från  $u_2$  till  $y$  är 1.

## 2.5

Write the system with common denominator

$$Y(s) = \frac{(s^2 + s + 1)}{(s + 1)(s + 2)(s^2 + s + 1)} U_1(s) + \frac{(s + 2)(s + 3)}{(s + 1)(s + 2)(s^2 + s + 1)} U_2(s)$$

$$= \frac{(s^2 + s + 1)}{(s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 5s + 2)} U_1(s) + \frac{(s^2 + 5s + 6)}{(s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 5s + 2)} U_2(s)$$

The system can now be described using for example observable canonical form

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = (1 \ 0 \ 0 \ 0) x(t)$$

## 2.6

Gemensam nämnare

$$y(t) = \frac{1}{p^3 + 7p^2 + 16p + 12} (p^2 + 3p - 2) \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

Observerbar kanonisk form ger

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 0 \\ -16 & 0 & 1 \\ -12 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

$$y(t) = (1 \ 0 \ 0) x(t)$$

## 2.7

Laplace transform gives

$$Y(s) = \frac{(b_{11}s + b_{12})}{(s^2 + a_1s + a_2)} U_1(s) + \frac{(b_{21}s + b_{22})}{(s^2 + a_1s + a_2)} U_2(s)$$

The system can from this be written on observable canonical form as

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_2 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = (1 \ 0) x(t)$$

## 2.8

Laplaceformeringer ger

$$A(s)Y(s) = B(s)U(s)$$

där

$$A(s) = \begin{pmatrix} s & 1 \\ 1 & (s+1) \end{pmatrix} \quad B(s) = \begin{pmatrix} s+2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Multiplikation med  $A^{-1}(s)$  ger nu

$$Y(s) = A^{-1}(s)B(s)U(s)$$

d v s

$$Y(s) = \begin{pmatrix} \frac{s^2 - 3s + 1}{s^2 + s - 1} \\ \frac{s^2 + 2}{s^2 + s - 1} \end{pmatrix} U(s) = \begin{pmatrix} \frac{s^2 + 2}{s^2 + s - 1} + 1 \\ \frac{s^2 + 2}{s^2 + s - 1} \end{pmatrix} U(s)$$

Systemet kan nu skrivas på styrbar kanonisk form

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

## 2.9

(a) Till exempel

$$\frac{d}{dt} x(t) = \frac{1}{RC} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \frac{1}{RC} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = (-1 \ -1) x(t) + u(t)$$

(b)

$$G(s) = \frac{(1 + RCs)^2}{1 + 3RCs + R^2C^2s^2}$$

vilket är ett minfasset system.

## 2.10

(a) Om vi antar  $h_1 > h_2$  ger massbalans över tankarna

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(Ah_1) &= q_1 - a\sqrt{2g\bar{h}_1} - b\sqrt{2g(h_1 - h_2)} \\ \frac{d}{dt}(Ah_2) &= q_2 - a\sqrt{2g\bar{h}_2} + b\sqrt{2g(h_1 - h_2)}\end{aligned}$$

(b) De stationära flödena ges av

$$\begin{aligned}\bar{q}_1 &= a\sqrt{2g\bar{h}_1} + b\sqrt{2g(\bar{h}_1 - \bar{h}_2)} \\ \bar{q}_2 &= a\sqrt{2g\bar{h}_2} - b\sqrt{2g(\bar{h}_1 - \bar{h}_2)}\end{aligned}$$

Med värdena insatta är  $\bar{q}_1 = 56$  l/s och  $\bar{q}_2 = 25.6$  l/s.

(c) Med beteckningen  $\Delta h_i = h_i - \bar{h}_i$ ,  $\Delta \bar{h}_i = \bar{q}_i - \bar{q}_i$  och  $\Delta u_i = \sigma \Delta \theta_i$  blir den linjariserade modellen

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \end{bmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{7}{100} & \frac{7}{100} \\ \frac{7}{100} & -\frac{7(4+\sqrt{2})}{400} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \end{bmatrix} + 10^{-3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \end{bmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

## 2.11

(a) Den olinjära tillståndsmodellen följer av en värmebalans och en massbalans över systemet (Bernoullis ekvation antas beskriva utflödet):

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= \frac{1}{\rho c k l^3} (\rho c q (\nu - T) + P) \\ \frac{dh}{dt} &= \frac{1}{3kh^2} (q - a\sqrt{2gh})\end{aligned}$$

(b) Jämvikt vid arbetspunkten ger

$$\begin{aligned}\bar{q} &= a\sqrt{2g\bar{h}} \\ \bar{p} &= \rho c \bar{q} (\bar{T} - \bar{\nu})\end{aligned}$$

Med värdena insatta är  $\bar{q} = 0.01$  m<sup>3</sup>s<sup>-1</sup> och  $\bar{p} = 400$  kW. Detta ger den linjariserade modellen

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta T \\ \Delta h \end{bmatrix} = 10^{-3} \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -1.7 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \Delta T \\ \Delta h \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} -10 & 0.00025 & 0.01 \\ 0.33 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \Delta q \\ \Delta p \\ \Delta \nu \end{bmatrix}$$

(c) Det linjariserade systemets två poler  $p_i$  ges av egenvärdena till  $A$ -matrisen, d v s  $\det(pI - A) = 0$ . Tidskonstanterna ges sedan av  $T_i = -1/p_i$ , som blir 100 s respektive 600 s.

## 2.12

(a) Massbalans för de två ämnen över tankreaktorn ger

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} c_A &= \frac{Q}{V} (c_{A_i} - c_A) - k \ln(c_A/c_B) \\ \frac{d}{dt} c_B &= \frac{Q}{V} (c_{B_i} - c_B) + k \ln(c_A/c_B)\end{aligned}$$

De stationära koncentrationerna i inflödet ges av

$$\begin{aligned}\bar{c}_{A_i} &= \frac{V}{Q} k \ln(\bar{c}_A/\bar{c}_B) + \bar{c}_A \\ \bar{c}_{B_i} &= \frac{V}{Q} k \ln(\bar{c}_B/\bar{c}_A) + \bar{c}_B\end{aligned}$$

Med värdena insatta är  $\bar{c}_{A_i} = 0.269$  mol m<sup>-3</sup> och  $\bar{c}_{B_i} = 0.0307$  mol m<sup>-3</sup>.

(b)

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta c_A \\ \Delta c_B \end{bmatrix} = 10^{-3} \begin{pmatrix} -1.5 & 1 \\ 0.5 & -2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \Delta c_A \\ \Delta c_B \end{bmatrix} + 10^{-3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \Delta c_{A_i} \\ \Delta c_{B_i} \end{bmatrix}$$

## 2.13

(a)

$$\begin{bmatrix} \Delta M_1 \\ \Delta M_2 \\ \Delta M_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta M_1}{\Delta U_1} & \frac{\Delta M_1}{\Delta U_2} & \frac{\Delta M_1}{\Delta U_3} \\ \frac{\Delta M_2}{\Delta U_1} & \frac{\Delta M_2}{\Delta U_2} & \frac{\Delta M_2}{\Delta U_3} \\ \frac{\Delta M_3}{\Delta U_1} & \frac{\Delta M_3}{\Delta U_2} & \frac{\Delta M_3}{\Delta U_3} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U_1 \\ \Delta U_2 \\ \Delta U_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+s} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+2s} & 0 \\ \frac{1}{(1+3s)(1+s)} & \frac{1}{(1+3s)(1-2s)} & \frac{1}{(1+3s)(1+s)} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U_1 \\ \Delta U_2 \\ \Delta U_3 \end{bmatrix}$$

(b) Determinant av ordning 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (1+2s)(1+s) & (1+3s)(1+s) & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{(1+2s)(1+s)(1+3s)(1+2s)} - \frac{1}{(1+s)(1+3s)(1+2s)(1+2s)} = 0$$

Determinant av ordning 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (1+s)(1+2s)(1+3s) & (1+s)^2(1+2s)(1+3s) \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (1+s)(1+2s)(1+3s) & (1+s)^2(1+3s) \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (1+s)(1+2s) & (1+s)^2 \end{vmatrix} = 0$$

which does not have full rank and thus the system is not controllable. However, if one diagonalize the system one can see that the non controllable modes is stable and hence the system can be stabilized using only  $u_1$ .

### 3.3

Systemet ges av

$$\dot{x}(t+1) = F x(t) + G u(t)$$

där

$$F = \begin{pmatrix} x_1(t) & 1 & 0 \\ x_2(t) & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

Systemet är styrbart om det för varje punkt  $x$  i tillståndsrummet, finns en styr-signalsekvens  $u(0), u(1), \dots, u(n-1)$  sådan att kraven  $x(0) = 0$  och  $x(N) = x$  uppfylls då  $N$  är begränsad.

Vårt problem: Vi försöker med  $N = 1$ . Låt

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

vara en godtycklig punkt i tillståndsrummet.

$$x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x(1) = F \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1(0) + u_2(0) \\ u_1(0) \end{pmatrix}$$

$$x(1) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u_1(0) + u_2(0) \\ u_1(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u_1(0) = x_2 \\ u_2(0) = x_1 - x_2 \end{cases}$$

Alltså lösbar för alla  $x \Rightarrow$  styrbart.

Låt nu

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \end{pmatrix} w(t)$$

$w(t)$  blir nu ny insignal till systemet. Kolla för vilka  $\alpha$  som systemet är styrbart.

I. Försök med  $N = 1$ .

$$x(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \end{pmatrix} w(0) = \begin{pmatrix} 1-\alpha \\ 1 \end{pmatrix} w(0)$$

$x(1) = x$  är ej lösbar för godtyckliga  $x$ .

II. Försök med  $N = 2$

$$x(2) = Fx(1) + \begin{pmatrix} 1-\alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} w(1) = \begin{pmatrix} 1-\alpha \\ 0.5 \end{pmatrix} w(0) + \begin{pmatrix} 1-\alpha \\ 1 \end{pmatrix} w(1)$$

$$x(2) = x \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-\alpha & 1-\alpha \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w(0) \\ w(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Determinant av ordning 1 = elementen i  $G(s)$ . Polynommet är minsta gemensamma nämnare till determinanterna, dvs

$$P(s) = (s+1)^2(2s+1)(3s+1)$$

Detta ger polerna: -1, -1, -1/2 och -1/3. Numeras maximala underdeterminanten (ordn. 3) är den fortfarande noll, dvs det finns inget nollställe!

(c) Ja!

(d) Det krävs lika många tillstånd som det finns poler, dvs 4 tillstånd.

## 3 Egenskaper hos linjära system

3.1

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ger

$$\det S = 1 \Rightarrow \text{styrbart}$$

$$O = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ger

$$\det O = 0 \Rightarrow \text{ej observerbart}$$

3.2

(a) The matrix  $A$  has eigenvalues 0.5 and 2. Hence the system is not stable.

(b) The controllability matrix

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0.5 & -2 & 0.25 \\ -2 & 0.5 & -4 & 0.25 \end{pmatrix}$$

has full rank (the rows are linearly independent), thus the system is controllable. Hence the system can be stabilized using a state feedback.

(c) Use  $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ , this gives

$$S = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Lösbar om

$$\det \begin{pmatrix} 1-\alpha & 1-\alpha \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 1-\alpha & 1-\alpha \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} = (1-\alpha)(1-0.5) = 0.5(1-\alpha)$$

Då  $\alpha \neq 1$  så är systemet styrbart. Vad händer då  $\alpha = 1$ ? Man kan pröva med  $N = 3$  men det ger inget nytt resultat. Då  $\alpha = 1$  kan man ej paverka  $x_1(t)$ .  $x_1(t)$  är ej styrbart medan  $x_2(t)$  är styrbart för alla  $\alpha$ .

Låt  $A$  vara en  $n \times n$  matris,  $n = N$  och  $x(0) = 0$ .

$$x(N) = F^N x(0) + \sum_{k=0}^{N-1} F^{N-k} G u(n-1-k) = 0 + G u(n-1) + F G u(n-2) + \dots + F^{n-1} G u(0)$$

$x(N)$  ligger i värdetrummet till matrisen  $S = (G, FG, F^2G, \dots, F^{n-1}G)$ . Om kolonnerna i matrisen  $S$  ej spänner upp  $R^n$  så är systemet ej styrbart. Det hjälper ej att välja  $N$  större, ty enligt Cayley-Hamiltons sats kan  $F^N G$  skrivas som en linjärkombination av kolonnerna i  $S$ .

### 3.4

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

$$F = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

där

(a) Vi provar med ett samplingsintervall, dvs  $t' = 1$ .

$$x(1) = Fx(0) + Gu(0)$$

ger

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u(0) \\ 2u(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.4 + u(0) \\ -0.8 + 2u(0) \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Uppfyllt om } u(0) = 3.4$$

(b) På ett samplingsintervall fås ( $t' = 1$ )

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u(0) \\ 2u(0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -0.1 + u(0) \\ 0.1 + 2u(0) \end{pmatrix}$$

d v s ej lösbar. På två samplingsintervall fås ( $t' = 2$ )

$$x(2) = Fx(1) + Gu(1) = F^2 x(0) + FGu(0) + Gu(1) = \begin{pmatrix} 0.06 & 0.05 \\ 0.10 & 0.11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.8 \end{pmatrix} u(0) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u(1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2.01 = 0.4u(0) + u(1) \\ -2.01 = 0.8u(0) + 2u(1) \end{cases} \Rightarrow u(1) = 2.01 - 0.4u(0)$$

$$\Rightarrow -2.01 = 0.8u(0) + 4.02 - 0.8u(0) = 4.2$$

vilket ej kan uppfyllas.

Förklaringen är att systemet ej är styrbart. Det styrbara underrummet är linjen  $2x_1 = x_2$ , och det var utefter denna linje som förflyttningen gjordes i a)-uppgiften. Observera att det i b)-uppgiften ej är möjligt att uppnå önskat tillstånd även om man får använda sig av ett godtyckligt antal samplingsintervall.

### 3.5

Vi uttrycker  $x(0)$  i basen av egenvektorer

$$x(0) = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n.$$

Da blir

$$x(1) = Fx(0) = \alpha_1 Fv_1 + \dots + \alpha_n Fv_n = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n v_n$$

$$x(t) = \alpha_1 \lambda_1^t v_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n^t v_n = |\lambda_1|^t |\alpha_1| |\lambda_1|^{t-1} \alpha_1 v_1 + \dots + |\lambda_n|^t |\alpha_n| \alpha_n v_n$$

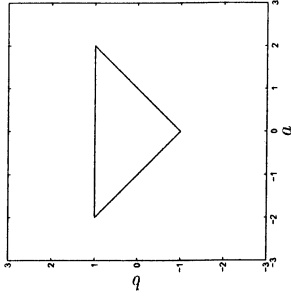
Eftersom  $\lambda_1$  har det största absolutvärdet går alla termer utom den första inom parentes mot noll då  $t \rightarrow \infty$ . Därav följer att  $x(t)/v_1 \rightarrow v_1$  då  $t \rightarrow \infty$ .

### 3.6

Anges stabilitetsområdet ( $(a, b)$ ) för

$$z^2 + az + b = 0$$

Det stabila ( $a, b$ )-området är det inre av triangeln i figuren nedan.



### 3.7

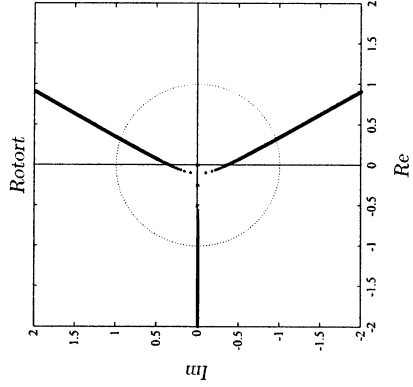
Här blir

$$H(q) = \frac{K}{q(q + 0.5)(q + 0.25) + K}$$

Karakteristiska ekvationen

$$z(z + 1/2)(z + 1/4) + K = 0.$$

Rotorkurvan bestäms på samma sätt som för ett kontinuerligt system, men det tillåtna området är nu i stället det inre av enhetscirkeln  $|z| = 1$ . Vi har startpunkter i  $0$ ,  $-1/2$  samt  $-1/4$  och inga ändpunkter. Detta betyder att vi får tre asymptoter i riktningarna  $\pi$  och  $\pm\pi/3$ . Dessa har en skärningspunkt i  $\frac{1}{3}(0 - 1/2 - 1/4) = -1/4$ . För att avgöra stabiliteten så studeras skärningarna med enhetscirkeln.



Vi börjar med att kolla för vilket  $K$  som vi har en rot i  $z = -1$ . Polynomdivision ger

$$\frac{z(z + 1/2)(z + 1/4) + K}{z + 1} = z^2 - \frac{1}{4}z + \frac{3}{8}K - \frac{3}{8}$$

det vill säga, om  $K = 3/8$  så är  $z = -1$  en rot till karakteristiska ekvationen. De andra rötterna är då

$$z_{2,3} = +\frac{1}{8} \pm \sqrt{\frac{1}{64} - \frac{24}{64}} = +\frac{1}{8} \pm j\frac{\sqrt{23}}{8} \approx 0.13 \pm j \cdot 0.6$$

Rötterna ligger inuti enhetscirkeln  $\Rightarrow$  systemet stabilt om  $K < 3/8$ .

### Komplettering

I denna uppgift hade vi sådan tur så att grenen längs reella axeln lämnade enhetscirkeln före de båda komplexa. I de fall då de komplexa grenarna lämnar enhetscirkeln först så kan man använda tekniken enligt nedan. Kar ekv

$$z^3 + \frac{3}{4}z^2 + \frac{1}{8}z + K = 0 \quad (K > 0)$$

Vi vill beräkna det  $K$ -värde för vilket de komplexa grenarna lämnar enhetscirkeln.

Vi utnyttjar att om  $z_1$  är en punkt på den ena komplexa grenen för ett viss  $K$ -värde så är  $z_1^*$  en punkt på den andra grenen för detta  $K$ -värde (komplekxkonjugerade), samt att en punkt på enhetscirkeln kan skrivas (med polära koordinater)

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Kar ekv kan faktoruppdelas enligt

$$(z - \alpha(K))(z - \beta(K))(z - \gamma(K)) = 0$$

Sökt det  $K$  så att

$$\alpha(K) = e^{i\varphi}, \quad \beta(K) = e^{-i\varphi} \text{ och } \gamma(K) = \gamma$$

Vi får

$$\begin{aligned} 0 &= (z - e^{i\varphi})(z - e^{-i\varphi}) \cdot (z - \gamma) = (z^2 - 2\cos\varphi z + 1)(z - \gamma) = \\ &= z^3 - (\gamma + 2\cos\varphi)z^2 + (1 + \gamma 2\cos\varphi)z - \gamma = z^3 + \frac{3}{4}z^2 + \frac{1}{8}z + K \\ \frac{3}{4} &= -\gamma - 2\cos\varphi \\ \frac{1}{8} &= 1 + \gamma 2\cos\varphi \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \cos\varphi = \frac{2K-3}{8} \\ \frac{1}{8} = 1 - 2K\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{8} = 1 - 2 \cdot K \cdot \frac{2K-3}{8} \\ -\gamma = K \end{cases}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{8 - 8K^2 + 6K}{8} \Leftrightarrow 8K^2 - 6K - 7 = 0$$

$$K = \frac{3}{8} \pm \sqrt{\frac{9}{64} + \frac{7}{8}} = \frac{3 + \sqrt{65}}{8} \text{ (ty } K > 0 \text{) (rotort)}$$

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{65} - 3}{16}$$

De komplexa grenarna skär enhetscirkeln för

$$K = \frac{\sqrt{65} + 3}{8}$$

i punkterna  $e^{i\varphi_1}$  och  $e^{-i\varphi_1}$  där  $\varphi_1$  ges av

$$\cos \varphi_1 = \frac{\sqrt{65} - 3}{16}$$

### 3.8

$$y/(z+1) = 0.9y(t) + u(t) \Leftrightarrow y(t) = \frac{q^{-1}}{1-0.9q^{-1}}u(t)$$

PI regulator ger

$$u(t) = \underbrace{K_1 e(t)}_{\text{proportionellät}} + \underbrace{\frac{K_2}{1-q^{-1}} e(t)}_{\text{integralät}} = (K_1 + \frac{K_2}{1-q^{-1}}) e(t)$$

$$y(t) = \frac{q^{-1}}{1-0.9q^{-1}} (K_1 + \frac{K_2}{1-q^{-1}}) (r(t) - y(t)) =$$

$$= \frac{q^{-1}(K_1 + K_2 - K_1 q^{-1})}{(1-0.9q^{-1})(1-q^{-1})} (r(t) - y(t)) =$$

$$(1-1.9q^{-1} + 0.9q^{-2})y(t) =$$

$$= -((K_1 + K_2)q^{-1} - K_1 q^{-2})y(t) + q^{-1}(K_1 + K_2 - K_1 q^{-1})r(t)$$

$$y(t) = \frac{q^{-1}(K_1 + K_2 - K_1 q^{-1})r(t)}{1 + (K_1 + K_2 - 1.9)q^{-1} + (0.9 - K_1)q^{-2}}$$

$$K_1 = 1 \Rightarrow y(t) = \frac{q^{-1}(1 + K_2 - q^{-1})r(t)}{1 - 0.9q^{-1} - 0.1q^{-2} + K_2 q^{-1}} =$$

$$= \frac{q^{-1}(1 + K_2 - q^{-1})r(t)}{(1-q^{-1})(1+0.1q^{-1}) + K_2 q^{-1}}$$

$$P(q) = (q-1)(q+0.1)$$

$$Q(q) = q$$

$$\text{Kar. ekv.: } (z-1)(z+0.1) + K_{2,2} = 0$$

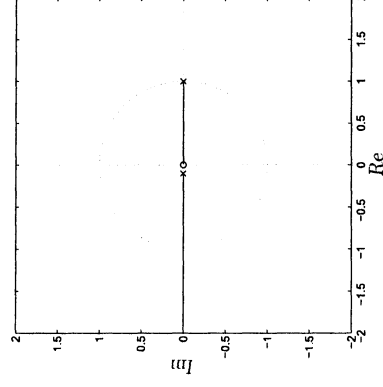
Startpunkter: 1 och -0.1.

Slutpunkter: 0

Då grenen passerar ut genom enhetscirkeln är  $z = -1$  en lösning till kar ekv.

$$0 = (-1-1)(-1+0.9) + K_2(-1) = 1.8 - K_2$$

Stabilt då  $0 < K_2 < 1.8$ . I figuren nedan visas rotorten.

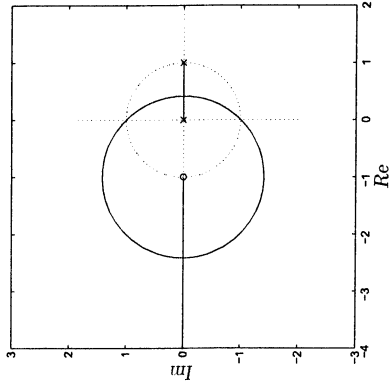


### 3.9

Återkopplade systemet

$$((1 - \alpha q^{-1}) + K(q^{-1} + q^{-2}))y(t) = r(t)$$

$$\text{Kar. ekv.: } z(z - \alpha) + K(z + 1) = 0 \text{ ger } (\alpha = 1)$$



Första mötespunkten för grenarna =  $\beta$ . Systemet är alltid instabilt om  $\beta \geq 1$ , ty produkten av rötterna =  $K$ , dvs avståndet från origo för de komplexkonjugerade rötterna ökar då  $K$  växer. För vilka  $\alpha$  gäller att  $\beta \geq 1$ ? I gränsfallet  $\beta = 1$  har vi en dubbelrot i 1, dvs  $\alpha$  och  $K$  är sadana att

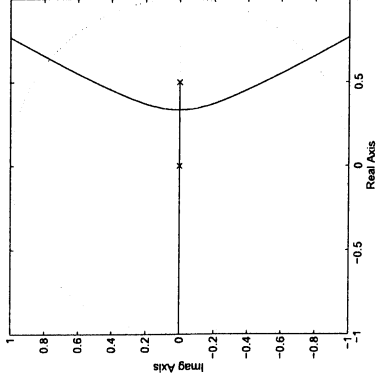
$$(z - 1)^2 = z(z - \alpha) + K(z + 1) \Rightarrow K = 1, \quad \alpha = 3.$$

Svar: Systemet alltid instabilt om  $\alpha \geq 3$ .

### 3.10

$$H(q) = \frac{1}{q^2(q - 0.5)}$$

Rotorten får utsändet



För att avgöra stabilitetsgränsen kan man alltid använda Schur-Cohns tablå. (Schur-Cohns tablå är ett sätt att kolla om ett polynom har rötter utanför eller innanför enhetscirkeln, jfr Rouths test i Regler AK.) Men det finns i detta fall en elegantare metod:

Vi skall avgöra när ekvationen

$$q^2(q - 0.5) + K = 0$$

har en rot på enhetscirkeln. Det gäller att  $K$  (konstanttermen) är produkten av rötterna. När de två komplexkonjugerade rötterna skär enhetscirkeln är produkten av dem 1. Kalla den 3:e rotens läge vid detta tillfälle för  $x$ . Man får då ekvationen för  $x$

$$x^2(x - 0.5) - x = 0$$

$$x^2 - 0.5x - 1 = 0$$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$  ( $x < 0$  framgår ur rotorten)

Systemet stabilt för  $K < \frac{\sqrt{17}-1}{4}$

### 3.11

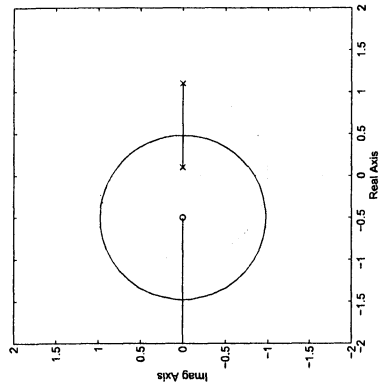
a)

Kar ekv

$$(z - 0.1)(z - 1.1) + K(z + 0.5) = 0$$

stab gränser

$$0.06 < K < 1.78$$

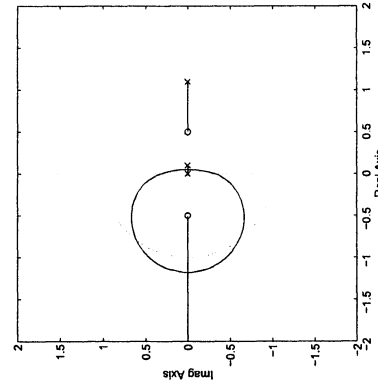


b) Kar ekv

$$z(z - 0.1)(z - 1.1) + 2K(z + 0.5)(z - 0.5) = 0$$

stab gränser

$$0.06 < K < 1.12$$



### 3.12

The system has the following minors:

$$(1 \times 1) : \frac{2}{s+1} \cdot \frac{3}{s+2} \cdot \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s+1}$$

$$(2 \times 2) : \frac{-s+1}{(s+1)^2(s+2)} \cdot \frac{0}{(s+1)^2(s+2)}$$

Least common denominator is  $(s+1)^2(s+2)$  and the poles become  $\{-1, -1, -2\}$ .

To determine the zeros, norm the maximal minors s.t. the pole polynomial is in the denominator.

$$(2 \times 2) : \frac{-s+1}{(s+1)^2(s+2)} \cdot \frac{-s+1}{(s+1)^2(s+2)} \cdot \frac{0}{(s+1)^2(s+2)}$$

The largest common denominator to the numerators is  $(-s+1)$ . Hence, there is a multivariable zero in  $\{+1\}$ .

### 3.13

Systemet har följande underdeterminanter: Överföringsmatrisen har underdeterminanter

$$\frac{1}{(s+2)^2} - \frac{(s+1)}{(s+2)^2} = -\frac{1}{s+2}$$

då första kolumnen stryks,

$$\frac{1}{(s+2)^2} - \frac{1}{(s+2)^2} = 0$$

då andra kolumnen stryks samt

$$\frac{(s+1)}{(s+2)^2} + \frac{1}{(s+2)^2} = \frac{1}{(s+2)}$$

då tredje kolumnen stryks. Vidare utgör matriselementen själva underdeterminanter. Polpolynom, d v s minsta gemensamma nämnaren till samtliga underdeterminanter blir följaktligen

$$p(s) = (s+2)$$

Detta innebär att systemet har en pol i  $s = -2$ . Systemet kan realiseras på en tillståndsform av ordning ett.

De maximala underdeterminanterna är

$$-\frac{1}{s+2}, \quad 0, \quad \frac{1}{(s+2)}$$

Systemets nollställpolynom är alltså enbart en konstant, vilket innebär att nollställen saknas.



### 3.14

Överföringsmatrisen har determinanten

$$\det G(s) = \frac{2}{(s+3)^2}$$

samt underdeterminanterna (matriselementen)

$$\frac{1}{(s+1)(s+3)}, \quad \frac{-1}{(s+1)(s+3)}, \quad \frac{2(s+1)}{(s+3)}$$

Polynomiet, d v s minsta gemensamma nämnaren för determinanterna, blir således

$$\mu(s) = (s+1)(s+3)^2$$

vilket betyder att systemet har polerna  $-1$ ,  $-3$  och  $-3$ .

Den maximala underdeterminanten är

$$\frac{2}{(s+3)^2}$$

och normering med polynomiet ger

$$\frac{2(s+1)}{(s+1)(s+3)^2}$$

Nollställespolynomiet är alltså

$$n(s) = (s+1)$$

vilket ger att systemet har ett nollställe i  $-1$ .

### 3.15

Minors

$$\underbrace{\frac{1-s}{(s+1)^2}}_{\text{mult. 2}}, \quad \frac{2-s}{(s+1)^2}, \quad \frac{1/3-s}{(s+1)^2}, \quad \frac{1/3}{(s+1)^3}$$

We have 3 poles in  $s = -1$  (LCD =  $(s+1)^3$ ). Hence a minimal realization must be of order 3.

### 3.16

(a) Överföringsmatrisen har determinanten

$$\frac{(s+5)}{(s^2+3s+2)(s+2)} - \frac{1}{(s+2)(s+4)} = \frac{6(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+2)(s+4)}$$

samt underdeterminanterna

$$\frac{(s+5)}{s^2+3s+2}, \quad \frac{1}{(s+2)}, \quad \frac{1}{(s+4)}, \quad \frac{1}{(s+2)}, \quad \frac{1}{(s+2)}$$

Polynomiet är alltså

$$\mu(s) = (s+1)(s+2)(s+2)(s+4)$$

vilket betyder att systemet har polerna  $-1$ ,  $-2$ ,  $-2$  och  $-4$ . För att realisera systemet på tillståndsform behövs fyra tillstånd.

(b) Överföringsmatrisen har i detta fall determinanten

$$\frac{(s+5)}{(s+1)(s+4)(s+2)} - \frac{1}{(s+2)(s+4)} = \frac{4}{(s+1)(s+2)(s+4)}$$

Polynomiet är

$$\mu(s) = (s+1)(s+2)(s+4)$$

vilket innebär att polerna är  $-1$ ,  $-2$  och  $-4$ . För att realisera systemet på tillståndsform behövs i detta fall tre tillstånd.

### 3.17

Laplaceformering ger

$$A(s)Y(s) = B(s)U(s)$$

där

$$A(s) = \begin{pmatrix} (s+1) & -s \\ s & (s+1) \end{pmatrix}, \quad B(s) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplikation med  $A^{-1}(s)$  ger

$$G(s) = A^{-1}(s)B(s) = \frac{1}{2s^2+2s+1} \begin{pmatrix} (2s+1) & -1 \\ 1 & (2s+1) \end{pmatrix}$$

Överföringsmatrisen har determinanten

$$\det G(s) = \frac{(2s+1)^2}{(2s^2+2s+1)^2} + \frac{1}{(2s^2+2s+1)^2} = \frac{2}{(2s^2+2s+1)}$$

samt underdeterminanterna

$$\frac{(2s+1)}{(2s+1)}, \quad \frac{-1}{(2s^2+2s+1)}, \quad \frac{1}{(2s^2+2s+1)}$$

Detta ger polynomiet

$$\mu(s) = 2s^2+2s+1$$

vilket innebär att systemet har polerna  $-\frac{1}{2} \pm i\frac{1}{2}$

Den maximala underdeterminanten är

$$\frac{2}{(2s^2+2s+1)}$$

vilket betyder att nollställen saknas.

3.18

Alt. 1: Utsignalen  $y$  beror bara av  $x_1$  och  $x_2$ . Tillstånden  $x_1, x_2$  beror ej heller på  $x_3$  pga  $A$ -matrixens utskende (studera rad 1 och 2). Tillståndet  $x_3$  är således ej observerbart och kan elimineras ur tillståndsbeskrivningen:

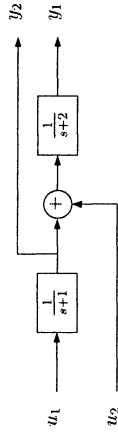
$$\dot{\tilde{x}}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}(t),$$

där  $\tilde{x} = (x_1, x_2)^T$ . Styr- och observerbarhetsmatrisen för denna realisering har full rang och vi har en minimal realisering.

Alt. 2: Överföringsmatrisen  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$  ges av

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+2)(s+1)} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{1}{s+1} & 0 \end{bmatrix}, \text{ dvs } \begin{cases} y_1 = \frac{1}{(s+2)(s+1)}u_1 + \frac{1}{s+2}u_2 \\ y_2 = \frac{1}{s+1}u_1 \end{cases}$$

Detta ger följande blockschema:



Inför ett tillstånd efter varje block, tex  $x_1 = y_1$  och  $x_2 = y_2$ . Detta ger samma minimala realisering som i alt.1.

3.19

(a) Utsignalen vid  $t > 0$  för en godtycklig insignal ges av

$$y(t) = C \left( e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \right)$$

Med  $x(0) = (0 \ 0)^T$  och  $u(t) = \delta(t)$  får vi impulssvaret

$$g(t) = y(t) = Ce^{At}B = 0.5e^{-t}(3\sin t - \cos t)$$

Motsvarande överföringsfunktion är

$$G(s) = \mathcal{L}^{-1}\{g(t)\} = \frac{1 - 0.5s}{s^2 + 2s + 2}$$

(b) Systemet är stabilt eftersom  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$ .

3.20

(a)

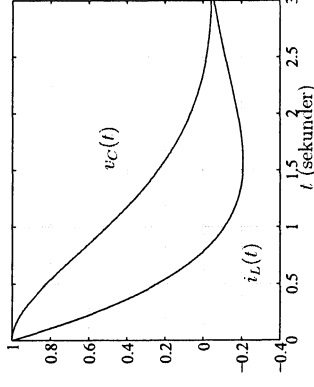
$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_1}{L} & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{R_2C} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

(b)

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \cos t & -e^{-t} \sin t \\ e^{-t} \sin t & e^{-t} \cos t \end{pmatrix}$$

(c) Stationärt ger  $u = 2$  V strömmen  $i_L = 1$  A och spänningen  $v_C = 1$  V. Kortslutningen av ackumulatorm innebär en stegändring i insignalen på  $-2$  V. Responsen blir

$$\begin{aligned} i_L(t) &= e^{-t}(\cos t - \sin t) \\ v_C(t) &= \sqrt{2}e^{-t} \sin(t + \frac{\pi}{4}) \end{aligned}$$



3.21

Systemet är på formen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \tilde{A}x + \tilde{B}u + \tilde{N}\dot{u} \\ y &= \tilde{C}x \end{aligned}$$

Om  $z = Tx + Su$  och  $T$  är en inverterbar  $2 \times 2$  matris (d v s har rangen 2) är

$$\begin{aligned} \dot{z} &= T^{-1}\tilde{A}Tz + T^{-1}(\tilde{A}S + \tilde{N})u + T^{-1}(\tilde{N} - S)\dot{u} \\ y &= \tilde{C}Tz + \tilde{C}Su \end{aligned}$$

Genom att välja  $S = \tilde{N}$  kan vi eliminera tidsderivatan av insignalen från modellen. Sedan kan vi till exempel välja  $T$  som enhetsmatrisen, d v s

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Den nya modellen blir då

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}z &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}z + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}u \\ y &= (1 \ 0)z + (0 \ 1)u \end{aligned}$$

### 3.22

(a)  $(\xi_0, \eta_0, \eta_0) = (1, 0.6017, 1.1845)$

(b)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Delta\xi &= -\Delta\xi - 52.6\Delta u \\ \Delta y &= 1.18\Delta\xi - 21.3\Delta u \end{aligned}$$

(c) Systemet har en stabil pol i -1 oavsett vilket värde  $\xi_0$  har.

### 3.23

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) = 0 &\Rightarrow \lambda = \pm 1 \Rightarrow \text{instabilt} \\ S(A, B) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} &\Rightarrow \text{rang}=1 \Rightarrow \text{ej styrbart} \\ \mathcal{O}(A, C) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} &\Rightarrow \text{rang}=2 \Rightarrow \text{observerbart} \end{aligned}$$

### 3.24

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 & -\beta & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & -\alpha & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Systemet är styrbart om både  $\alpha \neq 0$  och  $\beta \neq 0$  ( $\Rightarrow$  tre linjärt oberoende kolonner).

### 3.25

Transformationen ger  $\mathcal{O}_z = \mathcal{O}_x T$  och  $S_z = T^{-1}S_x$ .

$T$  icke-singulär  $\Rightarrow T$  och  $T^{-1}$  har full rang ( $=n$ )  $\Rightarrow \mathcal{O}_z$  och  $S_z$  har full rang ( $=n$ ) om och endast om  $\mathcal{O}_x$  och  $S_x$  har full rang.

### 3.26

$$(a) \quad \begin{aligned} SS1: & \begin{cases} \bar{c}_A = 0 \\ \bar{c}_B = 0 \end{cases} & \text{och} & \quad SS2: & \begin{cases} \bar{c}_A = 1/\beta \\ \bar{c}_B = 1/\alpha \end{cases} \end{aligned}$$

Modell 1:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{c} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Delta c \\ \Delta c_M &= (0.5 \ 0.5) \Delta c \end{aligned}$$

Modell 2:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{c} &= \begin{pmatrix} 0 & \alpha/\beta \\ \beta/\alpha & 0 \end{pmatrix} \Delta c \\ \Delta c_M &= (0.5 \ 0.5) \Delta c \end{aligned}$$

(b) Modell 1 är stabil och Modell 2 är instabil.

(c) Modell 1 är ej observerbar (men detekterbar ty stabil) och Modell 2 är observerbar om  $\alpha/\beta \neq \beta/\alpha$ .

### 3.27

$$(a) \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{Q+R}{V} & \frac{R}{V} \\ \frac{Q+R}{V} & -\frac{Q+R}{V} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{\rho c V} \begin{bmatrix} \theta \\ (1-\theta) \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \frac{Q}{V} \\ 0 \end{bmatrix} T_0$$

(b) Konditionstalet  $\kappa(M)$  för en icke-kvadratisk matris  $M$  är kvoten mellan största och minsta singularvärde, som är roten ur egenvärdena till  $M^T M$ .

$$S = \frac{1}{\rho c} \begin{pmatrix} \theta & 1-3\theta \\ 1-\theta & 4\theta-2 \end{pmatrix}$$

$$SS^T = \frac{1}{\rho^2 c^2} \begin{pmatrix} 10\theta^2 - 6\theta + 1 & -13\theta^2 + 11\theta - 2 \\ -13\theta^2 + 11\theta - 2 & 17\theta^2 - 18\theta + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{pmatrix}$$

3.29

a) As  $px_1 = x_2$ , and  $px_2 = a_{21}x_1 + b_2u$ , the result  $(p^2 - a_{21})x_1 = b_2u$  follows directly.

b) Using  $px_3 = x_4$  and  $px_4 = a_{41}x_1 + b_4u$  gives  $p^2x_3 = a_{41}\frac{b_2}{p^2 - a_{21}}u + b_4u$

which is readily rewritten as

$$p^2(p^2 - a_{21})x_3 = [b_4p^2 + (b_2a_{41} - b_4a_{21})]u$$

c) From a) it follows that the transfer function of the system is

$$G(s) = \begin{pmatrix} G_1(s) \\ G_2(s) \end{pmatrix}$$

where

$$G_1(s) = \frac{b_2}{s^2 - a_{21}}, \quad G_2(s) = \frac{b_4s^2 + (b_2a_{41} - b_4a_{21})}{s^2(s^2 - a_{21})}$$

The poles of the system  $G(s)$  are therefore  $s = 0$  (double pole),  $s = \sqrt{a_{21}}$ ,  $s = -\sqrt{a_{21}}$ .

As the fourth order polynomial in the denominator of  $G_2(s)$  is the pole polynomial of the total system, and there is no common zeros of  $G_1(s)$  and  $G_2(s)$ , the system  $G(s)$  has no zeros.

3.30

(a) The transfer function becomes

$$G(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + 2(1 + \alpha)s + 1 + 2\alpha} \begin{pmatrix} s + 1 + \alpha & \alpha \\ \alpha & s + 1 + \alpha \end{pmatrix}$$

(b) The poles of the system are the eigenvalues of the matrix  $A$ , that is the solutions to

$$0 = \det(sI - A) = (s + 1 + \alpha)^2 - \alpha^2 = (s + 1)(s + 1 + 2\alpha)$$

One eigenvalue is hence always in  $s = -1$ , while the other is in  $s = -1 - 2\alpha$ .

(c) The zeros of the system can be found as the poles of  $G^{-1}(s)$  (as the system has an equal number of inputs and outputs). Noting that

$$G^{-1}(s) = sI - A = \begin{pmatrix} s + 1 + \alpha & -\alpha \\ -\alpha & s + 1 + \alpha \end{pmatrix}$$

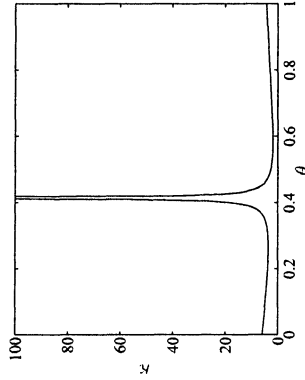
which has no poles, we note that the system has no zeros.

$$\det(\lambda I - SS^T) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \left( s_{11} + s_{22} \pm \sqrt{4(s_{12}^2 - s_{11}s_{22}) + (s_{11} + s_{22})^2} \right)$$

$$\kappa(S) = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} = \sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}} = \begin{cases} \frac{0.847}{0.047} = 18 & \text{när } \theta = 0.4 \\ \frac{0.847}{0.57} = 1.8 & \text{när } \theta = 0.6 \end{cases}$$

Ur regleringssynpunkt gäller det att ha så lågt konditionstal som möjligt, d.v.s det är lämpligare att välja  $\theta = 0.6$ . I figuren framgår att det lägsta konditionstalet fås då  $\theta \approx 0.6$ .



(c)  $\det S = 0 \Rightarrow \theta = -1 \pm \sqrt{2}$ , d.v.s  $S$  förlorar sin fulla rang när  $\theta = \sqrt{2} - 1 \approx 0.414$ .

3.28

(a)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\omega & \omega & 0 \\ \omega & -2\omega & \omega \\ 0 & \omega & -\omega \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \omega/k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} q$$

$$y = (0 \ 0 \ 1)$$

där  $\omega = 3k/(pcd)$ .

(b) Systemet är både styrbart och observerbart.

(c) Systemet är marginellt stabilt (en pol i origo).

### 3.31

(a) Styrbarhetsmatrisen ( $n = 3$ ):

$$S(A, B) = [B \ AB \ A^2B]$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 - 2a \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vilket ger

$$S(A, B) = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 - 2a \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\forall a$  får  $\det(S(A, B)) = -2a - (1 - 2a) = -1$ .  $\forall a \iff S(A, B)$  har full rang  $\forall a \iff$  systemet styrbart  $\forall a$ .

(b)  $\det(\lambda I - A) = (\lambda + 1)^3 = 0 \implies \lambda_{1,2,3} = -1 \implies$  stabil (egenvärdena till en triangulär matris ges av diagonalelementen).

### 3.32

a) The poles and eigenvalues of a square system is given by the determinant.

$$\det(G(s)) = 2 \frac{s+1}{s+3} - \frac{(s-2)(s+6)}{(s+3)(s+1)}$$

$$= \frac{2(s+1)^2 - (s-2)(s+6)}{(s+1)(s+3)}$$

$$= \frac{s^2 + 14}{(s+1)(s+3)}$$

The zeros are the roots of the numerator polynomial. The poles are the roots of the denominator polynomial.

Answer: The zeros are  $z = \pm i\sqrt{14}$  and the poles are  $p = -1, -3$

b)  $G_{22}$  is strictly stable because the denominator has strictly positive coefficients and is second order. The other elements are stable. Because the poles of the system is the poles of the elements (disregarding multiplicity),  $G$  is strictly stable. Assuming constant input signal  $u_0$  (step input), the output in stationarity will be

$$y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)u_0 \frac{1}{s}$$

according to the final value theorem. The limit exists because  $sG(s)u_0 \frac{1}{s}$  is strictly stable.

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s)u_0 = G(0)u_0 = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} \\ 3 & -1 \end{pmatrix} u_0$$

It is seen that  $\text{span}(G(0)) = \text{span} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ . Because  $y_{ref} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \text{span}(G(0))$ , there is no  $u_0$  such that  $y_{ref}$  can be attained.

Answer: Because the static gain of the system does not span the desired output direction, it is impossible to achieve  $y_{ref}$  with a constant input signal.

## 4 Sampled system

### 4.1

a) The sampled system has  $F = e^{AT}$ ,  $H = C$ .

$$e^{AT} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} s & -\omega \\ \omega & s \end{bmatrix}^{-1} \right\} \Big|_{t=T} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + \omega^2} \begin{bmatrix} s & \omega \\ -\omega & s \end{bmatrix} \right\} \Big|_{t=T}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \omega T & \sin \omega T \\ -\sin \omega T & \cos \omega T \end{bmatrix}$$

The observability matrix

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos \omega T & \sin \omega T \end{bmatrix} \implies \det \mathcal{O} = \sin \omega T = 0 \iff T = \frac{k\pi}{\omega}, k \in \mathbb{Z}$$

Thus, the sampled system is observable if  $T \neq \frac{k\pi}{\omega}$  where  $k \in \mathbb{Z}$

### 4.2

a)

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases}$$

where

$$A = \begin{bmatrix} \sigma & -\omega \\ \omega & \sigma \end{bmatrix}, \omega \neq 0$$

a) Examine the observability matrix for the continuous-time system

$$C = [c_1 \ c_2] \implies CA = (c_1\sigma + c_2\omega, -c_1\omega + c_2\sigma)$$

$$\implies \mathcal{O} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_1\sigma + c_2\omega & -c_1\omega + c_2\sigma \end{pmatrix} \implies$$

$$\det \mathcal{O} = -c_1^2\omega + c_1c_2\sigma - c_1c_2\sigma - c_2^2\omega =$$

$$= -\omega(c_1^2 + c_2^2) \neq 0 \quad \forall \omega \neq 0 \quad C \neq 0$$

Thus, the system is observable  $x(t)$  can hence be computed from  $y(t)$ .

b) Study the system at the sampling instants

$$\begin{cases} x(kT + T) = Fx(kT) & F = e^{AT} \\ y(kT) = Hx(kT) & H = C \end{cases}$$

$$\begin{aligned} e^{At} &= C^{-1}\{(S I - A)^{-1}\} = C^{-1}\left\{\begin{pmatrix} s - \sigma & \omega \\ -\omega & s - \sigma \end{pmatrix}^{-1}\right\} = \\ C^{-1}\left\{\frac{1}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} \begin{pmatrix} s - \sigma & -\omega \\ \omega & s - \sigma \end{pmatrix}\right\} &= \begin{pmatrix} e^{\sigma t} \cos \omega t & -e^{\sigma t} \sin \omega t \\ e^{\sigma t} \sin \omega t & e^{\sigma t} \cos \omega t \end{pmatrix} \\ \Rightarrow F &= e^{\sigma T} \begin{pmatrix} \cos \omega T & -\sin \omega T \\ \sin \omega T & \cos \omega T \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Examine the observability matrix for the discrete-time system

$$H = (c_1 \ c_2) \Rightarrow$$

$$H F = (c_1 e^{\sigma T} \cos \omega T + c_2 e^{\sigma T} \sin \omega T, -c_1 e^{\sigma T} \sin \omega T + c_2 e^{\sigma T} \cos \omega T)$$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} H \\ H F \end{pmatrix} = -c_1^2 e^{\sigma T} \sin \omega T + c_1 c_2 e^{\sigma T} \cos \omega T - c_1 c_2 e^{\sigma T} \cos \omega T - c_2^2 e^{\sigma T} \sin \omega T = -e^{\sigma T} \sin \omega T (c_1^2 + c_2^2) \neq 0$$

when  $C \neq 0$  and  $\sin \omega T \neq 0$

$$\sin \omega T \neq 0 \text{ då } \omega T \neq n\pi \Rightarrow T \neq \frac{n\pi}{\omega}$$

Thus, for  $T \neq \frac{n\pi}{\omega}$ ,  $x(kT)$  can be computed from  $y(kT)$ . Given  $x(kT)$ , we can compute  $x(t)$  via  $x(t) = e^{A(t-kT)}x(kT)$ ,  $t \geq kT$ .

c)

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \Rightarrow F = \begin{pmatrix} e^{\alpha T} & 0 \\ 0 & e^{\beta T} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} H \\ H F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_1 e^{\alpha T} & c_2 e^{\beta T} \end{pmatrix} \Rightarrow \det \mathcal{O} = c_1 c_2 (e^{\beta T} - e^{\alpha T}) \neq 0 \text{ when } c_1 \neq 0 \text{ and } \alpha \neq \beta$$

Thus, for  $\alpha \neq \beta$ ,  $c_1 \neq 0$ ,  $c_2 \neq 0$

#### 4.3

Vi har att

$$G_{\text{ny}}(s) = \frac{1}{1 + \tau s} \iff \begin{cases} \dot{x} = -(1/\tau)x + (1/\tau)v \\ y = x \end{cases}$$

På integralform är

$$y(t) = x(t) = e^{At_0} + \int_{t_0}^t e^{A(t-\sigma)} B v(\sigma) d\sigma$$

där  $A = -1/\tau$  och  $B = 1/\tau$ .

Låt  $t_0 = kh - h$  och  $t = kh$ . Genom att vi har en dödtid  $\delta < h$  är  $v(t) = u(t - \delta)$ . Sätter vi in detta i integraluttrycket och delar upp integralen i de intervall där insignalen är konstant får vi (argument  $k$  betyder  $t = kh$ )

$$\begin{aligned} y(k) &= e^{-h/\tau} y(k-1) + \\ &+ \frac{1}{\tau} \int_{kh-h}^{kh-h+\delta} e^{-(kh-\sigma)/\tau} d\sigma \cdot u(k-2) + \\ &+ \frac{1}{\tau} \int_{kh-h+\delta}^{kh} e^{-(kh-\sigma)/\tau} d\sigma \cdot u(k-1) \\ &= ay(k-1) + b_2 u(k-2) + b_1 u(k-1) \end{aligned}$$

där

$$\begin{aligned} b_2 &= e^{-(h-\delta)/\tau} - e^{-h/\tau} \\ b_1 &= 1 - e^{-(h-\delta)/\tau} \end{aligned}$$

Genom  $z$ -transformation följer att

$$H(z) = z^{-1} \frac{b_1 + b_2 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}$$

#### 4.4

(a) The controllability matrix is given by

$$S(A, B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

which has full rank. The continuous-time system is thus controllable.

(b) Discretization gives

$$x_i(t+1) = \begin{pmatrix} \cos T & \sin T \\ -\sin T & \cos T \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 - \cos T \\ \sin T \end{pmatrix} u(t)$$

The controllability matrix for the discretized system is

$$\begin{aligned} S &= \begin{pmatrix} 1 - \cos T & \cos T - \cos^2 T + \sin^2 T \\ \sin T & -\sin T + 2 \sin T \cos T \end{pmatrix} \\ \det S &= 2 \sin T (\cos T - 1) \end{aligned}$$

The discretized system is not controllable for  $T = n\pi$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

#### 4.5

Ställ upp  $G(s)$  på tillståndsform

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) = x(t) + u(t) \\ y(t) &= Cx(t) = x(t). \end{aligned}$$

Sampling med samplingsintervall  $T$  ger det tidsdiskreta systemet

$$\begin{aligned} x(kT + T) &= Fx(kT) + Gu(kT) \\ y(kT) &= Hx(kT), \end{aligned}$$

med (sats 4.1 sidan 102 i kursboken)

$$F = e^{AT} = e^T \quad G = \int_0^T e^{At} dt B = e^T - 1 \quad H = C = 1.$$

Med  $u(kT) = -K y(kT)$  fås återkopplade systemet

$$\begin{aligned} x(kT + T) &= e^T x(kT) - K(e^T - 1)y(kT) = \\ &= (e^T - K e^T + K)x(kT) = e^{-2T} x(kT). \end{aligned}$$

Löser man ut  $K$  får man  $K = \frac{e^T - e^{-2T}}{e^T - 1}$ .

## 5 Störningsmodeller

### 5.1

(a)

$$\phi_y(\omega) = \frac{1 + c^2 + 2c \cos \omega}{1 + a^2 + 2a \cos \omega}$$

$V$  kan beräknas i detta fall med residuekalkyl:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + c^2 + 2c \cos \omega}{1 + a^2 + 2a \cos \omega} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dz}{z} = id\omega / \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1 + c^2 + c(z + z^{-1})}{1 + a^2 + a(z + z^{-1})} \frac{dz}{z} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(1 + cz)(1 + cz^{-1})}{(1 + az)(1 + az^{-1})} \frac{dz}{z} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(1 + cz)(z + c)}{(1 + az)(z + a)} \frac{dz}{z} \\ &= \left[ \frac{(1 - ac)(c - a)}{(1 - a^2)(-a)} + \frac{c}{a} \right] \\ &= \frac{-(1 - ac)(c - a) + c(1 - a^2)}{a(1 - a^2)} \\ &= \frac{1 + c^2 - 2ac}{1 - a^2} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \begin{pmatrix} -a & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} v(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) \end{aligned}$$

(c) Låt

$$Ex(t)x^T(t) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Pi = A\Pi A^T + N R_1 N^T, \quad R_1 = 1, \text{ ger}$$

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow p_{11} = \frac{1 + c^2 - 2ac}{1 - a^2}, \quad p_{12} = 1, \quad p_{22} = 1$$

$$V = C\Pi C^T = p_{11} = \frac{1 + c^2 - 2ac}{1 - a^2}$$

(d)  $h_i = (c - a)(-a)^{i-1}$   $i \geq 1$ ,  $h_0 = 1 \Rightarrow$

$$V = \sum_{k=0}^{\infty} h_k^2 = 1 + \frac{(c - a)^2}{1 - a^2} = \frac{1 + c^2 - 2ac}{1 - a^2}$$

### 5.2

$\bar{\Phi}(\omega)$  jämn funktion. Gör uppdelning  $\bar{\Phi}(\omega) = \psi(i\omega)\psi(-i\omega)\bar{\Phi}_u$  där  $\psi(s)$  har poler och nollställen i VHP och  $\bar{\Phi}_u = \frac{1}{2\pi}$  (vitt brus).

(a)

$$\bar{\Phi}(\omega) = \frac{a^2}{\omega^2 + a^2} \bar{\Phi}_u = \frac{a}{i\omega + |a|} \cdot \frac{a}{-i\omega + |a|} \bar{\Phi}_u \Rightarrow \psi(i\omega) = \frac{a}{i\omega + |a|}$$

Det linjära filtret blir alltså

$$\psi^i(s) = \frac{a}{s + |a|}, \quad a \neq 0.$$

(b) På samma sätt fås

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(\omega) &= \frac{a^2 b^2}{(\omega^2 + a^2)(\omega^2 + b^2)} \bar{\Phi}_u = \frac{ab}{(i\omega + |a|)(i\omega + |b|)} \cdot \frac{ab}{(-i\omega + |a|)(-i\omega + |b|)} \bar{\Phi}_u \\ &\Rightarrow \psi^i(s) = \frac{ab}{(s + |a|)(s + |b|)} \end{aligned}$$

### 5.3

- (a) Ansätt 1:a ordningens diskret filter  $H(q) = \frac{q+b}{q+a} \cos \omega$  ger att både täljare och nämnare av 1:a ordn. Spektiralåtheten ges i tidsdiskreta fallet (med samplingsintervallet normerat till 1) av

$$\begin{aligned} \phi(e^{i\omega}) &= H(e^{i\omega}) \lambda^2 HT(e^{-i\omega}) = \lambda^2 \frac{(e^{i\omega} + b)(e^{-i\omega} + b)}{(e^{i\omega} + a)(e^{-i\omega} + a)} = \\ &= \lambda^2 \frac{1 + b^2 + 2b \cos \omega}{1 + a^2 + 2a \cos \omega} \end{aligned}$$

Identifiering med det givna uttrycket ger att  $b=0.5$ ,  $a=0.8$  och  $\lambda^2=1$ . Man får alltså den givna spektiralåtheten om ett vitt brus med intensitet (varians) 1 filtreras genom system med överföringsfunktion (impulsvar)

$$H(q) = \frac{q + 0.5}{q + 0.8}$$

- (b) Här har täljaren ordning noll, medan nämnaren har ordning 2 ( $\cos 2\omega$  ledande term). Ansätt först  $H(q) = \frac{1}{q^2 + c_1 q + c_2}$ . Detta leder till

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 + a^2 + b^2) + 2a(1 + b) \cos(\omega) + 2b \cos(2\omega)} &\equiv \frac{1}{\lambda^2} \\ \frac{1}{(1 + c_1^2 + c_2^2) + 2c_1(1 + c_2) \cos(\omega) + 2c_2 \cos(2\omega)} & \end{aligned}$$

Den här identitet skall lösas med avseende på de obekanta  $c_1, c_2, \lambda^2$ .

Identiteten leder till följande ekvationssystem

$$\begin{aligned} \frac{2c_2}{2c_1(1 + c_2)} &= \frac{2b}{2a(1 + b)} \\ \frac{1 + c_1^2 + c_2^2}{1 + c_1^2 + c_2^2} &= \frac{1 + a^2 + b^2}{1 + a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Det står direkt klart att en lösning ges av

$$c_1 = a, \quad c_2 = b, \quad \lambda^2$$

Denna lösning är den sökta precis om polynomiet  $z^2 + c_1 z + c_2$  är stabilt. Så är fallet när  $b < 1$ .

Om i stället  $b > 1$ , så är det en annan lösning till ekvationssystemet som är den giltiga, nämligen

$$c_1 = a/b, \quad c_2 = 1/b, \quad \lambda^2 = 1/b^2$$

Man kan alltså alltid hitta ett stabilt filter som ger den önskade spektiralåtheten.

- (c)  $\Phi_w(\omega)$  är ej positiv och kan inte vara ett spektrum.

### 5.4

Eftersom spektrum bara innehåller förstgradstermer av  $\cos(\omega)$ , ansätt ett första ordningens filter för spektralfaktorn:

$$H(q) = \frac{q + c}{q + a}, \quad |a| < 1, \quad |c| < 1$$

De obekanta parametrarna (dvs,  $a, c, \lambda^2$ ) skall sedan bestämmas från identiteten

$$\frac{10 - 6 \cos(\omega)}{1.25 - \cos(\omega)} \equiv \frac{e^{i\omega} + c e^{-i\omega} + c \lambda^2}{e^{i\omega} + a e^{-i\omega} + a}$$

Högerledet kan skrivas som

$$\frac{1 + c^2 + 2c \cos(\omega) \lambda^2}{1 + a^2 + 2a \cos(\omega)}$$

Identiteten leder till följande samband:

$$\begin{aligned} \frac{2a}{1 + a^2} = \frac{-1}{1.25} &\implies a^2 + a + 2.5a \implies a = -0.5 \quad (a = -2 \text{ är en falsk lösning}) \\ \frac{2c}{1 + c^2} = \frac{-6}{10} &\implies c^2 + c + \frac{10}{3} c \implies c = -1/3 \quad (c = -3 \text{ är en falsk lösning}) \end{aligned}$$

Nämnarna räkar bli identiska. Därför får man

$$\lambda^2 = \frac{10}{1 + c^2} = 9$$

### 5.5

Inför tillstånd  $x_1 = y, x_2 = \dot{y} \implies$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} f(t) = Ax(t) + Bf(t)$$

$$y(t) = (1 \ 0)x(t) = Cx(t)$$

Sampling med 10 Hz ( $T = 0.1$  s) ger

$$x(t+T) = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0.005/m \\ 0.1/m \end{pmatrix} f(t) = Fx(t) + Gf(t)$$

$$y(t) = (1 \ 0)x(t) = Hx(t)$$

$$y(t) = H(qI - F)^{-1}Gf(t) = (1 \ 0) \begin{pmatrix} q - 1 & -0.1 \\ 0 & q - 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.005/m \\ 0.1/m \end{pmatrix} f(t) =$$



$$= -\frac{0.005}{m} \frac{q+1}{(q-1)^2} f(t) = \frac{0.005}{m} \cdot \frac{q^{-1}(1+q^{-1})}{(1-q^{-1})^2} f(t)$$

eller på differenskvationsform

$$y(t) - 2y(t-T) + y(t-2T) = \frac{0.005}{m} (f(t-T) + f(t-2T))$$

(a) Vindkast vid tiden  $\tau \Rightarrow$  Låt  $f(t) = f \cdot \delta_\tau(t)$  i formerna ovan.

(b) Låt  $(1-0.9q^{-1})z(t) = w(t)$  där  $w(t)$  är vitt brus.

$$f(t) = z(t) = \frac{1}{1-0.9q^{-1}} w(t)$$

$$y(t) = \frac{0.005}{m} \cdot \frac{q^{-1}(1+q^{-1})}{(1-q^{-1})^2} \cdot \frac{1}{1-0.9q^{-1}} w(t) \\ = \frac{0.005}{m} \frac{q^{-1}(1+q^{-1})}{1-2.9q^{-1}+2.8q^{-2}-0.9q^{-3}} w(t)$$

Differenskvationen blir

$$y(t) - 2.9y(t-T) + 2.8y(t-2T) - 0.9y(t-3T) \\ = \frac{0.005}{m} (w(t-T) + w(t-2T))$$

eller på tillståndsform (Obs/Ett nytt tillstånd måste införas)

$$x(t+T) = \begin{pmatrix} x_1(t+T) \\ x_2(t+T) \\ z(t+T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 & \frac{0.005}{m} \\ 0 & 1 & \frac{q^{-1}}{m} \\ 0 & 0 & 0.9 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} w(t+T)$$

## 5.6

(a) Kraftlagen ger  $m\ddot{z} = u - f$ , där  $m$  är missilens massa och  $u$  dragkraften.

Signal/utsignal-form:

$$\ddot{z} + \frac{k_1}{m} \dot{z} = \frac{1}{m} (u - v)$$

Tillståndsbeskrivning: Låt  $x_1 = z$ ,  $x_2 = \dot{z} \Rightarrow \dot{x}_1 = x_2$ ,

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m} (u - f) = \frac{1}{m} (u - k_1 x_2 - v)$$

Det vill säga

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k_1}{m} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{m} \end{pmatrix} v$$

$$z = (1 \ 0) x$$

(b) Beskrivning av  $v$ :

$$\Phi_v(\omega) = |H(i\omega)|^2 \Phi_e(\omega)$$

Således  $H(s) = \frac{\sqrt{k_0}}{s+a}$ , det vill säga,  $\dot{x} + ax = \sqrt{k_0} e$ . Inför ett extra tillstånd  $x_3 = v$  vilket ger en ny tillståndsbeskrivning med  $\dot{x}_3 = -|a|x_3 + e$ :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{k_1}{m} & -\frac{1}{m} \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{k_0} \end{pmatrix} e$$

$$z = (1 \ 0 \ 0) x$$

Insignal-utsignal-formen ges av

$$(p^2 + \frac{k_1 p}{m}) z = \frac{1}{m} \left( u - \frac{\sqrt{k_0}}{p+a} e \right)$$

## 5.8

(a) Med  $\{A, B, C, N\}$  som i uppgift 5.7(a) får vi standardformen

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Ne \\ y = Cx + n \end{cases}$$

där  $n$  har spektralitet,  $\Phi_n = 0.1$ .

(b) En brusignal med spektralitet,  $\Phi_n$ , kan erhållas som utsignal från ett system med överföringsfunktion

$$G_n(s) = \frac{s}{s+b}$$

där insignalen är vitt brus med spektralitet  $\Phi_{w_n} = 0.1$ . På tillståndsform kan detta skrivas

$$\begin{cases} \dot{x}_4 = -bx_4 + bw_n \\ n = -x_4 + w_n \end{cases}$$

Vi får följande utökade tillståndsmodell

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ w_n \end{pmatrix} \\ y = (C \ -1) x + w_n$$

(c) På samma sätt som i (b) gör vi en tillståndsmodell med överföringsfunktion  $G_n(s) = 1/(s+b)$  av brusignalen. Insignalen är vitt brus med spektralitet  $\Phi_{w_n} = 0.1$ . På tillståndsform fås

$$\dot{x}_4 + bx_4 = w_n.$$

Vi får följande utökade tillståndsmodell

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ w_n \end{pmatrix} \\ y = (C \ 1) x$$

5.9

Dead-beat observatör  $\Rightarrow$  välj  $K$  så att egenvärdena till matrisen  $F - KH$  placeras i origo.

$$F = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad KH = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ k_2 & 0 \end{pmatrix}$$

ger

$$\det(qI - F + KH) = \det \begin{pmatrix} q - 1 + k_1 & -T \\ k_2 & q - 1 \end{pmatrix} = q^2 + (k_1 - 2)q + 1 - k_1 + Tk_2 = 0$$

Matrisens egenvärden placeras i origo med  $k_1 = 2$  och  $k_2 = \frac{1}{T}$ .

Svar:  $k_1 = 2$   $k_2 = 1/T$

5.10

$$x_1(t+1) = x_1(t) + x_2(t) + 0.5$$

ger

$$x_2(-1) = y(0) - y(-1) = 0.5$$

$$x_2(0) = x_2(-1) + v(-1) + 1$$

$$E\hat{x}(0) = \begin{pmatrix} y(0) \\ y(0) - y(-1) + 0.5 \end{pmatrix} = \hat{x}(0)$$

$$\text{Cov } x(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} = P(0) \quad \sigma = 0.1$$

$$\hat{x}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3 \hat{x}(0) + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{x}(0) + \begin{pmatrix} 4.5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \hat{y}(3) &= 4y(0) - 3y(-1) + 6 \\ P(3) &= \phi P(2)\phi^T + R = \phi(\phi P(1)\phi^T + R)\phi^T + R = \\ &= \phi^3 P(0)\phi^{T3} + \phi^2 R\phi^{T2} + \phi R\phi^T + R \end{aligned}$$

där

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

ger

$$P(3) = \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

vilket ger skattningsvariansen  $14 \cdot 0.01 = 0.14$

5.11

Systemet beskrivs av

$$z(t) = az(t-1) + v(t)$$

och mätsignalen är

$$y(t) = z(t) + e(t)$$

$z(t)$  skattas med

$$\hat{z}(t) = k\hat{z}(t-1) + (1-k)y(t)$$

Vi beräknar variansen för

$$\hat{z}(t) = z(t) - \hat{z}(t)$$

$$z(t) = \frac{1}{1-aq^{-1}}v(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{1-aq^{-1}}v(t) + e(t) \quad \hat{z}(t) = \frac{1-k}{1-kq^{-1}}y(t)$$

ger

$$\begin{aligned} z(t) - \hat{z}(t) &= \frac{1}{1-aq^{-1}}v(t) - \frac{1-k}{1-kq^{-1}}\left(\frac{1}{1-aq^{-1}}v(t) + e(t)\right) = \\ &= \left(1 - \frac{1-k}{1-kq^{-1}}\right)\frac{1}{1-aq^{-1}}v(t) - \frac{1-k}{1-kq^{-1}}e(t) = \\ &= \frac{k(1-q^{-1})}{1-kq^{-1}}\frac{1}{1-aq^{-1}}v(t) - \frac{1-k}{1-kq^{-1}}e(t) \end{aligned}$$

Eftersom  $e(t)$  och  $v(t)$  är oberoende gäller att

$$E\hat{z}^2 = k^2 E\hat{z}_1^2 + (1-k)^2 E\hat{z}_2^2$$

$$\hat{z}_1 = \frac{(1-q^{-1})}{(1-kq^{-1})(1-aq^{-1})}v(t)$$

$$\hat{z}_2 = \frac{1}{1-kq^{-1}}e(t)$$

Variansen för  $\hat{z}_2(t)$  är lätt att beräkna, eftersom processen kan skrivas på tillståndsform som

$$\hat{z}_2(t+1) = k\hat{z}_2(t) + (1-k)e(t+1)$$

Lyapunovekvationen för att bestämma  $P = E\hat{z}_2^2(t)$  blir

$$P = k^2 P + (1-k)^2$$

och har lösningen

$$P = \frac{(1-k)^2}{1-k^2} = \frac{1-k}{1+k}$$

Variansen för  $\tilde{x}_1(t)$  beräknas lättast med residuekalkyl:

$$\begin{aligned} E_{\tilde{x}_1}^2(t)/k^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1 - e^{i\omega t}}{(1 - ke^{i\omega})(1 - ae^{i\omega})} \right|^2 d\omega \quad |z = e^{i\omega}| \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1 - z^{-1}}{(1 - kz)(1 - az)(1 - kz^{-1})(1 - az^{-1})} \frac{dz}{z} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1 - z^{-1}}{(1 - kz)(1 - az)(z - k)(z - a)} dz \\ &\quad / \text{residuer i } z = k \text{ och } z = a/ \\ &= \frac{(1 - k)(k - 1)}{(1 - k^2)(1 - ak)(k - a)} + \frac{(1 - a)(a - 1)}{(1 - ak)(1 - a^2)(a - k)} \\ &= \frac{1}{(1 - ak)(k - a)(1 + k)(1 + a)} [(1 + a)(k - 1) - (k + 1)(a - 1)] \\ &= \frac{2(k - a)}{(k - a)(1 - ak)(1 + k)(1 + a)} = \frac{2}{(1 - ak)(1 + k)(1 + a)} \end{aligned}$$

Tillsammans ger detta

$$E_{\tilde{x}^2} = \frac{2k^2}{(1 - ak)(1 + k)(1 + a)} + \frac{1 - k}{1 + k}$$

## 5.12

Skattningsfelet  $\tilde{x}_2(t)$  satisfierar differensekvationen

$$\tilde{x}_2(t + 1) = (0.9 - 0.2K)\tilde{x}_2(t)$$

För att skattningsfelet skall bli noll på ändligt antal steg måste observatörens pol placeras i origo, d v s  $K$  måste väljas så

$$0.9 - 0.2K = 0$$

Svar:  $K = 4.5$ .

## 5.13

(a) Sätt  $x_1 =$  accelerationen och  $x_2 =$  hastigheten. Detta ger tillståndsekvationerna

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(b) \quad \dot{x} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \right\} \tilde{x} + \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} y$$

$K$ -matrisen bestäms ur stationära Riccati-ekvationen.

## 5.14

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v$$

där  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$ . Kalmanfilter

$$\dot{\hat{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \hat{x} + \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} (y - C\hat{x})$$

där  $C = (1 \ 0)$  (Fall I) eller  $C = (0 \ 1)$  (Fall II)

$$K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

ges av  $PC^T$  och  $P$  av

$$AP + PA^T + R_1 - PC^T C P = 0;$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fall I:

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

som leder till ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 0 &= 2p_{12} - p_{11}^2 \\ 0 &= p_{22} - p_{11} - p_{11}p_{12} \\ 0 &= -2p_{12} + 1 - p_{12}^2 \end{aligned}$$

som i sin tur leder till

$$\begin{aligned} p_{12} &= -1 + \sqrt{2} \approx 0.414 \\ p_{11} &= \sqrt{2}p_{12} = \sqrt{-2 + 2\sqrt{2}} \approx 0.910 \\ p_{22} &= p_{11}(1 + p_{12}) = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \approx 1.287 \end{aligned}$$

Således gäller i detta fall

$$P = \begin{pmatrix} 0.910 & 0.414 \\ 0.414 & 1.287 \end{pmatrix}$$

Fall II:

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

som leder till ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 0 &= 2p_{12} - p_{12}^2 \\ 0 &= p_{22} - p_{11} - p_{12}p_{22} \\ 0 &= -2p_{12} + 1 - p_{22}^2 \end{aligned}$$

som i sin tur leder till

$$\begin{aligned} p_{12} &= 0 \\ p_{22} &= 1 \\ p_{11} &= 1 \end{aligned}$$

Sålledes gäller i detta fall

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$x$  mäts noggrannare i fall I,  $\hat{x}$  mäts noggrannare i fall II.

## 5.15

Inför tillståndsvariabler enligt

$$x(t) = \begin{pmatrix} \Theta(t) \\ \hat{\Theta}(t) \end{pmatrix}$$

och sätt  $\alpha = B/J$ ;  $H = k/J$ ;  $\gamma = \frac{1}{J}$ . Systemets tillståndsform blir då

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ H \end{pmatrix} \mu(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \end{pmatrix} \tau_d(t)$$

$$y(t) = (1 \ 0)x(t) + \epsilon_m(t)$$

Riccatiekvationen för Kalmanfiltret är

$$\dot{P}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} P(t) + P(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix} + R_1 - P(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} R_2^{-1} (1 \ 0) P(t)$$

där

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{eq}^2 \end{pmatrix}, \quad R_2 = v_m$$

I stationärt tillstånd, d v s ( $\dot{P} \equiv 0$ ), blir ekvationerna för komponenterna

$$\begin{aligned} 2p_{12}(t) - \frac{p_{11}^2(t)}{v_m} &= 0 \\ p_{22}(t) - \alpha p_{12}(t) - \frac{p_{11}(t)p_{12}(t)}{v_m} &= 0 \\ -2\alpha p_{22}(t) + \gamma^2 v_d - \frac{p_{12}^2(t)}{v_m} &= 0 \end{aligned}$$

Om vi eliminerar  $p_{12}$  och  $p_{22}$  ger detta

$$\frac{p_{11}^4}{4v_m^3} + \frac{\alpha p_{11}^3}{v_m^2} + \frac{\alpha^2 p_{11}^2}{v_m} - \gamma^2 v_d = 0$$

Vi inför nu

$$p_{11} = v_m \cdot p'_{11}$$

vilket ger

$$p_{11}^4 + 4\alpha v_m^3 p'_{11} + 4\alpha^2 v_m^2 p'^2_{11} - 4\gamma^2 v_d \frac{v_m}{v_m} = 0$$

$$(p'^2_{11} + 2\alpha v_m p'_{11})^2 - 4\gamma^2 v_d \frac{v_m}{v_m} = 0$$

$$p'^2_{11} + 2\alpha v_m p'_{11} - 2\gamma \sqrt{\frac{v_d}{v_m}} = 0$$

Vi sätter nu  $\beta = \gamma \sqrt{\frac{v_d}{v_m}}$  vilket ger

$$p'_{11} = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 2\beta}$$

Hela lösningen blir

$$P = v_m \begin{pmatrix} -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 2\beta} & \alpha^2 + \beta - \alpha\sqrt{\alpha^2 + 2\beta} \\ \alpha^2 + \beta - \alpha\sqrt{\alpha^2 + 2\beta} & -\alpha^3 - 2\alpha\beta + (\alpha^2 + \beta)\sqrt{\alpha^2 + 2\beta} \end{pmatrix}$$

Den stationära Kalmanfilterförstärkningen blir

$$K = \begin{pmatrix} -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 2\beta} \\ \alpha^2 + \beta - \alpha\sqrt{\alpha^2 + 2\beta} \end{pmatrix}$$

och om man sätter in numeriska värden fås

$$K = \begin{pmatrix} 40.36 \\ 814.3 \end{pmatrix}$$

och kovariansmatrisen för felet

$$P = \begin{pmatrix} 40.36 \cdot 10^{-7} & 814.3 \cdot 10^{-7} \\ 814.3 \cdot 10^{-7} & 366.1 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}$$

Filtret för estimering av  $\Theta$  blir alltså

$$\dot{\hat{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} \hat{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ H \end{pmatrix} \mu(t) + K(y - (1 \ 0)\hat{x})$$

med  $K$  enligt ovan.

### 5.16

- (a) Förutsättningarna för Kalmanfiltret finns med  $F = 1$  och  $H = R_1 = R_2 = 1$ . Minimal varians fås då  $t \rightarrow \infty$ . Variansen ges då av

$$\bar{P} = F \bar{P} F^T + R_1 - F \bar{P} H^T (H \bar{P} H^T + R_2)^{-1} H \bar{P} F^T.$$

$$\bar{K} = F \bar{P} H^T (H \bar{P} H^T + R_2)^{-1}.$$

$\bar{P}$  anger variansen för skattningsfelet, och är alltså lösningen till Riccati-ekvationen

$$\bar{P} = \bar{P} + 1 - \frac{\bar{P}^2}{\bar{P} + 1}$$

som kan förenklas till  $\bar{P}^2 - \bar{P} + 1 = 0$ . Den positiva lösningen är  $\bar{P} = [1 + \sqrt{5}]/2$ . Motsvarande Kalmanförstärkning är

$$\bar{K} = \frac{\bar{P}^2}{\bar{P} + 1} = \dots = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.618$$

- (b) Skattningsfelet  $\hat{x}(t) = x(t) - \bar{x}(t)$  satisfierar differensekvationen

$$\bar{x}(t+1) = (1-K)\bar{x}(t) + v(t) - Ke(t)$$

Variansen för  $\bar{x}(t)$ , säg  $P = P(K)$ , är lösningen till Lyapunovekvationen

$$P = (1-K)^2 P + 1 + K^2$$

Ekvationen har lösningen

$$P(K) = \frac{1 + K^2}{K(2 - K)}$$

som är giltig när systemet är stabilt. Så är fallet när  $0 < K < 2$ . För att hitta minimum av  $P(K)$ , sätt  $P'(K) = 0$  vilket leder till

$$2K(2K - K^2) - (1 + K^2)(2 - 2K) = 0$$

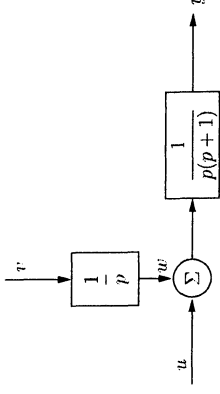
Denna ekvation har lösningen (inom det tillåtna intervallet)

$$K^* = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

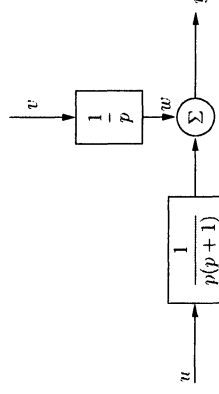
Minimivärdet är  $P(K^*) = [1 + \sqrt{5}]/2$ . Precis som väntat, är detta samma lösning som i del (a).

### 5.17

- i)



- ii)



$v(t)$  enhetsstörning

- (a) i)

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_A x + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_B u + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_C v$$

$$y = \underbrace{(1 \ 0 \ 0)}_C x.$$

- ii)

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_A x + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_B u + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_C v$$

$$y = \underbrace{(1 \ 0 \ 1)}_C x.$$

- (b) i) Offsetspänning på ingång till motorn, stegstörning i lasten  
ii) mätstörning - fel på vinkelägesgivaren

(b) Vindens inverkan på gvingen kan skrivas som vitt brus  $\epsilon(t)$  med intensitet 1 filtrerat genom ett linjärt system med överföringsfunktion

$$H(s) = \frac{\sqrt{2/\alpha}}{1 + s/\alpha}$$

niha spektralfaktorisering. Vi får  $y = G(s)H(s)\epsilon$  där

$$G(s)H(s) = \frac{K\sqrt{2\alpha}}{(\alpha + s)(s^2 + s + 1)} = \frac{K\sqrt{2\alpha}}{s^3 + (1 + \alpha)s^2 + (1 + \alpha)s + \alpha}$$

För att bestämma variansen för  $y$  skriver vi systemet på tillståndsform som

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -(\alpha+1) & -(\alpha+1) & -\alpha \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} v$$

$$y = (0 \ 0 \ K\sqrt{2\alpha}) x$$

Lyapunovekvationen blir

$$0 = \begin{pmatrix} -(\alpha+1) & -(\alpha+1) & -\alpha \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(\alpha+1) & 1 & 0 \\ -(\alpha+1) & 0 & 1 \\ -\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Detta är ekvivalent med ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 0 &= -2(\alpha+1)p_{11} - 2(\alpha+1)p_{12} - 2\alpha p_{13} + 1 \\ 0 &= -(\alpha+1)p_{12} - (\alpha+1)p_{22} - \alpha p_{23} + p_{11} \\ 0 &= -(\alpha+1)p_{13} - (\alpha+1)p_{23} - \alpha p_{33} + p_{12} \\ 0 &= 2p_{12} \\ 0 &= p_{13} + p_{22} \\ 0 &= 2p_{23} \end{aligned}$$

Detta leder till

$$p_{12} = 0, \quad p_{13} = -p_{22}, \quad p_{23} = 0$$

och

$$\begin{aligned} 0 &= -2(\alpha+1)p_{11} + 2\alpha p_{22} + 1 \\ 0 &= -(\alpha+1)p_{22} + p_{11} \\ 0 &= (\alpha+1)p_{22} - \alpha p_{33} \end{aligned}$$

(c) i)  $S = (BAB^T A^2 B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  ej full rang

ii)  $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  ej full rang

I i) kan  $x_3$  göras icke observerbar genom att välja  $u = -Lx$  med  $\xi_3 = 1$ . Detta går ej i ii)

### 5.18

Brussignalen  $v(t)$  kan betraktas som utsignalen från ett linjärt filter matat med vitt brus  $v(t)$ . Detta filter kan konstrueras genom att vi observerar följande:

$$\Phi_w(\omega) = \frac{1}{1.25 - \cos(\omega)} = \frac{1}{0.5 - e^{i\omega}} \cdot \frac{1}{0.5 - e^{-i\omega}}$$

Enligt spektralfaktoriseringssatsen motsvaras detta av

$$\Phi_w(\omega) = H(e^{i\omega})H(e^{-i\omega}).$$

Identifiering ger  $H(e^{i\omega}) = \frac{1}{0.5 - e^{i\omega}}$  alternativt  $H(q) = \frac{1}{0.5 - q}$ .

På differensekvationsform fås  $w(t+1) = 0.5w(t) - v(t)$ .

Inför ett nytt tillstånd  $x_3 = w$  och sätt  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ . På gemensam tillståndsform fås nu

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} 0.8 & 1 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v(t)$$

$$y(t) = (1 \ 0 \ 0) x(t)$$

### 5.19

(a) Vindens spektrum är av lågpässkaraktär med gränshöjden  $\alpha$ . Då  $\alpha$  ökar så blir  $v(t)$  mer och mer likt vitt brus, dvs vindens byghet tilltar. Detta kan också inses genom att studera kovariansfunktionen

$$R_v(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_v(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = e^{-\alpha|\tau|}, \quad \alpha > 0.$$

Kovariansfunktionen blir "spetsigare" då  $\alpha$  ökar, dvs korrelationen mellan närliggande värden i  $v(t)$  minskar och bygheten ökar.

Svar: Bygheten ökar då  $\alpha$  ökar.

Detta leder i sin tur till

$$\begin{aligned} 0 &= -2(\alpha + 1)^2 p_{22} + 2\alpha p_{22} + 1 \\ p_{22} &= \frac{1}{2\alpha^2 + 4\alpha + 2 - 2\alpha} = \frac{1}{2(1 + \alpha + \alpha^2)} \\ p_{33} &= \frac{\alpha + 1}{2\alpha(1 + \alpha + \alpha^2)} \end{aligned}$$

och slutligen

$$E y^2(t) = [K\sqrt{2\alpha}]^2 p_{33} = \frac{K^2(1 + \alpha)}{1 + \alpha + \alpha^2}$$

Svar: Kravet kan formuleras som  $\frac{K^2(1+\alpha)}{1+\alpha+\alpha^2} > 1$ .

### 5.20

(a)

$$\begin{aligned} A &= 0.8 & B &= 0 & N &= 1 \\ C &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & D &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & v_2 &= \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \\ R_1 &= 1 & R_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & R_{12} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Prediktionsfelets varians:

$$\begin{aligned} P &= E\{(x(k) - \hat{x}(k|k-1))^2\} \\ &= APA^T + NR_1N^T - (APC^T)(CPC^T + R_2)^{-1}(APC^T)^T \\ &\Rightarrow P = 1.281 \end{aligned}$$

Skattningsfelets varians

$$\begin{aligned} \hat{P} &= E\{(x(k) - \hat{x}(k|k))^2\} \\ &= (I - \hat{K}C)P(I - \hat{K}C)^T + \hat{K}R_2\hat{K}^T \\ \hat{K} &= PC^T(CPC^T + R_2)^{-1} = (0.438 \quad 0.2192) \\ &\Rightarrow \hat{P} = 0.4384 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \hat{x}(k|k) &= \hat{x}(k|k-1) + \hat{K}v(k) \\ &= (I - \hat{K}C)\hat{x}(k|k-1) + \hat{K}y(k) \\ \hat{x}(k|k-1) &= A\hat{x}(k-1|k-1) + Bv(k) + \hat{v}_1(k-1|k-1) \\ \hat{v}_1(k-1|k-1) &= NR_{12}(\dots) = 0 \\ &\Rightarrow \hat{x}(k|k) = \underbrace{(I - \hat{K}C)A}_{\mu} \hat{x}(k-1|k-1) + \hat{K}y(k) \end{aligned}$$

Z-transformering  $\hat{X}(z) = \mathcal{Z}\{\hat{x}(k|k)\}$  ger

$$\begin{aligned} (1 - \mu z^{-1})\hat{X}(z) &= \hat{K}Y(z) \\ \Rightarrow \hat{X}(z) &= \frac{1}{1 - \mu z^{-1}} \underbrace{\hat{K}Y(z)}_{G_1(z)} = \frac{0.438}{1 - 0.274z^{-1}} Y_1(z) + \underbrace{\frac{0.219}{1 - 0.274z^{-1}} Y_2(z)}_{G_2(z)} \end{aligned}$$

(c) Låt

$$\begin{cases} x_1(k) = x(k) \\ x_2(k) = x(k-1) \\ x_3(k) = x(k-2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v(k)$$

$$y(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} w_1(k) \\ w_2(k) \end{bmatrix}$$

(d)

$$\mathcal{O}(A, C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.64 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Till exempel är rad 1, 2 och 4 i  $\mathcal{O}(A, C)$  linjärt oberoende, vilket ger full rang (=3). Alltså är systemet observerbart.

### 5.21

(a)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} v(k) \\ y(k) &= (1 \quad 0) \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + w(k) \end{aligned}$$

(b)  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 1$  och  $R_{12} = 0$ .

$$P = APA^T + NR_1N^T - (APC^T + NR_{12})(CPC^T + R_2)^{-1}(APC^T + NR_{12})^T$$

eller i explicit form

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times 1 \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &- \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{p_{11}+1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_{11} = a^2 p_{22} + 1 - \frac{a^2 p_{12}^2}{1 + p_{11}} \\ p_{12} = 1 \\ p_{22} = 1 \end{cases}$$

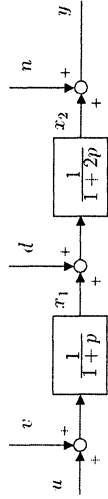
Sätt

$$\mu = \frac{a^2}{2} \Rightarrow p_{11} = \mu + \sqrt{1 + \mu^2}$$

$$\tilde{K} = PC^T(CPC^T + R_2)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-\mu + \sqrt{1 + \mu^2}}{1 + \mu + \sqrt{1 + \mu^2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 + \mu + \sqrt{1 + \mu^2}} \end{pmatrix}$$

### 5.22

Inför tillstånden  $x_1$  och  $x_2$  enligt figuren.



(a)

$$x_1 = \frac{1}{1+p}(u+v) \Leftrightarrow \dot{x}_1 = -x_1 + u + v$$

Spektralfaktorisering ger

$$\Phi_d = \frac{1}{1+s^2} \Leftrightarrow d(t) = \frac{1}{1+p}e(t), \quad e \text{ vitt brus med } \Phi_e = 1.$$

$$d = x_3 \Rightarrow \dot{x}_3 = -x_3 + e$$

$$x_2 = \frac{1}{1+2p}(x_1 + d) \Rightarrow x_2 + 2\dot{x}_2 = x_1 + x_3$$

Vi får

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ e \end{pmatrix}$$

$$y = (0 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + n$$

där  $(v \ e)^T$  har intensiteten

$$\begin{pmatrix} \Phi_v & 0 \\ 0 & \Phi_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Spektralfaktorisering ger

$$n(t) = \frac{p+2}{p+3}v_2(t)$$

$v_2$  vitt brus med  $\Phi_{v_2} = 1$

$$n = \frac{p+3}{p+3}v_2 - \underbrace{\frac{1}{p+3}v_2}_{x_4} = v_2 - x_4$$

Vi får  $\dot{x}_4 = -3x_4 + v_2$  och

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ c \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$y = (0 \ 1 \ 0 \ -1)x + v_2$$

(c)  $v$ ,  $n$  och  $d$  oberoende  $\Rightarrow v$   $c$  och  $v_2$  oberoende

$$\Rightarrow R_{11} = \begin{pmatrix} \Phi_v & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_c & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{v_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{12} = \begin{pmatrix} \Phi_{nv_2} \\ \Phi_{ev_2} \\ \Phi_{v_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$R_2 = \Phi_{v_2} = 1$$

### 5.23

a) The observer can be written as

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1(p) \\ \dot{z}_2(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+k_1 & -1 \\ k_2 & p \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{p^2 + pk_1 + k_2} \begin{pmatrix} p & 1 \\ -k_2 & p+k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{p^2 + pk_1 + k_2} \begin{pmatrix} pk_1 + k_2 \\ pk_2 \end{pmatrix}$$

Hence

$$G_1(i\omega) - 1 = \frac{-p^2}{p^2 + pk_1 + k_2}|_{p=i\omega} = O(\omega^2)$$



and

$$G_2(i\omega) - i\omega = \frac{-p^3 - p^2 k_1}{p^2 + p k_1 + k_2} \Big|_{p=i\omega} = O(\omega^2)$$

b) The Riccati equation gives

$$0 = AP + PA^T + \gamma^4 NN^T - PCC^T P$$

or

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma^4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{11} & p_{12} \end{pmatrix}$$

which leads to the equations

$$\begin{aligned} 0 &= 2p_{12} - p_{11}^2 \\ 0 &= p_{22} - p_{11}p_{12} \\ 0 &= \gamma^4 - p_{12}^2 \end{aligned}$$

As  $p_{11}$  must be positive, the solution is

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\gamma & \gamma^2 \\ \gamma^2 & \sqrt{2}\gamma^3 \end{pmatrix}$$

The Kalman gain becomes

$$K = PC^T = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\gamma \\ \gamma^2 \end{pmatrix}$$

c) The bandwidth  $\omega$  is to be determined from the relation

$$\left| \frac{i\omega k_1 + k_2}{-\omega^2 + i\omega k_1 + k_2} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

This leads to

$$2(\omega^2 k_1^2 + k_2^2) = (-\omega^2 + k_2)^2 + \omega^2 k_1^2$$

and then

$$\begin{aligned} \omega^2 k_1^2 &= \omega^4 - 2\omega^2 k_2 + k_2^2 \\ 0 &= \omega^4 - 4\omega^2 \gamma^2 - \gamma^4 \\ \omega^2 &= \gamma^2(2 + \sqrt{5}) \\ \omega &= \gamma\sqrt{2 + \sqrt{5}} \approx 2.06\gamma \end{aligned}$$

## 5.24

To treat the general case, let the measurement noise have intensity  $r_2$ . The estimation error  $\hat{x}$  satisfies

$$\dot{\hat{x}} = (-1 - K)\hat{x} - Kc + v$$

Applying the Lyapunov equation then gives easily

$$V(K) = \frac{K^2 r_2 + 1}{2(1+K)}$$

(a) Setting  $r_2 = 1$  gives

$$V(K) = \frac{K^2 + 1}{2(1+K)}$$

(b) The minimizing element of  $V(K)$  is found to be  $K^* = -1 + \sqrt{2}$ . Further, the minimal value turns out to be  $V = \sqrt{2} - 1$ .

(c) The associated Riccati equation is

$$0 = -P - P + 1 - P^2 \times 1^2 / r_2$$

which leads to

$$P^2 + 2r_2 P - r_2 = 0$$

with the solution  $P = -r_2 \pm \sqrt{r_2^2 + r_2}$ . As  $r_2 = 1$  in part (c), the positive solution is  $P = \sqrt{2} - 1$ , as  $V$  in part (b).

(d) The variance using the fixed observer gain  $K^*$  for the noise intensity  $r_2 = 1/3$  becomes

$$V = \frac{(K^*)^2/3 + 1}{2(1+K^*)} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3} \approx 0.374$$

(e) The minimal variance of the estimation error, when  $r_2 = 1/3$ , is given by the solution to the Riccati equation

$$0 = -P - P + 1 - P^2/(1/3)$$

which is  $P = 1/3 \approx 0.333$ .

## 5.25

(a) Med  $x_1$  som utsignal från första blocket och  $x_2$  som utsignal från andra blocket får vi:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{1+2p}(u+v) \iff x_1 = \frac{1}{2}(-x_1 + u + v) \\ x_2 &= \frac{1}{1+2p}(x_1 + d) \iff x_2 = \frac{1}{2}(-x_2 + x_1 + d) \end{aligned}$$

Spektralfaktorisering ger:

$$\Phi_d(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 1} \iff d(t) = \frac{1}{p+1} e^{t(t)}$$

där  $v(t)$  är vitt brus med  $\Phi_v(\omega) = 1$ .

Låt  $d = x_3 \implies x_3 = -x_3 + v$ . Vi får tillståndsformen:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \nu \end{pmatrix}$$

$$y = (0 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + n$$

där  $e^T = [v \ \nu]$  har intensiteten

$$\begin{pmatrix} \Phi_v & 0 \\ 0 & \Phi_\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Vi har  $\Phi_n = \frac{(p^2+4)}{(\omega^2+9)}$ . Spektralfaktorisering ger

$$n = \frac{(p+2)}{(p+3)} v_2$$

$$n = \frac{(p+3)}{(p+3)} v_2 - \frac{1}{(p+3)} v_2 = v_2 - x_4 \implies$$

$$x_4 = -3x_4 + v_2$$

där  $v_2$  är vitt brus med  $\Phi_{v_2} = 1$ .

Vi får tillståndsformen:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$+ \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ + & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \nu \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$y = (0 \ 1 \ 0 \ -1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + v_2$$

Vi får  $v_1 = (v \ \nu \ v_2)^T$ .

(c)  $v$ ,  $d$  och  $n$  oberoende  $\implies v$ ,  $\nu$  och  $v_2$  oberoende  $\implies$

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{12} = \begin{pmatrix} \Phi_{v_2} \\ \Phi_{v\nu} \\ \Phi_{v_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \Phi_{v_2} = 1 \implies$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

## 5.26

(a)  $R$  icke-negativt definit är ekvivalent med

$$x^T R x \geq 0, \quad \forall x$$

$$\iff 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\epsilon x_2 x_3 \geq 0, \quad \forall x$$

$$\iff 2x_1^2 + (x_2 + \epsilon x_3)^2 + (1 - \epsilon^2)x_3^2 \geq 0, \quad \forall x$$

$$\iff (1 - \epsilon^2) \geq 0, \quad \iff \epsilon^2 \leq 1$$

(b) Estimeringsfelets varians ges av  $P$  som är lösningen till matrisekvationen (Ekv. (5.72) i kursboken):

$$AP + PA^T - (PC^T + NR_{12})R_2^{-1}(PC^T + NR_{12})^T + NR_1N^T = 0$$

där  $A = -1$ ,  $R_1 = 2$ ,  $N = 1$ ,  $C = (1 \ 1)^T$ ,  $R_{12} = (0 \ 0)^T$  och  $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix}$ .

Vi får:

$$-2P - P(1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon \\ -\epsilon & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{1 - \epsilon^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} P + 2 = 0 \iff$$

$$P^2 + (1 + \epsilon)P = 1 + \epsilon \implies$$

$$P = \frac{1}{2} (\sqrt{\epsilon^2 + 6\epsilon + 5} + 5 - (1 + \epsilon))$$

(c) Kalmanförstärkningen blir

$$K = PC^T R_2^{-1} = P(1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= P(1 \ 1) \frac{1}{1 - \epsilon^2} \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon \\ -\epsilon & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{P}{1 + \epsilon} (1 \ 1)$$

Sätt

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{P}{1+\varepsilon} = \frac{1}{2(1+\varepsilon)} \left[ \sqrt{(1+\varepsilon)(5+\varepsilon)} - (1+\varepsilon) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\frac{5+\varepsilon}{1+\varepsilon}} - 1 \right]\end{aligned}$$

Kalmanfiltret blir

$$\begin{aligned}\hat{x} &= -\hat{x} + \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \hat{x} \right] \\ &= -(1+2\alpha)\hat{x} + \alpha(y_1 + y_2) \\ \hat{x} &= \frac{\alpha}{s+1+2\alpha}(y_1 + y_2)\end{aligned}$$

(d) När  $\varepsilon \rightarrow 1$  gäller enligt (b)

$$\begin{aligned}P &\rightarrow \frac{1}{2} \left[ \sqrt{12} - 2 \right] = \sqrt{3} - 1 \\ \alpha &\rightarrow \frac{\sqrt{3} - 1}{2}\end{aligned}$$

och Kalmanfiltret blir

$$\hat{x} = \frac{(\sqrt{3}-1)/2}{s+\sqrt{3}}(y_1 + y_2)$$

När  $\varepsilon \rightarrow -1$  gäller  $P \rightarrow 0$  och  $\alpha \rightarrow \infty$ . Då urartar Kalmanfiltret till det statistiska sambandet

$$\hat{x} = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

Det gäller

$$\frac{1}{2}(y_1 + y_2) = x + \frac{1}{2}[(v_2)_1 + (v_2)_2]$$

Brusbidraget har variansen

$$E \left[ \frac{1}{2}[(v_2)_1 + (v_2)_2] \right]^2 = \frac{1}{4}(1+1+2\varepsilon) = \frac{1+\varepsilon}{2}$$

I fallet  $\varepsilon \rightarrow -1$  får brusbidraget variansen 0 och

$$\frac{1}{2}(y_1 + y_2) \rightarrow x$$

När  $\varepsilon \rightarrow 1$  får brusbidraget variansen 1 och mätfelet blir lika stort som om bara en givare används.

(e) En givare  $\Rightarrow C = 1$ ,  $R_2 = 1$  och  $R_{12} = 0$ . Vi får:

$$-2P_1 - P_1^2 + 2 = 0 \Rightarrow P_1 = -1 + \sqrt{3}$$

Enligt (d) gäller att vi får lika resultat i gränsfallet  $\varepsilon \rightarrow 1$ . När  $-1 \leq \varepsilon < 1$  får man noggrannare resultat med två givare, ty då gäller

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \left[ \sqrt{\varepsilon^2 + 6\varepsilon + 5} - (1 + \varepsilon) \right] &< \sqrt{3} - 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{\varepsilon^2 + 6\varepsilon + 5} &< 1 + \varepsilon + 2\sqrt{3} - 2 \\ \Leftrightarrow \varepsilon^2 + 6\varepsilon + 5 &< 1 + \varepsilon^2 + 12 - 2\varepsilon + 4\sqrt{3}\varepsilon + 4\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow (8 - 4\sqrt{3})\varepsilon &< (8 - 4\sqrt{3}) \\ \Leftrightarrow \varepsilon &< 1\end{aligned}$$

## 5.27

Spektrum för observationerna kan skrivas

$$\phi_y(\omega) = \left| \frac{e^{i\omega} + 0.5}{e^{i\omega} - 0.8} \right|^2 18 + 125$$

Detta kan skrivas om med spektralfaktorisering till

$$\phi_y(\omega) = \left| \frac{e^{i\omega} + c}{e^{i\omega} - 0.8} \right|^2 \lambda^2$$

vilket motsvarar att  $y(t)$  skrivs som ARMA(1,1) processen

$$y(t) = \frac{q+c}{q-0.8}\varepsilon(t), \quad E\varepsilon^2(t) = \lambda^2$$

Parametrarna  $c$  och  $\lambda^2$  bestäms av spektralfaktorisering:

$$|e^{i\omega} + 0.5|^2 18 + |e^{i\omega} - 0.8|^2 125 = |e^{i\omega} + c|^2 \lambda^2$$

Detta kan lätt skrivas om till ekvationssystemet

$$\begin{aligned}(1 + c^2)\lambda^2 &= 1.25 \times 18 + 1.64 \times 125 \\ c\lambda^2 &= 0.5 \times 18 - 0.8 \times 125\end{aligned}$$

som leder till

$$\frac{c}{1+c^2} = \frac{9-100}{22.5-205} = -0.4 \Rightarrow c = -0.5$$

(lösningen  $c = -2$  väljs bort). Sättes detta in i tidigare samband får man

$$\lambda^2 = 182$$

5.28

(a) Spektrum för  $y(t)$  blir

$$\phi_y(\omega) = \left| \frac{1}{i\omega + a} \right|^2 r = \frac{r}{\omega^2 + a^2}$$

Processens varians kan beräknas som

$$E\{y^2(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r}{\omega^2 + a^2} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r}{a^2(x^2 + 1)} adx = \frac{r}{2\pi a} 2 \arctan(\infty) = \frac{r}{2a}$$

(b) Processen  $y$  kan skrivas på tillstandsform som

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -ax + e \\ y &= x \end{aligned}$$

Motsvarande Lyapunovkvation blir

$$0 = -2aP + r$$

vars lösning är  $P = r/(2a)$ .

5.29

(a) If  $x_1$  and  $x_2$  are independent and Gaussian,

$$x_1 \sim \mathcal{N}(m_1, P_1), \quad x_2 \sim \mathcal{N}(m_2, P_2).$$

Then

$$ax_1 + bx_2 \sim \mathcal{N}(am_1 + bm_2, a^2P_1 + b^2P_2).$$

Applying this to the state equation gives that

$$x(t) \sim \mathcal{N}(m_t, P_t).$$

The mean satisfies the recursion

$$m_{t+1} = am_t, \quad m_0 = m_0.$$

The variance satisfies the recursion

$$P_{t+1} = a^2P_t + \lambda_2, \quad P_0 = P_0.$$

These two recursions are first order dynamic deterministic linear systems. The solutions are

$$\begin{aligned} m_t &= a^{t-t_0} m_{t_0}, \\ P_t &= \begin{cases} a^{2(t-t_0)} P_0 + \frac{1-a^{2(t-t_0)}}{1-a^2} \lambda_2, & (a^2 \neq 1), \\ P_0 + (t-t_0) \lambda_2, & (a^2 = 1). \end{cases} \end{aligned}$$

(b)  $m_t$  and  $P_t$  are convergent  $\iff |a| < 1$ . The limits are

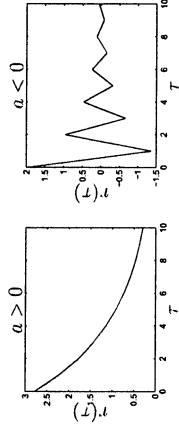
$$m_t \rightarrow 0, \quad P_t \rightarrow \frac{\lambda^2}{1-a^2}.$$

(c) Set  $\tau \geq 0$ . Then

$$\begin{aligned} r_x(\tau) &= E\{x(t+\tau)x(t)\} \\ &= E\{a^\tau x(t) + a^{\tau-1}e(t) + \dots + e(t+\tau-1)\}x(t) \\ &= a^\tau P, \quad P = \frac{\lambda^2}{1-a^2} \end{aligned}$$

For a general  $\tau$  we have

$$r_x(\tau) = a^{|\tau|} \frac{\lambda^2}{1-a^2}$$

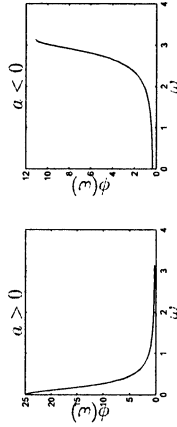


(d) Using the definition we get

$$\begin{aligned} \phi(\omega) &= \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} r_x(\tau) e^{-i\tau\omega} \\ &= \sum_{\tau=-\infty}^0 a^{-\tau} P e^{-i\tau\omega} + \sum_{\tau=0}^{\infty} a^\tau P e^{-i\tau\omega} - P \\ &= P \left[ \frac{1}{1-ae^{i\omega}} + \frac{1}{1-ae^{-i\omega}} - 1 \right] \\ &= \frac{1+a^2-2a\cos\omega}{1+a^2-2a\cos\omega} [1-a^{i\omega} + 1-ae^{-i\omega} - 1 - a^2 + 2a\cos\omega] \\ &= \frac{\lambda^2}{1+a^2-2a\cos\omega}. \end{aligned}$$

An alternative solution is

$$\phi_x(\omega) = \left| \frac{1}{1-ae^{i\omega}} \right|^2 \phi_e(\omega) = \frac{\lambda^2}{1+a^2-2a\cos\omega}$$



The signal is of lowpass character  $\Leftrightarrow a > 0$ .

(e) The general solution to the state equation

$$x(t+1) = ax(t) + \epsilon(t)$$

is

$$x(t) = a^{t-t_0}x(t_0) + \sum_{s=t_0}^{t-1} a^{t-1-s}\epsilon(s)$$

When  $t - t_0 \rightarrow \infty$  this becomes

$$x(t) = \sum_{s=-\infty}^{t-1} a^{t-1-s}\epsilon(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \epsilon(t-1-k)$$

Hence,  $h_k = a^k$ ;  $k \geq 0$ . Further,

$$E x^2(t) = \lambda^2 \sum_{k=0}^{\infty} h_k^2 = \frac{\lambda^2}{1-a^2}.$$

### 5.30

#### Problem 2

(a) The averaged gain per round is

$$m_e = E\epsilon(t) = ap - bq = (a+b)p - b.$$

(b) The averaged gain after  $t$  rounds is

$$E x(t) = t m_e = t(ap - bq).$$

(c)

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, & \text{prob } 1 \\ x(1) &= \begin{cases} a & \text{prob } p \\ -b & \text{prob } q \end{cases} \\ x(2) &= \begin{cases} 2a & \text{prob } p^2 \\ a-b & \text{prob } 2pq \\ -2b & \text{prob } q^2 \end{cases} \\ x(3) &= \begin{cases} 3a & \text{prob } p^3 \\ 2a-b & \text{prob } 3p^2q \\ a-2b & \text{prob } 3pq^2 \\ -3b & \text{prob } q^3 \end{cases} \end{aligned}$$

(d) If  $\xi \sim \mathcal{B}(n, p)$  then

$$P(\xi = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}; \quad x = 0, \dots, n.$$

By induction we can find that

$$x(t) = -tb + a\xi, \quad \text{where } \xi \sim \mathcal{B}(t, p).$$

(e) For large  $t$

$$x(t) = -tb + a\xi, \quad \xi \sim \mathcal{N}(tp, tpq).$$

Therefore

$$\begin{aligned} P(x(t) > 0) &= P(-tb + a\xi > 0) \\ &= P\left(\xi > tb/a\right) = P\left(\frac{\xi - tp}{\sqrt{tpq}} > \frac{tb/a - tp}{\sqrt{tpq}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{tb/a - tp}{\sqrt{tpq}}\right) = 1 - \Phi\left(\sqrt{t} \frac{b/a - p}{\sqrt{pq}}\right). \end{aligned}$$

### 5.31

#### Problem 3

(a) Direct calculations give

$$\begin{aligned} \phi(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{a\tau} e^{-i\omega\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-a\tau} e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{a-i\omega} e^{(a-i\omega)\tau} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{1}{-a-i\omega} e^{(-a-i\omega)\tau} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{a-i\omega} - \frac{1}{-a-i\omega} = \frac{-2a}{-a^2 - \omega^2} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

(b) Apply the results from part (a) to get

$$\phi(\omega) = C_1 \frac{2a}{a^2 + \omega^2} + C_2 \frac{2b}{b^2 + \omega^2}.$$

### 5.32

(a) See Problem 3a.

$$\phi_c(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}.$$

(b) As the definition of covariance is the same we have

$$r(kh) = e^{-\alpha|k|h}, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

(c) The precise definition of the discrete-time spectrum (without normalization to  $h = 1$ ) will be

$$\phi_d(\omega) = h \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(kh) e^{-ik\omega}$$

Set  $\alpha = e^{-\alpha h}$ . Then

$$\begin{aligned} \phi_d(\omega) &= h \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^{|k|} e^{-ik\omega} \\ &= h \left[ \sum_{k=-\infty}^0 \alpha^{-k} e^{-ik\omega} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k e^{-ik\omega} - 1 \right] \\ &= h \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k e^{ik\omega} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k e^{-ik\omega} - 1 \right] \\ &= h \left[ \frac{1}{1 - \alpha e^{i\omega h}} + \frac{1}{1 - \alpha e^{-i\omega h}} - 1 \right] \\ &= h \frac{1 - \alpha e^{-i\omega h} + 1 - \alpha e^{i\omega h} - 1 - \alpha^2 + 2\alpha \cos(\omega h)}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\omega h)} \\ &= h \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\omega h)}. \end{aligned}$$

(d) Note that  $\phi_d(\omega)$  is defined for all  $\omega$ , while  $\phi_d(\omega)$  is defined only for all  $|\omega| \leq \pi/h$ .

Set  $\bar{\alpha} = \alpha h$ ,  $\bar{\omega} = \omega h$ . Then

$$\begin{aligned} \phi_d(\omega) &\geq \phi_c(\omega), \quad |\omega| \leq \pi/h, \\ \Leftrightarrow \frac{h(1 - e^{-2\alpha h})}{1 + e^{-2\alpha h} - 2e^{-\alpha h} \cos(\omega h)} &\geq \frac{2\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}^2 + \bar{\omega}^2}, \quad |\omega| \leq \pi/h, \\ \Leftrightarrow \frac{2 \sinh(\bar{\alpha})}{2 \cosh(\bar{\alpha}) - 2 \cos(\bar{\omega})} &\geq \frac{2\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}^2 + \bar{\omega}^2}, \quad |\bar{\omega}| \leq \pi. \end{aligned}$$

The following inequalities are easy to verify

$$\begin{aligned} \sinh(\bar{\alpha}) &\geq \bar{\alpha}, & \forall \bar{\alpha} > 0, \\ \cosh(\bar{\alpha}) &\leq 1 + \bar{\alpha}^2/2, & \forall \bar{\alpha} > 0, \\ \cos(\bar{\omega}) &\geq 1 - \bar{\omega}^2/2, & \forall |\bar{\omega}| \leq \pi. \end{aligned}$$

Then we see

$$\text{LHS} \geq \frac{\bar{\alpha}}{1 + \bar{\alpha}^2/2 - 1 + \bar{\omega}^2/2} = \text{RHS}$$

**Remark.** The inequality follows also from the Poisson summation formula

$$\phi_d(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi_c(\omega + k \frac{2\pi}{h})$$

which describes the aliasing effect due to sampling. ■

We also have

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \phi_d(\omega) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(1 - e^{-2\alpha h})}{(1 + e^{-2\alpha h}) - 2e^{-\alpha h} \cos(\omega h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2\alpha h + O(h^2))}{[2 - 2\alpha h + 2\alpha^2 h^2 + O(h^3)] - 2[1 - \alpha h + \alpha^2 h^2/2 + O(h^3)](1 - \omega^2 h^2/2 + O(h^4))} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\alpha h^2 + O(h^3)}{h^2[2\alpha^2 - \alpha^2 + \omega^2 + O(h^3)]} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \phi_c(\omega). \end{aligned}$$

Alternatively, one can use Poisson summation formula to get (recall that in this example,  $\phi_c(\omega)$  is decreasing when  $\omega > 0$  is increasing)

$$\begin{aligned} |\phi_d(\omega) - \phi_c(\omega)| &= \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \phi_c(\omega + k \frac{2\pi}{h}) \\ &\leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \phi_c(k \frac{2\pi}{h}) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{a^2 + k^2 \frac{4\pi^2}{h^2}} \\ &\leq \frac{4\alpha h^2}{4\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{a}{\pi^2} h^2 \frac{\pi^2}{6} = \frac{ah^2}{6} \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

### 5.33

One finds directly  $E_x(t) = 0$ . Further, for  $\tau \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} r_x(\tau) &= E_x(t + \tau) r(t) \\ &= E[|a \cos(\omega_o t + \omega_o \tau) + b \sin(\omega_o t + \omega_o \tau)| |a \cos(\omega_o t) + b \sin(\omega_o t)|] \\ &= \sigma^2 \cos(\omega_o t + \omega_o \tau) \cos(\omega_o t) + \sigma^2 \sin(\omega_o t + \omega_o \tau) \sin(\omega_o t) \\ &= \sigma^2 \cos(\omega_o \tau), \\ \phi_x(\omega) &= \sigma^2 \int \cos(\omega_o \tau) e^{-i\omega \tau} d\tau \\ &= \frac{\sigma^2}{2} \int [e^{i(\omega_o - \omega)\tau} + e^{i(-\omega_o - \omega)\tau}] d\tau \\ &= \frac{\sigma^2}{2} [\delta(\omega - \omega_o) + \delta(\omega + \omega_o)]. \end{aligned}$$

One can also verify the last result by starting with this expression for  $\phi_x(\omega)$  and compute the covariance function:

$$\begin{aligned} r_x(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] e^{i\omega\tau} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{i\omega_0\tau} + e^{-i\omega_0\tau}] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0\tau) \end{aligned}$$

### 5.34

(a) The covariance function is easily found:

$$\begin{aligned} r_y(\tau) &= E\{y(t + \tau)y(t)\} \\ &= E\{\pi(t + \tau + 1) - \pi(t + \tau - 1)\}[\pi(t + 1) - \pi(t - 1)] \\ &= r_x(\tau) - r_x(\tau + 2) - r_x(\tau - 2) + r_x(\tau) \\ &= 2r_x(\tau) - r_x(\tau + 2) - r_x(\tau - 2). \end{aligned}$$

The spectrum becomes

$$\begin{aligned} \phi_y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} r_y(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [2r_x(\tau) - r_x(\tau + 2) - r_x(\tau - 2)] e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= 2\phi_x(\omega) - \int_{-\infty}^{\infty} r_x(\tau') e^{-(i\omega\tau' - i\omega 2)} d\tau' - \int_{-\infty}^{\infty} r_x(\tau') e^{-(i\omega\tau' + i\omega 2)} d\tau' \\ &= \phi_x(\omega) [2 - e^{i2\omega} - e^{-i2\omega}] \\ &= \phi_x(\omega) [2 - 2\cos(2\omega)] \\ &= \phi_x(\omega) [2 - 2\{1 - 2\sin^2(\omega)\}] \\ &= 4\phi_x(\omega) \sin^2(\omega). \end{aligned}$$

(b) One can interpret  $y(t)$  as an approximative derivative,  $y(t) \approx 2\dot{x}(t)$ . The spectrum of the true derivative is

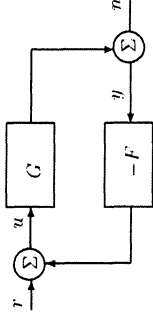
$$\phi_{2\dot{x}}(\omega) = |2i\omega|^2 \phi_x(\omega) = 4\omega^2 \phi_x(\omega).$$

For the approximative derivative the factor  $\omega^2$  is substituted by  $\sin^2(\omega)$ . This means that we get almost the same amplification for low frequencies, while the approximate derivative is much more damped than the true one for high frequencies.

## 6 Det slutna systemet

### 6.1

Alt 1. Consider the block diagram



which gives

$$y = (I + GF)^{-1}(n + Gr) = G_{ny}n + G_{ry}r$$

and

$$u = (I + FG)^{-1}(r - Fn) = G_{ru}r + G_{nu}n$$

which gives the I/O model

$$\begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{ru} & G_{nu} \\ G_{ry} & G_{ny} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ n \end{bmatrix}.$$

from the block diagram we see that

$$r = u + Fy$$

and

$$n = y - Gu$$

in matrix for this becomes

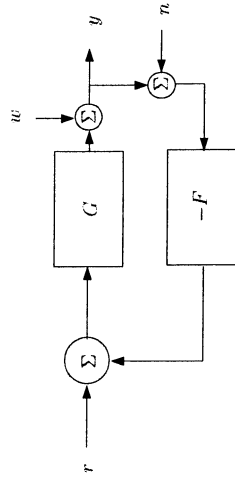
$$\begin{bmatrix} r \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & F \\ -G & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix}$$

Hereby we have shown

$$\begin{bmatrix} G_{ru} & G_{nu} \\ G_{ry} & G_{ny} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & F \\ -G & I \end{bmatrix}$$

Alt. 2 Show that the product of the two matrices is equal to the identity matrix.

6.3



Figur 4: System.

6.2

With transfer functions

$$G = \frac{s-1}{s+2}, \quad F = \frac{s+2}{s-1}$$

we get

$$\begin{aligned} Y &= G(R - F(Y + N)) + W \Rightarrow (1 + GF)Y = GR - GFN + W \\ \Rightarrow Y &= (1 + GF)^{-1}GR - (1 + GF)^{-1}GFN + (1 + GF)^{-1}W \end{aligned}$$

Now

$$\begin{aligned} G_c &= G_{ry} = (1 + GF)^{-1}G = \frac{s-1}{2s+3} \\ S &= G_{wy} = (1 + GF)^{-1} = \frac{s+1}{2s+3} \\ T &= 1 - S = \frac{s+2}{2s+3} \end{aligned}$$

which all are stable.

Internal stability?

We check the following four transfer functions

$$\begin{aligned} H_{11} &= (1 + FG)^{-1} = \frac{s+1}{2s+3} \\ H_{12} &= (1 + FG)^{-1}F = \frac{(s+2)(s+1)}{(s-1)(2s+3)} \\ H_{21} &= (1 + GF)^{-1}G = \frac{s-1}{2s+3} \\ H_{22} &= (1 + GF)^{-1} = \frac{s+1}{2s+3} \end{aligned}$$

The system is not internally stable since  $H_{12}$  is not stable.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1-\alpha}{q-\alpha}, \quad \|\Delta_G T\|_\infty < 1 \Rightarrow \text{stab} \\ \|T\|_\infty &= \sup_{\omega} \left| \frac{1-\alpha}{e^{j\omega} - \alpha} \right| = \left| \frac{1-\alpha}{1-\alpha} \right| = 1 \\ \|\Delta_G T\|_\infty &\leq \underbrace{\|\Delta_G\|_\infty}_{< 1} \cdot \underbrace{\|T\|_\infty}_{= 1} < 1 \end{aligned}$$

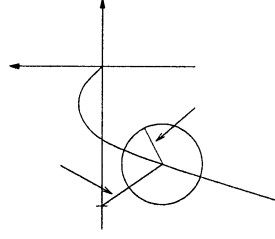
6.4

(a) Den statiska förstärkningen hos det samplade systemet är lika med den statiska förstärkningen hos det kontinuerliga systemet:  $G^{sampled}(1) = G(0)$  (Tänk t ex på det stegsvar: steget som insignal är ju styckvis konstant.) Likaså ändras inte den statiska förstärkningen hos regulatort om den tidsdiskretiseras med Tustin:  $q = 1$  svarar mot  $p = 0$  för alla värden på  $T$ . Kretsförstärkningen, och därmed känslighetsfunktionens värde för frekvensen noll påverkas således inte av samplingsen.

(b) Ett P-återkopplat system är stabilt i kontinuerlig tid kan vara instabilt vid samplad reglering. På stabilitetsgränsen är kretsförstärkningen lika med -1 vid skärfrekvensen. Känslighetsfunktionen är då oändlig där. Det finns alltså ingen övre gräns för hur stor den kan bli, utan vidare antagande om  $T$ ,  $G$  och  $F$ .

6.5

The true loop gain is given by  $L_p = L + \tilde{L}$ ,  $\tilde{L} = \Delta_L L$ . A typical Nyquist diagram is given in the figure below.





The worst case is when  $L_p$  is the point on the circle closest to  $-1$ . We get the condition

$$|1 + L| - |L| > 0 \quad \forall \omega$$

$$\Leftrightarrow |\Delta_L| < \frac{|1 + L|}{|L|} = \frac{1}{|\bar{T}|} \quad \forall \omega$$

which is the robustness criterion for the scalar case!

## 6.6

(a) Regulatorn blir

$$F(s) = \frac{k(s+1)}{s} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Detta ger kretsförstärkningen  $GF = \frac{k}{s}I$  och det slutna systemet

$$G_c = (I + GF)^{-1}GF = \frac{k}{s+k}I.$$

Det öppna systemet har två poler i  $-1$  och  $G_c$  två poler i  $-k$ . Välj  $k = 1$  för att systemen ska bli lika snabba.

(b) Det samma systemet ges i detta fall av

$$G_p = (I + \Delta_o)G$$

där  $\Delta_o$  är den relativa utsignalosäkerheten. Motsvarande robusthetskriterium är  $\|\Delta_o T\|_\infty < 1$  där

$$T = (I + GF)^{-1}GF = \frac{1}{s+1}I.$$

Här har vi

$$\Delta_o = (G_p - G)G^{-1} = (\alpha - 1) \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Låt  $H = \Delta_o T$ . Vi söker

$$\|H\|_\infty = \max_{\omega} \bar{\sigma}(H(i\omega)) = \max_{\omega} \sqrt{\lambda_{\max}(H^*(i\omega)H(i\omega))}$$

där  $\lambda_{\max}(H^*(i\omega)H(i\omega))$  är det största egenvärdet till  $H^*(i\omega)H(i\omega) = H^T(-i\omega)H(i\omega)$ . Detta fås från

$$\lambda_{\max}(H^T(-i\omega)H(i\omega)) = \frac{(\alpha - 1)^2}{1 + \omega^2} \lambda_{\max} \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{(\alpha - 1)^2 \cdot 5}{1 + \omega^2 \cdot 4}.$$

Alltså är  $\|H\|_\infty = |\alpha - 1| \frac{\sqrt{5}}{2}$  och robusthetskriteriet säger att det återkopplade systemet garanterat är stabilt för alla  $\alpha$  som uppfyller

$$1 - \frac{2}{\sqrt{5}} < \alpha < 1 + \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$0.11 < \alpha < 1.89$$

(c) Vi beskriver nu det samma systemet som

$$G_p = G(I + \Delta_I)$$

där  $\Delta_I$  är den relativa insignalosäkerheten. Robusthetskriteriet är i detta fall  $\|\Delta_I T\|_\infty < 1$  där  $T_I = (I + F(G)^{-1}FG)^{-1}FG$ . Notera skillnaden mellan definitionerna av  $T$  och  $T_I$ ! I detta fall gäller dock att  $T_I = T$  eftersom  $FG = GF = \frac{k}{s}I$ . Insignalosäkerheten ges av

$$\Delta_I = G^{-1}(G_p - G) = (\alpha - 1) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Detta innebär att

$$\Delta_I T_I = \frac{\alpha - 1}{s+1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

vilket ger  $\|\Delta_I T_I\|_\infty = |\alpha - 1|$ . Robusthetskriteriet säger nu att det återkopplade systemet garanterat är stabilt för alla  $\alpha$  som uppfyller

$$0 < \alpha < 2.$$

Vi noterar en skillnad jämfört med (b). För flervariabla system kan sättet som modellfel beskrivs ha stor betydelse!

(d) Det återkopplade systemet är

$$(I + G_p F)^{-1} G_p F = \frac{1}{(s+1)(s+\alpha)} \begin{bmatrix} s + \alpha & \frac{\alpha-1}{s} \\ 0 & \alpha(s+1) \end{bmatrix}.$$

Detta system har polerna  $-1$  och  $-\alpha$  och systemet är i själva verket stabilt för alla  $\alpha > 0$ ! Observera att robusthetskriterierna uttalar sig om det värsta tänkbara modellfelet och tar inte hänsyn till att vi i detta fall har en specialstruktur hos felet.

## 6.7

(a)  $L = (0.6 \quad 1.2)$

(b)  $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K(s+1)}{s^2 + 3.2s + 4}$

(c)  $K = 4$

**6.8**

(a) 
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} r$$

$$y = (-1 \ 1 \ 0) x$$

(b) 
$$\bar{L} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

(c) 
$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{4(s+1)}{(s+2)(s^2+2s+2)}$$

**6.9**

(a) 
$$\frac{d}{dt}x = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} r$$

$$y = (1 \ 0) x$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Systemet är stabilt för  $\delta < 2$ . Om  $|\delta| \ll 1$  gäller att polerna är "svagt" komplexa om  $\delta > 0$  och reella om  $\delta < 0$ .

**6.10**

(a) 
$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0.2 \end{pmatrix}^T$$

(b) Beviset bygger på att övre raden i matrisen  $I - KC$  blir nollor.

**6.11**

(a) 
$$\det(zI - A) = 0 \Rightarrow z = \pm 1 \Rightarrow \text{marginellt stabilt}$$

$$S(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}=2 \Rightarrow \text{styrbart}$$

$$\mathcal{O}(A, C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}=2 \Rightarrow \text{observerbart}$$

(b) 
$$L = (1 - 2\rho \cos \phi \quad 1 \quad 2\rho \cos \phi - 1 - \rho^2)$$

(c) 
$$K^T = (1 + \nu^2 \quad -2\nu)$$

**6.12**

a) Use  $(x^T \ z^T)^T$  as state vector. One gets

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BJC & -BH \\ GC & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -BJ \\ G \end{pmatrix} w$$

$$y = (C \ 0) x + w$$

b) Straightforward calculations give

$$S(s) = I + (C \ 0) \begin{pmatrix} sI - A + BJC & BH \\ -GC & sI - F \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -BJ \\ G \end{pmatrix}$$

c) With  $C(s) = 1/(s+1)$  and  $F_y(s) = K$ , we have

$$S(s) = (1 + G(s)F_y(s))^{-1} = \frac{1}{1 + K/(s+1)} = \frac{s+1}{s+1+K}$$

Applying the formula derived in part b) with

$$A = -1, B = 1, C = 1, F = 0, G = 0, H = 0, J = K$$

gives

$$S(s) = 1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+1+K & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -K \\ 0 \end{pmatrix} = 1 + \frac{-K}{s+1+K} = \frac{s+1}{s+1+K}$$

**6.13**

Ur blockskemat fäs

$$U = K_F E - \frac{K_F}{F} U + U \Rightarrow U = FE$$

Återkopplingen blir en ren P-reglering vid mättning, eftersom  $u_m(t)$  är konstant vid mättning och  $\frac{1}{F(s)} - \frac{1}{K_F}$  är stabil så kommer bidraget från det nedre blocket i regulatorn att svänga in sig till en konstant.

**6.14**

Vi vill visa att båda regulatorerna har samma överföringsfunktion. Första regulatorn har överföringsfunktionen

$$F(s) = C(sI - A)^{-1}B + D.$$

Laplacetransformera andra regulatorn

$$\begin{aligned} s\hat{X}(s) &= (A - \frac{1}{D}BC)\hat{X}(s) + \frac{1}{D}BU(s) = \\ & (A - \frac{1}{D}BC)\hat{X}(s) + \frac{1}{D}BC\hat{X}(s) + \frac{1}{D}BD E(s) = \\ & A\hat{X}(s) + BE(s) \Rightarrow \\ \hat{X}(s) &= (sI - A)^{-1}BE(s) \\ U(s) &= C\hat{X}(s) + DE(s) = \underbrace{(C(sI - A)^{-1}B + D)}_{F(s)} E(s) \end{aligned}$$

Notera att

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= (A - \frac{1}{D}BC)\hat{x}(t) + \frac{1}{D}Bu(t) \\ e(t) &= -\frac{C}{D}\hat{x}(t) + \frac{1}{D}u(t) \end{aligned}$$

är en tillståndsmodell för  $1/F(s)$  och att egenvärdena till  $A - \frac{1}{D}BC$  ges av nollställena till  $F'(s)$ .

När styrsignalen inte mättnar har man samma dynamik som regulatorn  $F$ . Återkopplingen blir en ren  $P$ -reglering vid mättning, eftersom  $u_m(t)$  är konstant vid mättning och  $A - \frac{1}{D}BC$  har stabila egenvärden så kommer bidraget från  $\hat{x}(t)$  i regulatorn att svänga in sig till en konstant.

## 6.15

- (a) Rättframma men långa räkningar.  
 (b) Det gäller att regulatorns systemmatris ges av
- $$F - MH = \begin{pmatrix} -1/T_d & K_c N/T_d \\ 0 & -N/T_d \end{pmatrix}$$

Polerna ges av nollställena till  $\det(sI - F + MH) = (s + 1/T_d)(s + N/T_d)$ . Alltså flyttas integratörpolen från 0 till  $-1/T_d$ . Den andra polen modifieras inte.

- (c) Överföringsfunktionen från  $U(s) - \tilde{U}(s)$  till  $\tilde{U}(s)$  ges av

$$W(s) = H(sI - F)^{-1}M = \frac{1}{sT_d}$$

- (d) Låt

$$M = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$$

201

Regulatorns poler ges av nollställena till

$$\det(sI - F + MH) = s^2 + (m_1 + N/T_d - K_c N m_2)s + m_1 N/T_d$$

Genom att sätta koefficienterna för detta polynom av  $s$  lika med koefficienterna för  $s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$  erhålles två linjära ekvationer i  $m_1$  och  $m_2$  från vilka erhålles

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{T_d \omega_0^2}{N} \\ m_2 &= \frac{1}{K_c N} \left( \frac{T_d \omega_0^2}{N} + \frac{N}{T_d} - 2\zeta\omega_0 \right) \end{aligned}$$

- (e) Överföringsfunktionen från  $U(s) - \tilde{U}(s)$  till  $\tilde{U}(s)$  ges av

$$W(s) = H(sI - F)^{-1}M = \frac{\omega_0^2 - (N/T_d - 2\zeta\omega_0)s}{s(s + N/T_d)}$$

## 6.16

Styrslag:

$$x(t) = x(t-1) + n(t) - T(t) \quad (6.1)$$

$$\begin{cases} \epsilon(t) = x_0 - x(t) \\ n(t) = \frac{1}{2}e^{-(t-2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 - \epsilon(t) \\ n(t) = x_0 - \epsilon(t) = x_0 - 2n(t+2) \end{cases} \quad (6.2)$$

- a) (6.2) i (6.1)  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} x_0 - 2n(t+2) &= x_0 - 2n(t+1) + n(t) - T(t) \\ 2n(t+2) - 2n(t+1) + n(t) &= T(t) \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} (2q^2 - 2q + 1)n(t) &= T(t) \\ n(t) &= \frac{q^{-2}}{2 - 2q^{-1} + q^{-2}} T(t) \end{aligned}$$

polerna ges av

$$\begin{aligned} q^2 - q + 1/2 &= 0 \\ \Rightarrow q &= 1/2 \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}} \Rightarrow |q| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \end{aligned}$$

alltså stabil.

Anlag  $T$  är konstant =  $T_0$  och  $n$  antar stationära värdet  $n_0$ , då måste enligt (6.3)

$$\begin{aligned} 2n_0 - 2n_0 + n_0 &= T_0 \\ \Rightarrow n_0 &= T_0 \text{ och } E_0 = 2n_0 = 2T_0 = \text{stationärt fel.} \end{aligned}$$

202

b) Använd istället

$$\begin{aligned} n(t) &= n(t-1) + \frac{1}{2}e^{-(t-2)} \\ \Rightarrow x(t) &= x_0 - 2n(t+2) + 2n(t+1) \end{aligned}$$

Sätt in i (6.1)

$$\begin{aligned} x_0 - 2n(t+2) + 2n(t+1) &= x_0 - 2n(t+1) + 2n(t) + n(t) - T(t) \\ 2n(t+2) - 4n(t+1) + 3n(t) &= T(t) \\ (2q^2 - 4q + 3)n(t) &= T(t) \end{aligned}$$

poler ges av

$$q^2 - 2q + 1.5 = 0$$

$|1.5| > 1 \Rightarrow$  någon pol har  $|q| > 1$  alltså instabilt.

c) Välj istället

$$\begin{aligned} n(t) &= n(t-1) + \frac{1}{2}e^{-(t-1)} + 0.2e^{-(t-1)} - 0.2e^{-(t-2)} \\ n(t) - n(t-1) &= 0.7e^{-(t-1)} - 0.2e^{-(t-2)} \\ (q^2 - q)n(t) &= (0.7q - 0.2)e^{-(t)} \end{aligned} \quad (6.4)$$

och

$$x(t) = x_0 - \frac{q^2 - q}{0.7q - 0.2}n(t)$$

och enligt (6.1)

$$\begin{aligned} x_0 - \frac{q^2 - q}{0.7q - 0.2}n(t) &= -\frac{q-1}{0.7q-0.2}n(t) + n(t) - T(t) + x_0 \\ (q^2 - q - q + 1 + 0.7q - 0.2)n(t) &= (0.7q - 0.2)T(t) \end{aligned} \quad (6.5)$$

Poler ges av

$$(q^2 - 1.3q + 0.8)n(t) = (0.7q - 0.2)T(t)$$

$$q^2 - 1.3q + 0.8 = 0$$

$$q = \frac{1.3}{2} \pm \sqrt{\frac{(1.3)^2 - 3.2}{4}} \text{-komplexa} \Rightarrow |q| = \sqrt{0.8}$$

alltså stabilt.

(6.5)  $\Rightarrow$  om  $T$  är  $T_0$  blir  $n = n_0 = \frac{0.5}{0.5}T_0 = T_0$

(6.4)  $\Rightarrow 0 = 0.5E_0 \Rightarrow E_0 = 0$

## 7 Begränsningar och konflikter

### 7.1

(a) Using a controller with 1 degree of freedom the complementary sensitivity function become

$$T(s) = \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)}$$

To compute the controller  $F(s)$  which gives the desired  $T(s)$  we express  $F(s)$  as a function of  $T(s)$  and  $G(s)$  in the following way. The above expression give us

$$T(s) + T(s)F(s)G(s) = F(s)G(s)$$

and

$$T(s) = G(s)(1 - T(s))F(s)$$

which yields

$$F(s) = G^{-1}(s) \frac{T(s)}{1 - T(s)}$$

With the provided  $T(s)$  and  $G(s)$  we get

$$F(s) = \frac{5(s+1)}{s(s-3)}$$

This results in that the zero in  $s = 3$  is cancelled when we look at the control system from reference signal to the output signal. However, if we look at the system from reference signal to control signal we have the relation

$$U(s) = \frac{5(s+1)}{(s-3)(s+5)}R(s)$$

we see that the system has a pole in  $s = 3$  and hence it is unstable.

(b) The bandwidth 5 rad/s can be achieved if we keep the zero and in addition place a pole in  $s = -3$ , i.e.

$$T(s) = \frac{5(s-3)}{(s+3)(s+5)}$$

The relation

$$F(s) = G^{-1}(s) \frac{T(s)}{1 - T(s)}$$

gives

$$F(s) = \frac{5(s+1)}{(s^2 + 3s + 30)}$$

In this case there is no cancellation of poles and zeros and all transfer functions for the closed loop system are stable. If there are no cancellations between unstable poles and zeros in the control system, this indicates that

the system is internally stable. A more thorough check of internal stability can be done as:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -G(s) \\ F(s) & 1 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{s-3}{s+1} \\ \frac{5(s+1)}{s^2+3s+30} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{3(s-3)(s-1)}{(s+1)(s^2+3s+30)}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{s-3}{s+1} \\ -\frac{5(s+1)}{s^2+3s+30} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{s^2+3s+30}{s^2+8s+15} \begin{pmatrix} 1 & \frac{s-3}{s+1} \\ -\frac{5(s+1)}{s^2+3s+30} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(s+3)(s+5)} \begin{pmatrix} s^2+3s+30 & \frac{s-3}{s+1}(s^2+3s+30) \\ -5(s+1) & s^2+3s+30 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

All four elements are stable and hence the closed loop system is internally stable.

$$(c) S(s) = 1 - T(s) = \frac{s^2+3s+30}{s^2+8s+15}$$

It has the character of a low pass filter with  $S(0)=2$ , this is not desirable since the process noise should be *damped* at low frequencies. The same reasoning holds for  $T(s)$  and measurement noise at high frequencies.

(d) Since  $G_c = \frac{G_c F_c}{1+G_c F_c}$  and  $G_c$  has no zero in  $s = 3$ , the factor  $(s-3)$  in  $G(s)$  must, in this case, be cancelled. This directly gives stability issues.

Put in another way, demand that  $F_x$  and  $F_y$  are finite for  $s = 3$ . For  $s = 3$  evaluate:

$$G_c(3) = \frac{G(3)F_x(3)}{1 + G(3)F_y(3)} = 0$$

which contradicts  $G_c(s) = \frac{s}{s+5}$ . Hence there exists no such controller.

## 7.2

The transfer function for at system with a zero in  $s = 3$  and a delay of 1 second can be expressed as

$$G(s) = e^{-s}(3-s)\bar{G}(s)$$

or

$$G(s) = e^{-s} \frac{(3-s)}{(3+s)} (3+s)\bar{G}(s)$$

The frequency functions argument is now

$$\arg G(i\omega) = -\omega - 2 \arctan \frac{\omega}{3} + \arg((3+i\omega)\bar{G}(i\omega))$$

According to the problem definition it is assumed the the amplitude cure decreases monotonically. According to Bodes relations this yields

$$\arg((3+i\omega)\bar{G}(i\omega)) \leq 0$$

Giving

$$\arg G(i\omega) \leq -\omega - 2 \arctan \frac{\omega}{3}$$

and the phase margin

$$\varphi_m = \pi + \arg G(i\omega_c) \leq \pi - \omega_c - 2 \arctan \frac{\omega_c}{3}$$

if we study the case  $\varphi_m = 0$  and assume equality in the above equation we get

$$0 = \pi - \omega_c - 2 \arctan \frac{\omega_c}{3}$$

i.e.

$$\omega_c \approx 2$$

hence, the highest possible crossover frequency is approximately 2 rad/s.

## 7.3

(a) The requirements on  $|S(i\omega)| = \bar{\sigma}(S(i\omega))$  and  $|T(i\omega)| = \bar{\sigma}(T(i\omega))$  can be formulated as

$$\begin{aligned} |S(i\omega)| &\leq \frac{1}{10}, \quad \omega \leq 0.1, & |T(i\omega)| &\leq \frac{1}{10}, \quad \omega \geq 2 \\ |S(0)| &\leq \frac{1}{100} \end{aligned}$$

(b) The corresponding requirements on the loop gain  $G F_y$  become

$$\begin{aligned} |G(0)F_y(0)| &> 100 \\ |G(i\omega)F_y(i\omega)| &> 10, \quad \omega \leq 0.1 \\ |G(i\omega)F_y(i\omega)| &< \frac{1}{10}, \quad \omega \geq 2 \end{aligned}$$

(c) The requirements in (a) can be formulated using weight functions  $W_s$  and  $W_T$  s.t.

$$\begin{aligned} |S(i\omega)| &\leq |W_s^{-1}(i\omega)|, \quad \forall \omega \\ |T(i\omega)| &\leq |W_T^{-1}(i\omega)|, \quad \forall \omega \end{aligned}$$

If  $W_s^{-1}$  and  $W_T^{-1}$  are chosen as first order functions according to

$$W_s^{-1}(s) = a_1 \left( 1 + \frac{s}{b_1} \right), \quad W_T^{-1}(s) = \frac{a_2}{s} \left( 1 + \frac{s}{b_2} \right)$$

one get, for example

$$W_s^{-1}(s) = \frac{1}{100}(1+100s), \quad W_T^{-1}(s) = \frac{0.14}{s} \left( 1 + \frac{s}{2} \right)$$

(d) The minimal slope of the loop gain in the interval  $[0.1, 2]$  is approximately given by straight line that is tangent to the forbidden areas in (b).

$$\text{Slope in the Bode diagram: } \frac{\log 0.1 - \log 10}{\log 2 - \log 0.1} \approx \frac{-1-1}{0.3-1} \approx -1.53$$

This yield

$$\frac{\log 1 - \log 10}{\log \omega_c - \log 0.1} = -1.53 \Rightarrow \omega_c = 0.45 \text{ rad/s}$$

From Bodes relation we get

$$\arg G F_y \approx -1.53 \cdot \frac{\pi}{2} = -138^\circ$$

this gives a phase margin  $\varphi_m \approx 40^\circ$ .

Lower bound on  $\|T\|_\infty$ ?

$$G(i\omega_c)F_y(i\omega_c) = 1 \cdot e^{-i \cdot 138^\circ} = -0.743 + 0.669i$$

$$|T(i\omega_c)| = \left| \frac{G(i\omega_c)F_y(i\omega_c)}{1 + G(i\omega_c)F_y(i\omega_c)} \right| \approx 1.4$$

$$\|T\|_\infty = \sup_{\omega} |T(i\omega)| \Rightarrow \|T\|_\infty \geq |T(i\omega)|, \quad \forall \omega$$

$$\Rightarrow \|T\|_\infty \geq 1.4 = |T(i\omega_c)|$$

(e)

$$|T(i\omega_c)| = 1.4$$

$$|W_T^{-1}(i\omega_c)| = \frac{0.14}{0.45} \sqrt{1 + \frac{0.45^2}{2^2}} = 0.32$$

Thus it is not possible to find a solution *with these weight functions*.

## 7.4

The first requirement says

$$|S(i\omega)| < 10^{-3} \quad \omega \leq 2$$

where

$$S(s) = \frac{1}{1 + F(s)G(s)}$$

when  $|F(i\omega)G(i\omega)|$  is "large" we approximately have that

$$|S(i\omega)| \approx \frac{1}{|F(i\omega)G(i\omega)|}$$

207

this gives us the requirement

$$|F(i\omega)G(i\omega)| > 10^3 \quad \omega \leq 2$$

Further it is required that the control system remain stable despite a model uncertainty

$$|\Delta G(i\omega)| \leq 100 |G(i\omega)| \quad \omega \geq 20$$

where  $\Delta G(s)$  is the absolute model error in the model  $G(s)$ . This gives a relative model error as

$$\left| \frac{\Delta G(i\omega)}{G(i\omega)} \right| \leq 100$$

To remain stability it is required

$$|T(i\omega)| < 10^{-2} \quad \omega \geq 20$$

where

$$T(s) = \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)}$$

When  $|F(i\omega)G(i\omega)|$  is "small" we approximately have that

$$|T(i\omega)| \approx |F(i\omega)G(i\omega)|$$

this gives us the requirement

$$|F(i\omega)G(i\omega)| < 10^{-2} \quad \omega \geq 20$$

To fulfill both requirements we thus need the loop gain to drop from  $10^3$  to  $10^{-2}$  during the interval  $\omega = 2$  to  $\omega = 20$ , i.e. 100 dB over one decade (slope  $-5$ ). According to Bodes relation we then have  $\arg G(i\omega) \approx -5 \cdot 90^\circ$  within this interval. This means that the closed loop system becomes unstable. Thus we can not fulfill the requirements.

## 7.5

Det skalade systemet fås som

$$y = D^{-1}G^f D_u u + D^{-1}G_d^f D_d d$$

(a)  $D_u$  väljs så att  $u^f \in [-10, 10]$  kan representeras med  $u \in [-1, 1]$  dvs  $D_u = 10$ , ( $u^f = D_u u$ ),  $D_d$  fås påliknande sätt,  $D_d = 15$ .  $D = 5$  kommer från att det största tillåtna reglerfelet är fem enheter (utsignalen och reglerfelet mäts i samma enhet och ska därmed skalas med samma faktor).

(b)

$$G(s) = D^{-1}G^f D_u = \frac{1}{5} \frac{1/5}{s+1} 10 = \frac{2/5}{s+1}$$

$$G_d(s) = D^{-1}G_d^f D_d = \frac{1}{5} \frac{1/3}{s+2} 15 = \frac{1}{s+2}$$

208

7.6

Lösningen liknar den i föregående uppgift. Skala enligt  $\eta=0.5\eta^f$ ,  $u^f=5u$ ,  $d^f=10d$ .

(a) Det skalade systemet fås som

$$y = D^{-1}G^f D_u u + D^{-1}G_d^f D_d d$$

Där  $D_u = 5$ ,  $D_d = 10$  och  $D = 2$  vilket ger de skalade systemen

$$\text{Fall 1: } y = \frac{4}{s-2}u + \frac{1}{2s+1}d.$$

$$\text{Fall 2: } y = \frac{4}{s+2}u + \frac{2}{2s+1}d.$$

(b) Fall 1: Notera att  $|G_d(j\omega)| \leq 1 \forall \omega$  vilket innebär att vi egentligen inte behöver någon reglering för att dämpa störningar (om vi nöjer oss med att  $|e| < 1$  och inte noll). Problemet här är den instabila polen  $p = 2$  i  $G$ . Detta ger approximativt kravet  $\omega_c > 2p = 4$ . Men samtidigt ger en tidsfördröjning  $T$  kravet  $\omega_c < 1/T$ . Således har vi *motsstridiga krav* om  $1/T < 4$ . Om däremot  $T < 1/4$  så finns det hopp om att vi kan finna en regulator som klarar jobbet.

(b) Fall 2: Här är  $G$  stabil men  $|G_d| > 1$  för  $\omega < \omega_d$  där  $\omega_d$  ges av  $|G_d| = 1$  ( $\Rightarrow \omega_d = \sqrt{3}/2$ ). Låt oss börja med att undersöka om det finns tillräcklig styrkraft för störningsdämpning. Detta gäller om  $|G| > |G_d| - 1$ .  $\forall \omega$  (alternativt  $|G| > |G_d|$  om vi vill ha reglerfelet lika med noll). Uppenbarligen är detta uppfyllt här. För störningsdämpning behöver vi reglering för låga frekvenser. Ett approximativt krav är  $\omega_c > \omega_d$  vilket ska jämföras med kravet från tidsfördröjningen  $\omega_c < 1/T$ . Det bör alltså vara möjligt att reglera systemet om  $T < 1/\omega_d = 2/\sqrt{3}$ .

7.7

Lösningen liknar den i föregående uppgift. Det skalade systemet fås som

$$y = D^{-1}G^f D_u u + D^{-1}G_d^f D_d d$$

Där  $D_u = 10$ ,  $D_d = 5$  och  $D = 3$  vilket ger det skalade systemet

$$y = \frac{20(s+1)}{3(s+2)}u + \frac{5}{3(3s+1)}d$$

$$y = \frac{2.5}{3(s+2)}u + \frac{2.5}{3(2s+1)}d$$

7.8

(a)  $D_u = 10$ ,  $D_d = 5$  och  $D = 3$ .

(b) Överföringsfunktionerna fås som

$$y^f = \underbrace{(C^f(sI - A^f)^{-1}B^f + K^f)}_G u^f + \underbrace{(C^f(sI - A^f)^{-1}E^f + F^f)}_{G_d^f} d^f$$

och vi har att

$$G = D^{-1}(C^f(sI - A^f)^{-1}B^f + K^f)D_u$$

$$= \underbrace{D^{-1}C^f(sI - A^f)^{-1}B^f}_B D_u + \underbrace{D^{-1}K^f}_K D_u$$

$$G_d = D^{-1}(C^f(sI - A^f)^{-1}E^f + F^f)D_u$$

$$= \underbrace{D^{-1}C^f(sI - A^f)^{-1}E^f}_E D_u + \underbrace{D^{-1}F^f}_F D_u$$

där  $B, C, K, E, F$  är de skalade matriserna. Observera att  $A^f$  inte påverkas av skalning.

7.9

(a) First one inverts the "nice" process dynamics, i.e. stable dynamics and gain. This gives the controller to be

$$F(s) = \frac{(5s+1)(10s+1)}{3} F_1(s).$$

This is done to simplify the open loop system to make it easier to "add" new dynamics. In addition an integrator is needed in the controller (to take care of the steady state error) since the process does not contain an integration. This gives

$$F(s) = \frac{(5s+1)(10s+1)}{3} \cdot \frac{1}{s} F_2(s).$$

To compensate for the unstable factor  $(-2s+1)$ , one adds  $(2s+1)$  to the controller. By doing so one compensates for the impact the unstable factor has on the amplitude, but one still needs to compensate for the phase impact. Now the open loop systems amplitude curve is a straight line with slope  $-1$  and the phase curve starts at  $-90^\circ$  and approaches  $-270^\circ$  for high frequencies. The controller becomes

$$F(s) = \frac{(5s+1)(10s+1)}{3} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{2s+1} F_3(s).$$

Since we want the crossover frequency to be  $\omega_c = 0.1$  rad/s, we have to amplify the open loop system by  $K_c = 0.1$ .

Finally one adds an element in the controller to make sure that the roll-off for large frequencies becomes  $-2$ . Let this element become active at  $\omega = 3$  rad/s. This gives the final controller

$$F(s) = \frac{0.1}{3} \cdot \frac{(5s+1)(10s+1)}{s(2s+1)(0.33s+1)}.$$

The loop gain now becomes

$$L(s) = 0.1 \frac{-2s+1}{s(2s+1)(0.33s+1)}$$

(b) We know that the crossover frequency is  $\omega_c = 0.1$  rad/sec. The phase at  $\omega_c$  is then

$$\arg L(i\omega_c) = -\frac{\pi}{2} - 2 \arctan 2\omega_c - \arctan \frac{\omega_c}{3}.$$

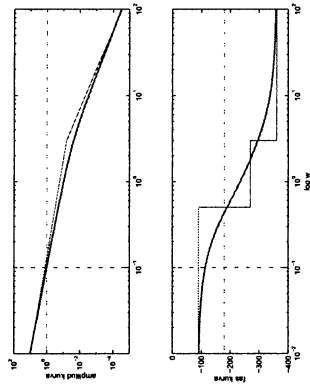
Giving a phase margin

$$\varphi_m = \pi + \arg L(i\omega_c) \approx 1.14 \text{ rad} \quad (\approx 65.5 \text{ degrees}).$$

(c) To sketch the Bode plot one writes the system on the form

$$L_c(i\omega) = 0.1 \frac{(1 + i\frac{\omega}{0.5})}{i\omega(1 - i\frac{\omega}{0.5})(1 + i\frac{\omega}{3})}.$$

It is known that  $\omega_c = 0.1$ , and that the all pass part  $\frac{1-2s}{1+2s}$  does not affect the amplitude curve. The phase curve is given above. This gives a Bode diagram as in the figure below.



(d) The closed loop system becomes

$$G_c(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{-0.6s+0.15}{s^3+3.5s^2+1.2s+0.15}.$$

The bandwidth  $\omega_b$  is the highest frequency where the amplitude curve of  $G_c(s)$  reaches  $1/\sqrt{2}$  ( $= -3 \text{ dB}$ ) from above. Thus we have

$$|G_c(i\omega_b)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

The bandwidth in this case is approximately  $\omega_b = 0.2$ . Since there is a non minimum phase zero ( $+0.5$ ) in the system, and the rule of thumb says that the closed loop system bandwidth should not be larger than 0.25. Also note that the closed loop system still has a non minimum phase zero.

## 7.10

We want the crossover frequency  $\omega_c^{ny} = 7$  rad/s with the phase margin  $\varphi_m = 50^\circ$ . A Lead-Lag controller solves this

$$F(s) = KN \frac{(s+b)}{(s+a/M)} \frac{(s+a)}{(s+bN)}$$

The phase for  $\omega_c^{new}$  is read out from the Bode diagram

$$\arg G(i\omega_c^{ny}) = -180^\circ$$

To get a phase lead of  $50^\circ + 6^\circ$  due to a probable Lag link gives  $N = 10$

$$b = \frac{\omega_c^{ny}}{\sqrt{N}} = \frac{7}{\sqrt{10}} \approx 2.2$$

$K$  is chosen so that the open loop system has gain 1 for  $\omega_c^{ny}$  i.e.

$$K|F_{lead}|G(\omega_c^{ny}) = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{\sqrt{10} \cdot 0.13} \approx 2.4$$

The Lead link thus becomes

$$F_{lead}(s) = 2.4 \cdot 10 \cdot \frac{s+2.2}{s+22}$$

The required damping of disturbances gives demands on the sensitivity function:

$$|S(i\omega)| < 0.005 \quad \omega \leq 0.1$$

we can use the following approximation

$$|S(i\omega)| = \left| \frac{1}{1 + F(i\omega)G(i\omega)} \right| \approx \frac{1}{|F(i\omega)G(i\omega)|} \approx \frac{1}{|F(i\omega)||G(i\omega)|}$$

the approximation is valid since the loop gain is large. We know that the loop gain is decreasing with increasing  $\omega$  and that it is enough to check that the condition is satisfied for  $\omega = 0.1$ . from the diagram we get  $|G(i0.1)| \approx 20$ . We also have that

$$|F(i \cdot 0.1)| = 24 \frac{\sqrt{0.1^2 + 2.2^2}}{\sqrt{0.1^2 + 22^2}} \cdot \frac{\sqrt{0.1^2 + 0.7^2}}{\sqrt{0.1^2 + \frac{0.7^2}{37}}}$$

where we have chosen  $a = 0.1\omega_c$  according to the rule of thumb . The requirement

$$|F(i \cdot 0.1)||G(i \cdot 0.1)| > \frac{1}{0.005}$$

gives  $M > 3.5$  and the full controller becomes

$$F(s) = 24 \frac{(s+2.2)(s+0.7)}{(s+22)(s+0.2)}$$



7.11

(b) Känslighetsfunktionen räknades ut i a-uppgiften.

7.12

$$W_S^{-1}(s) = \lim_{\tau \rightarrow 0} S(s) = \frac{2s}{s+2}$$

7.13

(c)  $\|W_S S\|_\infty \geq W_S(2)S(2) = 1$

7.14

Detta betyder att känslighetsfunktionens amplitudkurva ligger under amplitudkurvan för  $W_S^{-1}(i\omega)$  för alla frekvenser.  $W_S^{-1}(i\omega)$  är strängt växande och ligger mellan noll och två.

a) As  $e(t) = S(p)r(t) + \dots$ , we have for  $r(t)$  a ramp

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s) \frac{1}{s^2}$$

and it must hold

$$S(0) = 0, \quad \frac{dS(s)}{ds} \Big|_{s=0} = 0$$

b) Use Laplace transform (the reference signal is a step function in this case)

$$\int_0^\infty e(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-st} e(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} S(s) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{dS(s)}{ds} = 0$$

c) As

$$\int_0^\infty e(t) dt = 0$$

the control error  $e(t)$  must take both positive and negative values. Hence there must be an overshoot in the step response. (Civerth, who is a well trained engineer, realized that there is no way to satisfy the two design objectives simultaneously.)

7.15

(a) Återkopplade systemet är

$$G_c = \frac{GF}{1+GF} \Rightarrow F = \frac{G_c}{G(1-G_c)} = \frac{s+2}{\tau s+2\tau+2}$$

Eftersom både systemet och regulatorn är stabila räcker det med att kolla en överföringsfunktion i definition 6.1 (sidan 176 i kursboken).

$$S = \frac{1}{1+GF} = \frac{s(\tau s+2\tau+2)}{(s+2)(\tau s+1)}$$

Denna överföringsfunktion är stabil vilket medför intern stabilitet.

$$|W_S^{-1}(i\omega)| = \frac{2\omega}{\sqrt{\omega^2+4}} = 1 \Rightarrow \omega = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1.1547 < 2$$

Redan vid  $\omega = \frac{2\sqrt{3}}{3}$  har amplituden ett uppnått. Det är alltså omöjligt att få störningsdämpning för  $\omega > \frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

7.16

Stationärt gäller  $y = u + 2/3d$  om  $d = 3$  krävs  $u = -2$  för att eliminera inverkan av  $d$ . Eftersom  $|u| < 1$  går det EJ.

7.17

(a)  $\Delta_G = G(s)G_0^{-1}(s) - 1 = as$ .

(b) The robustness criterion  $|T\Delta_G| < 1 \forall \omega$  implies that we require  $|T| < 1$  where  $|\Delta_G| > 1$ . Here  $|\Delta_G| = |a|\omega$ , hence  $|\Delta_G| > 1$  for  $\omega > 1/|a|$ . Thus, the bandwidth limitation is for the complementary sensitivity  $T$  and is  $\omega_{BT} < 1/|a|_{max}$  where  $|a|_{max}$  is the maximum of  $|a|$  for the expected variations of  $G(s)$ .

(d) With  $F(s) = (s+1)/s$  we get  $T_0(s) = 1/(s+1)$  for the nominal model  $G_0(s)$ . The robustness criterion then becomes  $|as/(s+1)| < 1 \forall \omega$  which yields  $|a| < 1$  or  $-1 < a < 1$ . The true closed-loop is  $T(s) = (as+1)/((n+1)s+1)$  which is stable for  $a > -1$ , or  $-1 < a < \infty$ . Thus, while the robustness criterion gives both a lower and upper bound on the allowed variations in  $a$  there exist in reality no upper bound on  $a$  when considering stability.

7.18

a) From the block diagram, we see that we should write  $G_p$  on the form  $G_p = G_0(1 + \Delta)$ , which means that  $\Delta(s) = e^{-sL} - 1$ .

To verify that  $|\Delta(i\omega)| \leq 2$ , use Euler's formula  $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ . Then,  $\Delta(i\omega) = \cos(\omega L) - i \sin(\omega L) - 1$  so  $|\Delta(i\omega)|^2 = (\cos(\omega L) - 1)^2 + (\sin(\omega L))^2 = 2 - 2 \cos(\omega L) \leq 4$ . Thus  $|\Delta(i\omega)| \leq 2$ .

b) Let  $u_\Delta$  be the input to the  $\Delta$ -block and  $y_\Delta$  be its output. To get the system on the standard  $M - \Delta$ -form from the lectures, we need to determine the transfer function from  $y_\Delta$  to  $u_\Delta$ . We find  $u_\Delta = -G_0 F_y^c (y_\Delta + u_\Delta)$ , i.e.

$$u_\Delta = -(1 + G_0 F_y^c)^{-1} G_0 F_y^c y_\Delta = -T y_\Delta$$

The small gain now requires that  $|\Delta(i\omega)| |T(i\omega)| \leq 1$  for all frequencies. If we only use the norm bound on  $\Delta$ , we need to require that

$$|T(i\omega)| \leq \frac{1}{2} \quad \forall \omega$$

(a very conservative requirement!)

c) Since

$$\frac{G_p - C_0}{G_0} = e^{-sL} - 1$$

we can the derivations used in 4a) to see that the relative error is given by

$$e^{-i\omega L} - 1 = 1 - \cos(\omega L) + i \sin(\omega L)$$

For the worst-case delay  $L_{\max}$ , the relative error is less than 2 for all frequencies  $\omega \leq \pi/L_{\max}$ . Moreover, in this frequency interval cosine is monotone decreasing so the relative error is smaller for delays  $L$  with  $L \leq L_{\max}$ . Hence, the maximum delay value  $L = L_{\max}$  is the worst-case.

d) The stability criterion requires that

$$|T(i\omega)| \leq |w_T^{-1}(i\omega)|$$

The magnitude of  $w_T^{-1}(i\omega)$  has slope -1 at low frequencies, a breakpoint around 1 rad/s, and a high-frequency gain of 1/2. Superimposing this bound on the Bode diagrams of the complementary sensitivity gives that the controller corresponding to the dashed line is guaranteed to be robustly stable, while the controller corresponding to the full line does not satisfy the bound. Hence, robust stability of the design corresponding to the solid line cannot be guaranteed with the suggested criterion.

## 7.19

a) The gain of a system  $M$  is

$$\|M\| = \sup_u \frac{\|M(u)\|}{\|u\|}$$

215

where sup means the least upper limit (supremum). For the nonlinearity in the problem, an input signal that attains maximum gain is  $u = 1$  (In fact, any signal with  $|u(t)| \leq 1$  can be used here). With this choice of input signal, the gain is calculated to 1.

Next step is to use the small gain theorem. The loop gain outside the nonlinearity is  $-GK = -\frac{K}{s+\epsilon}$ . For this system, the gain is at maximum for  $\omega = 0$  and is then  $\frac{K}{\epsilon}$ . Because all involved transfer functions are stable, the low gain theorem can be used.

$$\left| \frac{K}{\epsilon} \right| \|1\| < 1$$

which gives  $K < \epsilon$  for stability. This criterion thus limits the controller to have almost zero gain.

Answer:  $K < \epsilon$  gives stability.

b) For the two block diagrams to be equal, it is required that

$$\text{sat}(u) = u + \Delta(u)$$

This gives

$$\Delta(u) = \begin{cases} 1-u & \text{if } u \geq 1 \\ 0 & \text{if } -1 \leq u \leq 1 \\ -1-u & \text{if } u \leq -1 \end{cases}$$

The gain for  $\Delta$  is calculated by finding an input signal that maximizes the gain. Using  $u = \epsilon \gg 1$  gives

$$\|\Delta\| = \sup_c \frac{|1-c|}{|c|} = 1$$

The loop gain outside the  $\Delta$  block is now calculated. Alternative 1 (block algebra): go from output (left side of  $\Delta$ ) to input (right side of  $\Delta$ ). The gain is  $K \cdot -G$  then breakout causing  $(1+KG)^{-1}$ , adding up to  $-KG(1+KG)^{-1}$ . Alternative 2: let the signal on the input to  $\Delta$  be  $a$  and the output  $b$ . Then  $a = -KG(u+b)$  and thus  $a = -(1+KG)^{-1}KGb = -KG(1+KG)^{-1}$ , using the push through rule in the last equality.

The loop gain seen from the  $\Delta$  block is  $T_i = -KG(1+KG)^{-1}$ .

$$T_i = \frac{K}{s+K+\epsilon}$$

The gain for  $T_i$  is  $\|T_i\| = \frac{K}{K+\epsilon}$  attained for  $\omega = 0$ . Applying the low gain theorem gives

$$\left| \frac{K}{K+\epsilon} \right| \|1\| < 1$$

which with positive  $K$  gives  $K < K + \epsilon$  which is always true. Stability can then be guaranteed for all  $K > 0$ .

Answer: The system is stable for all  $K > 0$ .

216

## 8 Regulatorstrukturer och reglerdesign

### 8.1

$$\text{RGA}(G(s)) = \begin{pmatrix} \frac{0.6}{s+1} & -0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix} * \frac{s+1}{0.12(s+4)} \begin{pmatrix} 0.6 & -0.3 \\ 0.4 & \frac{0.6}{s+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{s+4} & \frac{s+1}{s+4} \\ \frac{s-1}{s+4} & \frac{3}{s+4} \end{pmatrix}$$

Observe that we use *element-by-element* multiplication above. For the DC-gain we get

$$\text{RGA}(G(0)) = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Since all the elements in  $\text{RGA}(G(0))$  are positive all combinations are possible. At the crossover frequency we get

$$\text{RGA}(G(10i)) = \begin{pmatrix} \frac{12-30i}{116} & \frac{104+30i}{116} \\ \frac{104+30i}{116} & \frac{12-30i}{116} \end{pmatrix}.$$

We get elements closest to 1 if we pair  $u_1$  with  $y_2$  and  $u_2$  with  $y_1$ .

### 8.2

$$(a) \quad \text{RGA}(G(s)) = \begin{pmatrix} \frac{s-1}{s+1} & \frac{2}{s+1} \\ \frac{s-1}{s+1} & \frac{s-1}{s+1} \end{pmatrix}$$

gives

$$\text{RGA}(G(0)) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Since one wants to avoid to pair elements with negative RGA(0) the choice must be  $u_1 \leftrightarrow y_2$  and  $u_2 \leftrightarrow y_1$ .

### (b)

$$G(0) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

choose  $W_1 = G^{-1}(0)$  and  $W_2 = I$ , a controller achieving de coupling is given by

$$\begin{aligned} F(s) &= W_1 F^{\text{diag}}(s) W_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{11}(s) & 0 \\ 0 & F_{22}(s) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -F_{11}(s) & 2F_{22}(s) \\ -F_{11}(s) & F_{22}(s) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### 8.3

Idealt val av  $Q(s)$  är  $Q(s) = G^{-1}(s)$ , kansalt val:

$$Q(s) = \frac{\tau s + 1}{K(\lambda s + 1)}.$$

Detta ger

$$F(s) = \frac{Q(s)}{1 - Q(s)G(s)} = K\lambda \left( 1 + \frac{1}{\tau s} \right).$$

Alltså en PI-regulator med konstant förstärkning  $K_{PI} = \frac{\tau}{K\lambda}$  och I-tid  $T_I = \tau$ . Känslighetsfunktionen

$$S(s) = 1 - G(s)Q(s) = \frac{\lambda s}{\lambda s + 1}.$$

Komplementär känslighet

$$T(s) = G(s)Q(s) = \frac{1}{\lambda s + 1}.$$

Ealligt ovan har vi att

$$|S(i\omega)| \leq 1 \quad \forall \omega$$

vilket verkar trotsa Bodes integralsats, men kretsförstärkningen avtar inte snabbare än  $1/\omega$  och därför gäller inte Bodes sats.

### 8.4

Systemet är av icke-minfas typ. Vi använder ansatsen att ersätta detta nollställe med dess spegling i imaginära axeln,

$$Q(s) = \frac{s^2 + 5s + 6}{(6 + 3s)(\lambda s + 1)}.$$

Regulatorn blir då

$$F(s) = \frac{5}{6(1 + \lambda)} \left( 1 + \frac{6}{5s} + \frac{s}{5} \right) \frac{1}{\frac{3\lambda}{6\lambda+1}s + 1}.$$

alltså en PID-regulator med ett filter i serie för att erhålla en kausal regulator.

### 8.5

Vi har överföringsmatrisen

$$G(s) = \frac{1}{s/20 + 1} \begin{pmatrix} \frac{9}{s+1} & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

där Relative Gain Array (RGA)  $\Lambda$  ges av

$$\Lambda(s) = G(s) \cdot [G^{-1}(s)]^T \text{ (elementvis multiplikation).}$$

$\Lambda$  har alltid rad- och kolumnsumma 1, så för ett allmänt  $2 \times 2$ -system

$$G(s) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

fås

$$\Lambda(s) = \begin{pmatrix} \lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & \lambda \end{pmatrix}$$

med

$$\lambda = \frac{1}{1 - \frac{g_{12}g_{21}}{g_{11}g_{22}}}$$

Här får vi

$$\lambda(s) = \frac{1}{1 - \frac{2s}{94(s+1)}} = \frac{3}{2-s}$$

Vid den önskade skärfrekvensen  $\omega_c = 20$  rad/s har vi

$$\lambda(i20) = \frac{3}{2-i20} = \frac{3}{202} + i \frac{30}{202} \sim \text{litet}$$

och

$$1 - \lambda(i20) = \frac{199}{202} - i \frac{30}{202} \approx 1.$$

Därför skulle man vilja para  $y_2$  med  $u_1$  och  $y_1$  med  $u_2$ . För att undersöka om detta är möjligt måste vi kontrollera  $\Lambda(0)$ , som är

$$\Lambda(0) = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

Vi har  $1 - \lambda(0) < 0$  vilket gör att vi inte får para  $y_2$  med  $u_1$ . Därför måste  $y_1$  paras med  $u_1$  och  $y_2$  med  $u_2$ . Det är därför inte lämpligt att använda en diagonal regulator i detta fall utan att först göra någon form av frikoppling.

## 8.6

(a) Vi har överföringsmatrisen

$$G(s) = \frac{1}{s/20+1} \begin{pmatrix} \frac{9}{s+1} & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Polerna ges av MGN till underdeterminanterna

$$\begin{aligned} g_{11}(s) &= \frac{9}{(s/20+1)(s+1)} & g_{12}(s) &= \frac{2}{s/20+1} \\ g_{21}(s) &= \frac{6}{s/20+1} & g_{22}(s) &= \frac{4}{s/20+1} \end{aligned}$$

samt

$$\det G(s) = \frac{1}{(s/20+1)^2} \left( \frac{36}{s+1} - 12 \right) = \frac{24(1-s/2)}{(s/20+1)^2(s+1)},$$

vilket ger två poler i  $-20$  och en i  $-1$ . Nollställena ges av  $\det G'(s)$  normerat med polynomiet. Detta ger ett nollställe i 2. Vi har alltså ett nollställe i höger halvplan som måste brytas ut vid IMC-designen.

(b)

$$\begin{aligned} G^{-1}(s) &= (s/20+1) \begin{pmatrix} \frac{9}{s+1} & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{(s/20+1)(s+1)}{24(-s/2+1)} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & \frac{9}{s+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Spegla det instabila nollstället i  $G'(s)$  och lägg till faktorn  $(\lambda s + 1)$ .

$$Q(s) = \frac{(s/20+1)(s+1)}{24(\lambda s+1)(s/2+1)} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & \frac{9}{s+1} \end{pmatrix}$$

Detta ger

$$Q(s)G(s) = \frac{2-s}{2+s} I$$

och regulatorn blir

$$F_y(s) = (I - Q(s)G(s))^{-1}Q(s) = \frac{(s/20+1)(s+1)}{24s(\lambda s+1)} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & \frac{9}{s+1} \end{pmatrix}$$

## 8.7

Vi börjar med att notera att  $G_+(1) = 1$  i de bägge fallen, det vill säga  $G_+$  har rätt statisk förstärkning.

a) Återkopplingsregulatorn ges vid IMC design av uttrycket

$$F = G_+^{-1} \frac{H}{1 - HG_+}$$

Insättning ger

$$F(q) = \frac{q^{-1}(1-\lambda)(1-aq^{-1})}{a(1-\lambda q^{-1} - (1-\lambda)q^{-5})}$$

Vi kan notera att denna regulator visserligen är realiserbar men innehåller en tidsfördröjning.

b) Insättning ger i detta fall

$$F(q) = \frac{(1-\lambda)(1-aq^{-1})}{a(1-\lambda q^{-1} - (1-\lambda)q^{-4})}$$

Här fås en realiserbar regulator utan tidsfördröjning, det vill säga en ändring av reglerfelet leder direkt till en förändring av styrsignalen.

c) Det slutna systemet

$$G_c = \frac{GF}{1+GF} = HG_+$$

ges av

$$\frac{(1-\lambda)q^{-5}}{1-\lambda q^{-1}}$$

respektive

$$\frac{(1-\lambda)q^{-4}}{1-\lambda q^{-1}}$$

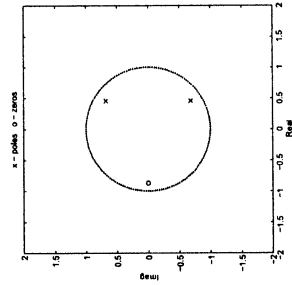
Kontentan är alltså att vi genom ett olämpligt val av  $G_+$  och  $G_-$  har introducerat en extra tidsfördröjning. Allmänt gäller ju att man gör uppdelningen av  $G$  i  $G_+$  och  $G_-$  för att erhålla en realiserbar regulator. Det betyder att man bör studera det  $F$  som fås och se till att den inte innehåller några "konstigheter".

## 8.8

Med en samplingstid  $T = 1$  fas approximativt överföringsfunktionen

$$G(q) = \frac{q^{-1}(0.41 + 0.35q^{-1})}{1 - 0.91q^{-1} + 0.67q^{-2}}$$

för det samplade systemet. (Detta kan som vanligt beräknas genom att realisera  $G(s)$  på tillståndsform, ta fram motsvarande samplade tillståndsform och sedan räkna ut överföringsfunktionen.) Det som är speciellt med detta system är att polerna är relativt odämpade ( $\zeta = 0.2$ ).



(a) Här ska vi invertera systemet och väljer  $G_- = G$  och  $G_+ = 1$ . Regulatorn blir

$$F = G_-^{-1} \frac{H}{1 - HG_+} = \frac{(1-\lambda)(1-0.91q^{-1} + 0.67q^{-2})}{(0.41 + 0.35q^{-1})(1-q^{-1})}$$

vilket är realiserbart.

(b) I detta fall ska vi inte invertera systemet. Vi väljer

$$G_- = q^{-1},$$

$$G_+ = \frac{(0.41 + 0.35q^{-1})}{1 - 0.91q^{-1} + 0.67q^{-2}}.$$

Anledningen till valet av  $G_-$  är att vi annars får en regulator med tidsfördröjning (jämför med föregående fall). Vi har också att  $G_+(1) = 1$ . Detta val leder till

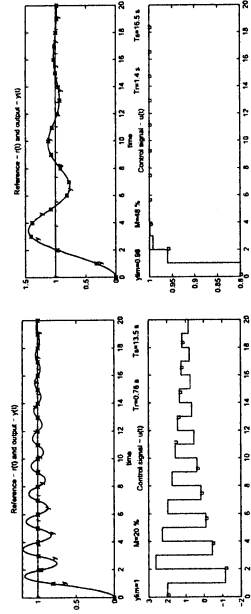
$$F = \frac{(1-\lambda)(1-0.91q^{-1} + 0.67q^{-2})}{1 - (1.32 + 0.59\lambda)q^{-1} + (0.32 + 1.26\lambda)q^{-2} - 0.67\lambda q^{-3}}$$

vilket är realiserbart.

(c) Det slutna samplade systemet ges av

$$G_c(q) = H(q)G_+(q) = \frac{GF}{1 + GF}.$$

Stegsvaren blir i fall a) respektive fall b):



Notera att om vi förkortar de odämpade polerna så fås mycket riktigt det slutna system som önskas. Men detta gäller bara i sampladpunkterna! Mellan dessa så syns fortfarande effekterna av polerna. Om vi å andra sidan inte förkortar bort dessa så finns det öppna systemet kvar i överföringsfunktionen för det återkopplade systemet (se ovan). Inget av dessa alternativ är uppenbarligen lämpliga i detta fall. Vill man fortfarande använda IMC så bör man välja ett annat filter  $H(q)$ .

## 8.9

Systemet ges av

$$\pi(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

där

$$F = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.1 \\ 0.2 & 0.6 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Samtliga tillståndsvariabler kan mätas. Vi kan använda återkopplingen

$$u(t) = -Lx(t) = -l_1x_1(t) - l_2x_2(t)$$

vilken ger det återkopplade systemet

$$x(t+1) = Fx(t) - GLx(t) = (F - GL)x(t)$$

$$GL = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ l_1 & l_2 \end{pmatrix}$$

ger

$$F - GL = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.1 \\ 0.2 - l_1 & 0.6 - l_2 \end{pmatrix}$$

Det återkopplade systemets karakteristiska ekvation ges av

$$\begin{aligned} \det(qI - F + GL) &= (q - 0.8)(q - 0.6 + l_2) + 0.1(0.2 - l_1) = \\ &= q^2 + (l_2 - 1.4)q + 0.48 - 0.8l_2 + 0.02 - 0.1l_1 = 0 \end{aligned}$$

Dead beat  $\Rightarrow$  alla poler skall placeras i origo. Detta fås då sekulärekvationen ges av

$$q^2 = 0$$

vilket fås då  $l_1 = -6.2$  och  $l_2 = 1.4$ . återkopplingen blir alltså

$$u(t) = 6.2x_1 - 1.4x_2$$

b) **Alternativ I.** Vi skattar båda tillstånden med en observatör.

$$\hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + Gu(t) + K(y(t) - H\hat{x}(t))$$

där  $y(t)$  är den mätbara utsignalen från systemet och

$$H = (1 \ 0)$$

eftersom det är  $x_1(t)$  som kan mätas, samt

$$K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

Skattningsfelet

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

lyder ekvationen

$$\tilde{x}(t+1) = (F - KH)\tilde{x}(t)$$

och vi väljer  $K$  så att egenvärdena till matrisen  $F - KH$  placeras i origo.

$$\det(qI - F + KH) = q^2 + (k_1 - 1.4)q + 0.48 - 0.6k_1 - 0.1k_2 + 0.02 = 0$$

Observatörens poler placeras i origo för  $k_1 = 1.4$  och  $k_2 = -3.4$ . Efter 2 steg gäller då

$$\tilde{x}(t) = 0$$

Efter ytterligare 2 steg gäller  $x(t) = 0$  om styrlagen  $u(t) = -L\hat{x}(t)$  används. Totalt 4 steg = totala antalet tillstånd i system och observatör.

b) **Alternativ II.** I Alternativ I rekonstruerade vi även  $x_1(t)$ , vilket var söseri eftersom det ju var mätbart. Använd istället en reducerad observatör.

Det mätbara tillståndet ges av

$$x_1(t+1) = 0.8x_1(t) - 0.1x_2(t)$$

och det icke mätbara tillståndet beskrivs av

$$x_2(t+1) = 0.6x_2(t) + 0.2x_1(t) + u(t)$$

Vi ansätter observatören

$$\hat{x}_2(t+1) = 0.6\hat{x}_2(t) + 0.2x_1(t) + u(t) + K(x_1(t+1) - 0.8x_1(t) + 0.1\hat{x}_2(t))$$

Felet  $\hat{x}_2(t) = x_2(t) - \hat{x}_2(t)$  lyder ekvationen

$$\begin{aligned} \hat{x}_2(t+1) &= x_2(t+1) - \hat{x}_2(t+1) = 0.6x_2(t) + 0.2x_1(t) + u(t) - \\ &- 0.6\hat{x}_2(t) - 0.2x_1(t) - u(t) - K(x_1(t+1) - 0.8x_1(t) + 0.1\hat{x}_2(t)) = \\ &= 0.6\hat{x}_2(t) + 0.1K\hat{x}_2(t) = (0.6 + 0.1K)\hat{x}_2(t) \end{aligned}$$

$\hat{x}_2(t) = 0$  efter ett steg om  $K = -6$  ger  $\hat{x}_2(t) = x_2(t)$  efter ett steg. Med styrlagen

$$u(t) = 6.2x_1(t) - 1.4\hat{x}_2(t)$$

blir  $x(t) = 0$  efter ytterligare 2 steg. Totalt 3 steg = totala antalet tillstånd. 2 tillstånd i systemet och 1 i observatören.

## 8.10

a) Sambandet mellan insignal och varvtal ges av

$$\dot{y} = -y + Ku$$

Sampling med samplingsintervallet  $T$  ger

$$y(t+T) = \alpha y(t) + K(1 - \alpha)u(t)$$

där  $\alpha = e^{-T}$ , d v s  $F = \alpha$  och  $G = K(1 - \alpha)$ . Tillståndsddead-beat (vi antar  $K = 1$ ) fås då

$$F - GL = \alpha - (1 - \alpha)l_1 = 0$$

d v s

$$l_1 = \frac{\alpha}{1 - \alpha}$$

vilket ger återkopplingen

$$u(t) = -\frac{\alpha}{1 - \alpha} + l_0 r(t)$$

Det slutna systemet ges av

$$y(t+T) = (1 - \alpha)l_0 r(t)$$

Statisk förstärkning ett, d v s  $y(t+T) = r(t)$  i stationärt tillstånd då  $r(t)$  är konstant. fäs då

$$l_0 = \frac{1}{1 - \alpha}$$

Om nu istället  $K = 1.5$  t ex fäs det slutna systemet

$$y(t+T) = \alpha(1 - 1.5)y(t) + 1.5r(t) = -0.5\alpha y(t) + 1.5r(t)$$

Antag nu att  $r(t)$  är ett steg med amplitud A. Då blir utsignalen i stationärt tillstånd

$$y(t) = \frac{1.5}{1 + 0.5\alpha} \cdot A \neq A$$

d v s vi får ett stationärt fel.

b) Vi inför integralverkan genom att införa det extra tillståndet

$$x_2(t+T) = \sum_{k=0}^t (r(k) - y(k))$$

vilket ger

$$x_2(t+T) = x_2(t) + r(t) - y(t)$$

Med  $x_1(t) = y(t)$  fäs

$$x(t+T) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} K(1-\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} r(t)$$
  
$$y(t) = (1 \ 0)x(t)$$

Vi använder nu styrlagen

$$u(t) = -Lx(t) + l_0 r(t)$$

Detta medför

$$F - GL = \begin{pmatrix} \alpha - l_1 K(1 - \alpha) & -l_2 K(1 - \alpha) \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tillståndsdeadbeat fäs då egenvärdet till  $F - GL$  placeras i origo, d v s då  $(K = 1)$

$$\alpha - l_1(1 - \alpha) + 1 = 0$$

och

$$\alpha - l_1(1 - \alpha) - l_2(1 - \alpha) = 0$$

Detta fäs med

$$l_1 = \frac{\alpha + 1}{1 - \alpha} \quad l_2 = -\frac{1}{1 - \alpha}$$

och ger det återkopplade systemet

$$x(t+T) = \begin{pmatrix} \alpha - K(\alpha + 1) & K \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} l_0 K(1 - \alpha) \\ 1 \end{pmatrix} r(t)$$

$$y(t) = (1 \ 0)x(t)$$

överföringsoperatorn blir nu

$$H(q) = (1 \ 0) \begin{pmatrix} q - \alpha + K(\alpha + 1) & -K \\ 1 & q - 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} l_0 K(1 - \alpha) \\ 1 \end{pmatrix} =$$
  
$$= \frac{1}{(q-1)(q-\alpha+K(\alpha+1))+K} \cdot (1 \ 0) \begin{pmatrix} q-1 & K \\ -1 & q-\alpha+K(\alpha+1) \end{pmatrix} \cdot$$
  
$$\begin{pmatrix} l_0 K(1-\alpha) \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{q^2 + [K(\alpha+1) - \alpha - 1]q + \alpha - K(\alpha+1) + K}{(q-1)l_0 K(1-\alpha) + K}$$
  
$$\cdot (q-1 \ K) \begin{pmatrix} l_0 K(1-\alpha) \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{q^2 + [K(\alpha+1) - \alpha - 1]q + \alpha - K(\alpha+1) + K}{q^2 + [K(\alpha+1) - \alpha - 1]q + \alpha - K(\alpha+1) + K}$$

d v s

$$H(1) = 1$$

vilket innebär att den statiska förstärkningen är ett oavsett värde på  $K$ . ( $K$  får dock ej vara sådant att slutna systemet är instabilt).

## 8.11

a)

$$x_i(t+1) = (0.5 - K)x_i(t) \Rightarrow K = 0.5$$

b)

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} 0.5 - K & 0.3 \\ 0.3 & 0.5 - K \end{pmatrix} x(t)$$

$K = 0.5 \Rightarrow$  systemets poler hamnar i  $\lambda = \pm 0.3$  dvs ej längre deadbeat. Insvängningsförloppet blir oscillativt.

c) V stängd: Karakteristisk ekvation

$$\lambda + K - 0.5 = 0$$

d v s stabilt om  $K < 1.5$ .

V öppen: Karakteristisk ekvation

$$\lambda^2 + (2K - 1)\lambda + K^2 - K + 0.16 = 0$$

Stabilitetsvillkor ur Schur-Cohn (om  $K > 0$ )

$$K^2 + K + 0.16 > 0$$

Alltid uppfyllt om  $K > 0$

$$K^2 - 3K + 2.16 > 0$$

d v s  $K < 1.2$  eller  $K > 1.8$ .

$$K^2 - K + 0.16 < 1$$

vilket ger  $K < 1.54$ . Stabilitetsområdet är således  $K < 1.2$ ,  $1.2 < K < 1.5 \Rightarrow$  stabilt när  $V$  stängd och instabilt när  $V$  öppen.

Alternativ: Utnyttja direkt att polerna ges av

$$\lambda_1 = 0.8 - K$$

$$\lambda_2 = 0.2 - K$$

## 8.12

a) Med tillståndsvektorn

$$\tilde{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t+k) \\ y(t+k-1) \\ \vdots \\ y(t) \end{pmatrix}$$

fås tillståndsbeskrivningen

$$\tilde{x}(t+1) = \underbrace{\begin{pmatrix} A & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}} \tilde{x}(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} B \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\tilde{B}} u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{(0 \ \dots \ 0 \ 1)}_{\tilde{C}} \tilde{x}(t)$$

b) Med

$$u(t) = -\tilde{L}\tilde{x}(t) = -(L \ 0 \ \dots \ 0)\tilde{x}(t)$$

får vi

$$\tilde{x}(t+1) = \begin{pmatrix} A-BL & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{x}(t)$$

Matrisen ovan är av typen

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ Q & Q \end{pmatrix}$$

Dess egenvärden är dels  $P$ 's egenvärden och dels  $Q$ 's. Detta betyder att matrisen dels har  $A - BL$ 's egenvärden och dels ett antal lika med noll. (Skifmatrisen har alla egenvärden i origo.)

c) återkopplingen i b kan skrivas

$$u(t) = -Lx(t+k)$$

alltså samma som för systemet utan tidsfördröjning, tillämpad på framtidatillstånd. Med allmän observatör fås

$$\tilde{\hat{x}}(t+1) = \tilde{A}\tilde{\hat{x}}(t) + \tilde{B}u(t) + \tilde{K}(y(t) - \tilde{C}\tilde{\hat{x}}(t))$$

Om  $\tilde{K} = 0$  fås helt enkelt simulerade värden på  $\tilde{\hat{x}}(t+k)$ , beräknade från insignalen enbart. Med valet

$$\tilde{K} = \begin{pmatrix} K \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

får man

$$\tilde{\hat{x}}(t+k+1) = A\tilde{\hat{x}}(t+k) + Bu(t) + K(y(t) - C\tilde{\hat{x}}(t))$$

vilket kan vara en lämplig struktur.

Otto Smith ger

$$u(t) = -G_R^*(q^{-1})[\hat{y}(t+k) + y(t) - \hat{y}(t)]$$

vdär

$$\hat{y}(t+k) = G^*(q^{-1})u(t)$$

är framsimulerad utsignal (svarar mot  $\tilde{K} = 0$  i observatören). Termen  $(y(t) - \hat{y}(t))$  kan ses som en korrektion å la observatör.

## 8.13

Det återkopplade systemets karakteristiska ekvation ges av

$$q^2 + (0.7 + l_2)q + (0.5l_2 + 0.1I_1 + 0.09) = 0$$



Polplacering i 0.2 ger den önskade ekvationen

$$(q - 0.2)^2 = q^2 - 0.4q + 0.04 = 0$$

vilken erhålls med  $l_1 = 5$  och  $l_2 = -1.1$ . Återkopplingen blir alltså

$$u(t) = -5x_1(t) + 1.1x_2(t)$$

### 8.14

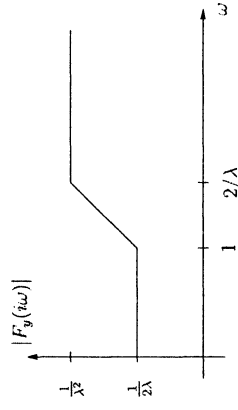
(a) 
$$\text{RGA}(G(0)) = G(0) \cdot * G^{-T}(0) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{12}{7} \\ \frac{12}{7} & -\frac{5}{7} \end{pmatrix}$$

(b) Undvik att para  $u_1 \leftrightarrow y_1$  och  $u_2 \leftrightarrow y_2$ .

### 8.15

### 8.16

$$\begin{aligned} Q(p) &= G^{-1}(p) \frac{1}{(\lambda p + 1)^2} = \frac{p(p+1)}{(\lambda p + 1)^2} \\ F_y(p) &= (1 - Q(p)G(p))^{-1} Q(p) = \frac{p+1}{\lambda^2 p + 2\lambda} = \frac{1}{2\lambda} \cdot \frac{1+p}{1 + \frac{p}{2\lambda}} \\ &\Rightarrow u = -\frac{1}{2\lambda} \cdot \frac{1+p}{1 + \frac{p}{2\lambda}} \end{aligned}$$



Hög bandbredd  $\Rightarrow \lambda$  liten  $\Rightarrow F_y(p) \approx \frac{1+p}{2\lambda} \Rightarrow$  PD-regulator

### 8.17

(a) For  $\alpha = 0.5$  one gets

$$G(0) = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.25 & 0.75 \end{pmatrix}$$

leading to

$$\text{RGA}(G(0)) = \begin{pmatrix} 1.125 & -0.125 \\ -0.125 & 1.125 \end{pmatrix}$$

The second alternative (to make the pairing  $u_1 - y_2$  and  $u_2 - y_1$ ) will hence give nonnegative elements in RGA, and should therefore be avoided.

(b) The requirement on static decoupling gives

$$W_1 = G^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.5 \end{pmatrix}$$

(c) The open loop system is

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

and the regulator is

$$u = W_1 K (r - y)$$

with  $W_1 = I$  when there is no decoupling, and  $K = 10I$ . The closed loop system is

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + BW_1 K (r - Cx) \\ &= (A - BW_1 K C)x + BW_1 K r \\ &= (A - W_1 K)x + W_1 K r \end{aligned}$$

where we have used that  $B = I$ ,  $C = I$ . The closed loop poles are the eigenvalues of  $A - W_1 K$ .

For the case of no decoupling,

$$A - W_1 K = \begin{pmatrix} -1.5 & 0.5 \\ 0.5 & -1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11.5 & 0.5 \\ 0.5 & -11.5 \end{pmatrix}$$

which has eigenvalues in  $-11.5 \pm 0.5$ , that is in  $s = -11$ ,  $s = -12$ .

For the case of decoupling,

$$A - W_1 K = \begin{pmatrix} -1.5 & 0.5 \\ 0.5 & -1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.5 \end{pmatrix} \times 10 \times I = \begin{pmatrix} -16.5 & 5.5 \\ 5.5 & -16.5 \end{pmatrix}$$

which has eigenvalues in  $-16.5 \pm 5.5$ , that is in  $s = -11$ ,  $s = -22$ .

### 8.18

The transfer function  $Q(s)$  becomes

$$Q(s) = \frac{1}{(\lambda s + 1)^2} G^{-1}(s) = \frac{1}{(\lambda s + 1)^2} \frac{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}{\omega_0^2}$$

and the regulator will be

$$\begin{aligned} F_y(s) &= [1 - Q(s)G(s)]^{-1}Q(s) \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{(\lambda s + 1)^2} \frac{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}{\omega_0^2}} \\ &= \frac{1}{\lambda^2 s^2 + 2\lambda s} \frac{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}{\omega_0^2} \end{aligned}$$

As  $F_y(0) = \infty$ , the regulator is integrating.

### 8.19

Eftersom regulatorn är stabil räcker det med att kontrollera överföringsfunktionen (se sidan 176 i kursboken).

$$\frac{G}{1 + GF} = Q$$

som antas vara stabil, vilket medför intern stabilitet.

Kontrollera motsvarande som i a-uppgiften.

$$\frac{G^0}{1 + G^0 F} = (Q + \Delta Q)$$

Summan av två stabila överföringsfunktioner är stabil!

$$\begin{aligned} G_c &= \frac{GF}{1 + GF} = FQ \\ G_c^0 &= \frac{G^0 F}{1 + G^0 F} = \underbrace{FQ}_{G_c} + \underbrace{F\Delta Q}_{\Delta G_c} \end{aligned}$$

### 8.20

Det återkopplade systemet är

$$G_c(s) = \frac{G(s)F(s)}{1 + G(s)F(s)} = G(s)Q(s) = sG(s)Q_1(s) + \frac{G(s)Q_2(s)}{G(0)}$$

Slutvärdesteoremet säger att (stabilt system)

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG_c(s) \frac{A}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} AG_c(s) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} A(sG(s)Q_1(s) + \frac{G(s)Q_2(s)}{G(0)}) = A Q_2(0) = A. \end{aligned}$$

Vi har alltså  $y(t) = r(t) = A$  stationärt, det vill säga inget reglerfel.

### 8.21

(a) Polynomnet är minsta gemensamma nämnaren till alla underdeterminanter till  $G(s)$  (Sats 3.5 sidan 64 i kursboken). Underdeterminanterna är

$$\begin{aligned} &1 \times 1 \quad \frac{4}{s+4} \quad \frac{16}{s+8} \quad \frac{16}{s+8} \quad \frac{4}{s+4} \\ &2 \times 2 \quad -16 \frac{(s+\frac{24}{5})(s+\frac{8}{3})}{(s+4)^2(s+8)^2}. \end{aligned}$$

Minsta gemensamma nämnaren är  $(s+4)^2(s+8)^2$ , det vill säga dubbelpol i  $s = -4$  och dubbelpol i  $s = -8$ .

Nollställespolynomnet är största gemensamma delaren till täljarna för de maximala underdeterminanterna (definition 3.5 sidan 66 i kursboken). Här har vi bara en maximal underdeterminant. Nollställena ligger alltså i  $s = -\frac{24}{5}$  och  $s = -\frac{8}{3}$ .

(b) Vi måste kontrollera RGA:n vid  $\omega = 0$  och  $\omega_c = 3$ .

$$\begin{aligned} G(0) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ RGA[G(0)] &= \begin{bmatrix} -0.3333 & 1.3333 \\ 1.3333 & -0.3333 \end{bmatrix} \\ G(i\omega_c) &= \begin{bmatrix} 0.6400 - 0.4800i & 1.7534 - 0.6575i \\ 1.7534 - 0.6575i & 0.6400 - 0.4800i \end{bmatrix} \Rightarrow \\ RGA[G(i\omega_c)] &= \begin{bmatrix} -0.1659 - 0.1356i & 1.1659 - 0.1356i \\ 1.1659 - 0.1356i & -0.1659 - 0.1356i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vi vill inte göra en parning som ger negativa element i  $RGA[G(0)]$  och vi vill ha en parning så att  $RGA[G(i\omega_c)]$  ser ut som en permuterad identitetsmatris (kursboken sidan 247). Vi ska alltså para ihop insignal 1 med utsignal 2 och insignal 2 med utsignal 1.

### 8.22

(a) Antag motsatsen. Detta kräver att  $F(s)$  har ett nollställe i  $s = p$ . En instabil pol/nollställe forkortning ger en instabil överföringsfunktion

$$\frac{G}{1 + FG}$$

dvs det återkopplade systemet blir inte internt stabilt.

(b) Tag t.ex.  $F(s) = \frac{s-p}{s+1}$  (vi antar att  $p \neq -1$ ) Då gäller

$$\begin{aligned} \frac{GF}{1+FG} &= \frac{1}{s+2} \cdot \frac{GF}{1+GF} \Big|_{s=p} = \frac{1}{p+2} \neq 1 \\ \frac{1}{1+FG} &= \frac{s+1}{s+2} \cdot \frac{F}{1+FG} = \frac{s-p}{(s+2)} \\ \frac{G}{1+FG} &= \frac{s+1}{(s-p)(s+2)} \end{aligned}$$

Alla fyra överföringsfunktionerna är stabila om  $Re(p) < 0$ .

(c) Tag  $F(s) = \frac{s-p}{s+1}$ , vilket motsvarar  $Q(s) = F/(1+FG) = \frac{s-p}{(s+2)}$ , vilket är en stabil överföringsfunktion, en enligt uppgift b) ger ett internt instabilt återkopplat system.

(d) Problemet i c) är att  $Q_1(s) = \frac{1}{s+2}$  inte uppfyller bivillkoret  $Q_1(p) = 1$ . Vi skall nu visa att detta bivillkor ger ett stabilt

$$\begin{aligned} \frac{GF}{1+FG} &= \frac{GQ}{1+FG} = 1 - GQ \\ \frac{G}{1+FG} &= \frac{Q}{1+FG} = G(1-GQ) \end{aligned}$$

$Q$  och  $GQ = Q_1$  är stabila.  $1 - GQ = 1 - Q_1$  har ett nollställe för  $s = p$ , dvs  $G(1 - GQ)$  är stabil. Detta innebär att alla fyra överföringsfunktioner är stabila.

## 8.23

(a) Underdeterminanterna till överföringsmatrisen för systemet ges av

$$\frac{1}{s+1}, \frac{0.5}{s+1}, \frac{0.5}{(s+1)^2}$$

MGN är  $(s+1)^2$ . Alltså har systemet två poler i  $-1$ . Den maximala underdeterminanten till överföringsmatrisen för systemet ges av  $0.5/(s+1)^2$  som redan är normerad så att den har polynomnet  $(s+1)^2$  som nämnare. Alltså har systemet inga nollställen.

(b) Det gäller att

$$\text{RGA} = G(0) \cdot * (G^{-1}(0))^T = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Alltså bör man para ihop  $u_1$  med  $y_1$  och  $u_2$  med  $y_2$ .

(c) Den envariabla kretsförstärkningen då  $y_1$  regleras med  $u_1$  ges av

$$L_1(s) = K_1 \left( 1 + \frac{1}{sT_1} \right) \frac{1}{s+1}$$

som har argument (för  $s = i\omega$ )

$$\arg(L_1(i\omega)) = -\frac{\pi}{2} + \arctan(\omega T_1) - \arctan \omega$$

Önskad fasmarginall på  $90^\circ$  för  $\omega = 1$  ger villkoret

$$\arg(L_1(i1)) = -\frac{\pi}{2}$$

som är uppfyllt om  $T_1 = 1$ . Med detta val på  $T_1$  fås

$$L(s) = K_1 \left( 1 + \frac{1}{s} \right) \frac{1}{s+1} = \frac{K_1}{s}$$

För att  $\omega = 1$  ska vara skärfrekvens krävs också att  $|L(i1)| = 1$ , vilket är uppfyllt för  $K_1 = 1$ .

Liknande räkningar ger att  $T_2 = 1$  och  $K_2 = 2$ .

(d) Det gäller att

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{0.5}{(s+1)^2} \\ 0 & \frac{0.5}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & W_{12}(s) \\ W_{21}(s) & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} + \frac{0.5}{(s+1)^2} W_{21}(s) & \frac{1}{s+1} W_{12}(s) + \frac{0.5}{(s+1)^2} \\ \frac{0.5}{s+1} W_{21}(s) & 1 \end{bmatrix}$$

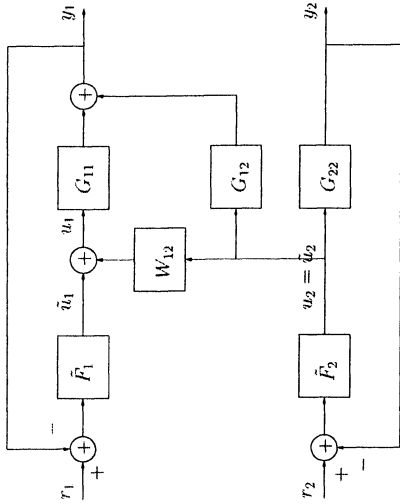
som ska vara diagonal för att systemet ska vara frikopplat. Detta ger följande villkor på  $W_{12}$  och  $W_{21}$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{s+1} W_{12}(s) + \frac{0.5}{(s+1)^2} &= 0 \\ \frac{0.5}{s+1} W_{21}(s) &= 0 \end{aligned}$$

som har lösning  $W_{21}(s) = 0$  och  $W_{12}(s) = -0.5/(s+1)$ . För att kunna rita blockschemat noteras att

$$\begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{0.5}{s+1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{U}_1(s) \\ \tilde{U}_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{U}_1(s) - \frac{0.5}{s+1} \tilde{U}_2(s) \\ \tilde{U}_2(s) \end{bmatrix}$$

Blockschemat syns i figuren nedan.



8.24

(a) Underdeterminanterna till överföringsmatrisen för systemet ges av

$$\frac{1}{s+1}, \frac{2}{s+1}, \frac{2}{(s+1)^2}$$

MGN är  $(s+1)^2$ . Alltså har systemet två poler i  $-1$ . Den maximala underdeterminanten till överföringsmatrisen för systemet ges av  $2/(s+1)^2$  som redan är normerad så att den har polynomiet  $(s+1)^2$  som nämnare. Alltså har systemet inga nollställen.

(b) Det gäller att

$$\text{RGA} = G(0) \cdot *(G^{-1}(0))^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Alltså bör man para ihop  $u_1$  med  $y_1$  och  $u_2$  med  $y_2$ .

(c) Den envariabla kretsförstärkningen då  $y_1$  regleras med  $u_1$  ges av

$$L_1(s) = K_1 \left( 1 + \frac{1}{sT_1} \right) \frac{1}{s+1}$$

som har argument (för  $s = i\omega$ )

$$\arg(L_1(i\omega)) = -\frac{\pi}{2} + \arctan(\omega T_1) - \arctan \omega$$

Önskad fasmarginal på  $90^\circ$  för  $\omega = 1$  ger villkoret

$$\arg(L_1(i1)) = -\frac{\pi}{2}$$

som är uppfyllt om  $T_1 = 1$ . Med detta val på  $T_1$  fås

$$L(s) = K_1 \left( 1 + \frac{1}{s} \right) \frac{1}{s+1} = \frac{K_1}{s}$$

För att  $\omega = 1$  ska vara skärffrekvens krävs också att  $|L(i1)| = 1$ , vilket är uppfyllt för  $K_1 = 1$ .

Liknande räkningar ger att  $T_2 = 1$  och  $K_2 = 0.5$ .

(d) Det gäller att

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{(s+1)^2} \\ 0 & \frac{2}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & W_{12}(s) \\ W_{21}(s) & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} W_{21}(s) & \frac{1}{s+1} W_{12}(s) + \frac{2}{(s+1)^2} \\ \frac{2}{s+1} W_{21}(s) & \frac{2}{s+1} \end{bmatrix}$$

som ska vara diagonal för att systemet ska vara frikopplat. Detta ger följande villkor på  $W_{12}$  och  $W_{21}$ :

$$\frac{1}{s+1} W_{12}(s) + \frac{2}{(s+1)^2} = 0$$

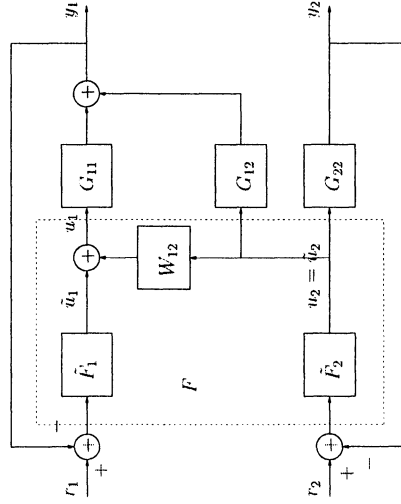
$$\frac{2}{s+1} W_{21}(s) = 0$$

som har lösning  $W_{21}(s) = 0$  och  $W_{12}(s) = -2/(s+1)$ . För att kunna rita blockschemat noteras att

$$\begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{U}_1(s) \\ \tilde{U}_2(s) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \tilde{U}_1(s) - 2\tilde{U}_2(s) \\ \tilde{U}_2(s) \end{bmatrix}$$

Blockschemat syns i figuren nedan.



## 9 Mimimring av kvadratiska kriterier: LQG

### 9.1

(a) The block diagram gives

$$E(s) = G(s)U(s)$$

where

$$G(s) = \frac{s(1+sT)}{s(1+sT) + K}$$

which is stable for all  $K > 0$ . The spectrum for  $e$  is now given by equation (5.15b) in the text book

$$\Phi_e(\omega) = |G(i\omega)|^2 \Phi_u(\omega)$$

$$|G(i\omega)|^2 = \left| \frac{i\omega - \omega^2 T}{K + i\omega - \omega^2 T} \right|^2 = \frac{\omega^2 + \omega^4 T^2}{(K - \omega^2 T)^2 + \omega^2}$$

i.e.

$$\Phi_e(\omega) = \frac{(\omega^2 + \omega^4 T^2)}{((K - \omega^2 T)^2 + \omega^2)} \frac{\omega_0^2}{(\omega^2 + \omega_0^2)}$$

(b)  $u$  can be described as white noise with variance 1 filtered thorough the system

$$G_1(s) = \frac{\omega_0}{s + \omega_0}$$

$e$  can thus be described as the output signal form the system  $G_1(s)G(s)$  where the input is white noise with variance 1.

To compute the variance  $V_e$  of  $e(t)$ , we write the system in state space form driven by a white noise process. Introduce the state  $x_1$  to describe the dynamics of  $G_1(s)$ , and the additional states  $x_2$  and  $x_3$  to describe  $e(t)$ . Note that

$$G(s) = \frac{s^2 + \frac{1}{T}s}{s^2 + \frac{1}{T}s + \frac{K}{T}} = 1 + \frac{-\frac{K}{T}}{s^2 + \frac{1}{T}s + \frac{K}{T}}$$

The total state space model reads

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\omega_0 & 0 \\ 1 & -1/T \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \omega_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} v$$

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -K/T \end{pmatrix} x$$

where  $v$  is a white noise variance with unit intensity.

To find the variance  $V_e$  of  $e(t)$ , one applies the formula

$$V_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -K/T \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -K/T \end{pmatrix}$$

$$= p_{11} + \frac{K^2}{T^2} p_{33} - \frac{2K}{T} p_{13}$$

237

where  $P = E x(t)x^T(t)$  is the covariance matrix of the state vector. This matrix is computed by solving the Lyapunov equation

$$0 = AP + PA^T + BB^T$$

or more explicitly,

$$0 = \begin{pmatrix} -\omega_0 & 0 & 0 \\ 1 & -1/T & -K/T \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega_0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/T & 1 \\ 0 & -K/T & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Equating the different elements lead to the following system of equations

$$0 = -2\omega_0 p_{11} + \omega_0^2$$

$$0 = -\omega_0 p_{12} + p_{11} - \frac{1}{T} p_{12} - \frac{K}{T} p_{13}$$

$$0 = -\omega_0 p_{13} + p_{12}$$

$$0 = 2p_{12} - \frac{2}{T} p_{22} - \frac{2K}{T} p_{23}$$

$$0 = p_{13} - \frac{1}{T} p_{23} - \frac{K}{T} p_{33} + p_{22}$$

$$0 = 2p_{23}$$

From these equations we find

$$p_{11} = \frac{\omega_0}{2}$$

$$p_{12} = \omega_0 p_{13}$$

$$p_{23} = 0$$

$$p_{22} = T p_{12} = \omega_0 T p_{13}$$

$$p_{33} = \frac{T}{K} (p_{22} + p_{13}) = \frac{T}{K} (1 + \omega_0 T) p_{13}$$

and finally

$$0 = -\omega_0^2 p_{13} + \frac{\omega_0}{2} - \frac{\omega_0}{T} p_{13} - \frac{K}{T} p_{13}$$

leading to

$$p_{13} = \frac{\omega_0}{2} \frac{1}{\omega_0^2 + \frac{\omega_0}{T} + \frac{K}{T}}$$

The variance of  $e(t)$  can now be evaluated as

$$V_e = p_{11} + \frac{K^2}{T^2} p_{33} - \frac{2K}{T} p_{13}$$

$$= \frac{\omega_0}{2} + \frac{K}{T} p_{13} (\omega_0 T - 1)$$

$$= \frac{\omega_0}{2} + \frac{K \omega_0}{T} \frac{T(\omega_0 T - 1)}{2 \omega_0^2 T + \omega_0 + K}$$

$$= \frac{KT + 1 + \omega_0 T}{2(\omega_0^2 T + \omega_0 + K)} \omega_0^2$$

238

Examine the derivative of  $V_c(K)$ :

$$\frac{d}{dK} V_c(K) = \frac{\omega_0^2(T^2\omega_0^2 - 1)}{2(K + \omega_0^2T + \omega_0)^2}$$

gives

$$\frac{d}{dK} V_c(K) > 0 \quad \omega_0 > 1/T$$

and

$$\frac{d}{dK} V_c(K) < 0 \quad \omega_0 < 1/T$$

**Answer:** For  $\omega_0 > 1/T$   $K$  should be chosen as small as possible, and for  $\omega_0 < 1/T$  as large as possible.

### 9.2

$$F = 1, \quad G = 1, \quad Q_1 = 1, \quad Q_2 = 1$$

gives the equation

$$S = S + 1 - \frac{S^2}{1 + S}$$

with the positive definite solution

$$S = 0.5 + \sqrt{0.25 + 1} = 1.618$$

$$L = \frac{S}{1 + S} = 0.618$$

### 9.3

The double integrator

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = (1 \ 0) x$$

$$V = \int_0^\infty (y^2 + \eta \cdot u^2) dt \Rightarrow Q_1 = 1, \quad Q_2 = \eta$$

control entity:  $z = y = Cx \Rightarrow M = C.$

$$A^T \bar{S} + \bar{S} A + M^T Q_1 M - \bar{S} B Q_2^{-1} B^T \bar{S} = 0$$

Put

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

the above can be written as:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & s_1 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\eta} \cdot \begin{pmatrix} s_2^2 & s_2 s_3 \\ s_2 s_3 & s_3^2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 1 - \frac{s_2^2}{\eta} = 0 \\ s_1 - \frac{s_2 s_3}{\eta} = 0 \\ 2s_2 - \frac{s_3^2}{\eta} = 0 \end{cases}, \quad \bar{S} \text{ positive definite} \Rightarrow \begin{cases} s_1 = \sqrt{2} \cdot \eta^{1/4} \\ s_2 = \eta^{1/2} \\ s_3 = \sqrt{2} \cdot \eta^{3/4} \end{cases}$$

$$L = Q_2^{-1} B^T \bar{S} = \frac{1}{\eta} \cdot (0 \ 1) \begin{pmatrix} \sqrt{2}\eta^{1/4} & \eta^{1/2} \\ \eta^{1/2} & \sqrt{2} \cdot \eta^{3/4} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\eta} \cdot (\eta^{1/2} \ \sqrt{2}\eta^{3/4}) = (\eta^{-1/2} \ \sqrt{2} \cdot \eta^{-1/4})$$

Now set  $\mu = \eta^{-1/4}$ . Then  $L = (\mu^2 \ \sqrt{2} \cdot \mu)$

$$u = -Lx \Rightarrow \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (\mu^2 \ \sqrt{2} \cdot \mu) \cdot x =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mu^2 & -\sqrt{2}\mu \end{pmatrix} x$$

$$0 = \left| \begin{matrix} s & -1 \\ \mu^2 & s + \sqrt{2} \cdot \mu \end{matrix} \right| = s^2 + \sqrt{2}\mu s + \mu^2$$

$$s = -\frac{\mu}{\sqrt{2}} \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{2} - \mu^2} = -\frac{\mu}{\sqrt{2}} \pm i \cdot \frac{\mu}{\sqrt{2}} =$$

$$= -\frac{\mu}{\sqrt{2}} \cdot (1 \pm i) = -\frac{1}{\sqrt{2} \cdot \eta^{1/4}} \cdot (1 \pm i)$$

If  $\eta$  is made smaller the poles will move further away from the origin, i.e.  $|L|$  becomes larger. A larger  $|L|$  yield a larger  $u(t)$ . Compare to the criterion!

### 9.4

Del 1. Integrera ekv från 0 till  $t$ :

$$\dot{x}(t) + \int_0^t x(s) ds = \sum_{k=0}^r u_k; \quad t_r \leq t < t_{r+1}$$

Inför

$$v_r = \sum_{k=0}^r u_k$$

och funktionen

$$v(t) = v_r \text{ om } t_r \leq t < t_{r+1}$$

Denna är styckvis konstant och med

$$z(t) = \int_0^t x(s) ds$$

fås tillståndsbeskrivningen

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v(t);$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$

Sampla!

$$\begin{pmatrix} z(kT+T) \\ x(kT+T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos T & \sin T \\ -\sin T & \cos T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(kT) \\ x(kT) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - \cos T \\ \sin T \end{pmatrix} v_k$$

$$y_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(kT) \\ x(kT) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z(kT+T) \\ x(kT+T) \\ v_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos T & \sin T & 1 - \cos T \\ -\sin T & \cos T & \sin T \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(kT) \\ x(kT) \\ v_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - \cos T \\ \sin T \\ 1 \end{pmatrix} v_k$$

$$y_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(kT) \\ x(kT) \\ v_k \end{pmatrix}$$

vilket är den sökta formen.

**Del 2. Inför**

$$v_t = \sum_{k=0}^{t-1} u(k)$$

som tillstånd:

$$\begin{pmatrix} x(t+1) \\ v_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ v_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G \\ 1 \end{pmatrix} u_t$$

och använd tillståndsdeklaration.

## 9.5

Systembeskrivning

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ H \end{pmatrix} \mu(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix} \tau_d(t)$$

$$y(t) = (1 \ 0) x(t) + v_m(t)$$

Riccati-ekvationen blir i stationärt tillstånd

$$(T \rightarrow \infty; \frac{ds}{dt} = 0)$$

$$0 = S \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix} S + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + S \begin{pmatrix} 0 \\ H \end{pmatrix} \frac{1}{\rho} (0 \ H) S$$

Komponentvis

$$0 = 1 - \frac{H^2}{\rho} s_{12}^2$$

$$0 = -\frac{H^2}{\rho} s_{12} s_{22} + s_{11} - \alpha s_{12}$$

$$0 = -\frac{H^2}{\rho} s_{22}^2 + 2s_{12} - 2\alpha s_{22}$$

$$s_{11} = \frac{\sqrt{\rho}}{H} \sqrt{\alpha^2 + \frac{2H}{\sqrt{\rho}}}$$

$$s_{12} = \frac{\sqrt{\rho}}{H}$$

$$s_{22} = \frac{\rho}{H^2} (\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \frac{2H}{\sqrt{\rho}}})$$

återkopplingen  $L$  ges av

$$L = Q_2^{-1} B^T S = \frac{1}{\rho} (0 \ H) \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\rho}{H}} \sqrt{\alpha^2 + \frac{2H}{\sqrt{\rho}}} & \frac{\sqrt{\rho}}{H} \\ \frac{\rho}{H^2} (-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \frac{2H}{\sqrt{\rho}}}) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\rho}} & \frac{1}{H} (-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \frac{2H}{\sqrt{\rho}}}) \end{pmatrix}$$

Separationssatsen säger att det är optimalt att i stället för de okända variablerna

$$x = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{v} \end{pmatrix}$$

återkoppla från de m h a Kalmanfiltret framräknade estimaten av  $x$ . Den optimala styrlagen blir

$$\mu(t) = - \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\rho}} & \frac{1}{H} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \frac{2H}{\sqrt{\rho}}} \end{pmatrix} \hat{x}$$

## 9.6

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Vi vill ha god robusthet kring frekvensen 0.5 rad/s, dvs vi vill att  $T(s) = \frac{F(s)G(s)}{1+F(s)G(s)}$  ska vara "liten" där. Eftersom  $T(s)$  är överföringsfunktion från mätbrus  $n(t)$ , till utsignal  $y(t)$  så bör följande angreppssätt fungera:

- Om vi använder oss av kalmanfiltret för skattning av  $\hat{x}(t)$  så vet vi att detta filter minimerar kovariansmatrisen för skattningsfelet. Alltså, den modell vi anger för  $n(t)$  "betyder" att, vid mätningarna av  $y(t)$ , så mycket som möjligt av de frekvenser där mätstörningarna är som kraftigast kommer att filtreras bort. Dvs,  $|T(i\omega)|$  blir liten där, vilket är vad vi vill.
- Då valet av  $K$  i observatören ej påverkar det slutna systemet,  $G_c(s)$ , kan vi använda oss av LQ-teknik (dvs välja  $Q_1, Q_2 \Rightarrow L$ ) för att erhålla ett önskat utseende på  $G_c(s)$ . (Vi skulle sen även kunna lägga till en länk,  $P(s)$ , som filtrerar referenssignalen,  $r(t)$ , och ändrar  $G_c(s)$  till  $P(s)G_c(s)$ .)

Genom att studera kalmanfiltrets överföringsfunktion från mätningarna  $y(t)$  till  $\hat{y}(t)$ , får vi en indikation på hur modellen för mätstörningarna påverkar dämpningen. Vi börjar med att ställa upp en tillståndsbeskrivning av  $G(s)$ :

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \rightarrow \dot{y} + y = u$$

Låt  $\bar{x}_1 = y, \bar{x}_2 = \dot{y} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \bar{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = (1 \ 0) \bar{x}(t) + n(t) \end{cases}$$

Eftersom vi för bruset vill ha en modell med mycket störningar kring  $\omega = 0.5$  rad/s kan vi välja poler i  $-0.01 \pm 0.5i$  och ett nollställe i  $s = 0$ ,

$$H(s) = \frac{K_n s}{s^2 + 0.02s + 0.2501}, \quad N(s) = H(s)\bar{N}(s), \quad \Phi_n(\omega) = 1,$$

som på styrbar kanonisk form blir:

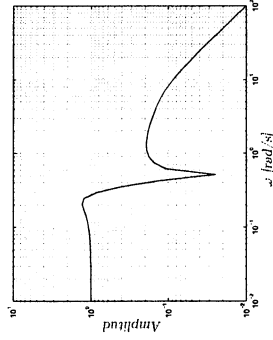
$$\begin{cases} \dot{x}_n(t) = \begin{pmatrix} -0.02 & -0.2501 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x_n(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bar{n}(t) \\ n(t) = (K_n \ 0) x_n(t) \end{cases}$$

Låt nu

$$x = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.02 & -0.2501 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bar{n}(t) \\ y(t) = (1 \ 0 \ K_n \ 0) x(t). \end{cases}$$

Om denna modell används för att välja  $K$  i observatören med hjälp av kalmanfiltertechnik får, för lämpligt värde på  $K_n$ , observatörens överföringsfunktion från  $y(t)$  till  $\hat{y}(t) = \hat{x}_1(t)$  enligt bodeplotten i figuren. Som synes är dämpningen stor för frekvenser runt  $\omega = 0.5$  rad/s.



## 9.7

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{p+1}u + \frac{1}{p+1}v \Rightarrow G(s) = \frac{1}{s+1} \\ y &= z + e, \quad \Phi_v(\omega) \equiv \tau_1, \quad \Phi_e(\omega) \equiv 1 \\ \text{minimize } J &= E\{q_1 z^2(t) + u^2(t)\} \end{aligned}$$

(a) Introduce the state  $x_1 = z$  which allows us to write the system as:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u + v \\ y = x_1 + e \\ z = x_1 \end{cases}$$

i.e.  $A = -1, B = 1, M = 1, Q_1 = q_1$  och  $Q_2 = 1, Q_{12} = 0$  are assumed. Hence, we cannot measure the state itself, but measure  $y$ . According to the separation theorem we can achieve the minimum of  $J$  if we



1. Estimate the state vector  $\hat{x}(t)$  using a Kalman filter.
2. Apply a state feedback according to  $u(t) = -L\hat{x}(t)$ , where  $L$  is determined according to LQ-theory.

In other words,

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})$$

where  $K = PC^T R_2^{-1}$  and  $P$  are obtained as the positive semi-definite symmetric solution to the equation

$$AP + PA^T + NR_1 N^T - PC^T R_2^{-1} C P = 0$$

which, in our case, becomes the scalar equation

$$p^2 + 2p - r_1 = 0$$

with solution

$$p = -1 + \sqrt{1 + r_1}$$

i.e.

$$K = -1 + \sqrt{1 + r_1}.$$

No use the feedback  $u = -L\hat{x}$  where  $L = Q_2^{-1} B^T S$ ,  $S$  solves

$$A^T S + SA + M^T Q_1 M - SBQ_2^{-1} B^T S = 0$$

which, using,  $M = 1$ ,  $Q_1 = q_1$  and  $Q_2 = 1$  gives

$$L = S = -1 + \sqrt{1 + q_1}.$$

The loop transfer function becomes:

$$\begin{aligned} G(s)F_y(s) &= \frac{1}{s+1} L \frac{1}{1+s+L+K} K = \\ &= \frac{(-1 + \sqrt{1 + r_1})(-1 + \sqrt{1 + q_1})}{(s+1)(s-1 + \sqrt{1 + r_1} + \sqrt{1 + q_1})} \end{aligned}$$

- (b)  $r_1$  and  $q_1$  have the same influence on the loop transfer function due to symmetry.

(c)

$$G(s)F_y(s) = \frac{(-1 + \sqrt{1 + r_1})(-1 + \sqrt{1 + q_1})}{(s+1)(s-1 + \sqrt{1 + r_1} + \sqrt{1 + q_1})}$$

Let  $r_1$  or  $q_1 \rightarrow \infty$ . What happens?

$$r_1 \rightarrow \infty \Rightarrow G(s)F_y(s) = \frac{(-1 + \sqrt{1 + q_1})L}{(s+1) \frac{(s-1 + \sqrt{1 + r_1} + \sqrt{1 + q_1})}{-1 + \sqrt{1 + r_1}}} \rightarrow \frac{-1 + \sqrt{1 + q_1}}{s+1}$$

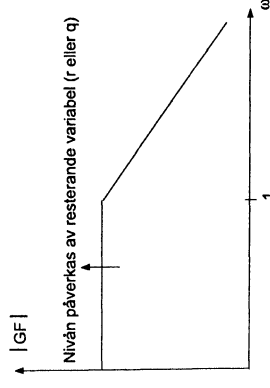
This corresponds to the ideal loop transfer function for input-LTR.

In the same way, we get

$$\lim_{q_1 \rightarrow \infty} G(s)F_y(s) = \frac{-1 + \sqrt{1 + r_1}}{s+1}$$

which, using a similar reasoning, is the ideal loop-transfer function for output-LTR.

By varying  $q_1$  and/or  $r_1$  we can thus shape the loop transfer function according to the sketch:



Figur 5: Loop transfer function sketch.

## 9.8

Låt  $G$  vara systemet,  $F$  regulatort,  $y$  utsignalen och  $v$  störsignalen. Detta ger sambanden

$$y = \frac{1}{1 + GF} v = Sv$$

$$u = \frac{F}{1 + GF} v$$

där  $S$  är känslighetsfunktionen.

$F$  är vald så att kriteriet

$$J(F) = E\{y(t)^2 + \alpha u(t)^2\}, \quad \alpha > 0$$

minimeras givet att  $\Phi_v(\omega) = \delta(\omega)$ .

Kriteriet kan skrivas som

$$J(F) = \int_{-\infty}^{\infty} [\Phi_y(\omega) + \alpha \Phi_u(\omega)] d\omega = \frac{1}{(1 + G_0 F_0)^2} + \alpha \frac{F_0^2}{(1 + G_0 F_0)^2}.$$

där  $F_0$  och  $G_0$  är regulatorns och systemets stationära förstärkning. Eftersom  $F$  är vald så att  $J(F)$  minimeras gäller

$$\frac{\partial J}{\partial F} = 0 = \frac{2\alpha F_0 - 2G_0}{(1 + G_0 F_0)^3}$$

vilket ger  $F_0 = G_0/\alpha$ . Känslighetsfunktionen blir då vid frekvensen  $\omega = 0$

$$S_0 = \frac{1}{1 + G_0 F_0} = \frac{1}{1 + G_0^2/\alpha}.$$

9.9

- (a) i) Determine a Kalman filter:  $\dot{x} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})$
- ii) Use the feedback:  $u = -L\hat{x}$ , with  $L$  given by LQ-theory.
- i) + ii) gives the controller  $F_y = L(sI - A + BL + KC)^{-1}K$ .
- i) State-space description:

Let  $x_1 = z$ ,  $x_2 = v$ ,  $v_1 = v$ ,  $v_2 = e$  and  $x = (x_1, x_2)^T$ . We find

$$\begin{cases} \dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}}_A x + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_B u + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_N v_1 \\ y = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}_C x + v_2 \end{cases}$$

Furthermore,

$$\begin{aligned} K_1 &= \Phi_{v_1}(\omega) = \Phi_{v_1}(\omega) = 1 \\ R_2 &= \Phi_{v_2}(\omega) = \Phi_{v_2}(\omega) = 1 \\ R_{12} &= \Phi_{v_1 v_2} = 0 \end{aligned}$$

The Kalman filter gain is given by  $K = PC^T P_2^{-1}$  where  $P$  satisfies

$$AP + PA^T + NR_1 N^T - PC^T R_2^{-1} CP = 0$$

This equation can be solved by postulating  $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix}$ . Solving the Riccati equation for  $P$ , we can disregard  $\varepsilon$  and set  $\varepsilon = 0$ .

This gives  $P = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$  and  $K = PC^T R_2^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

ii) Determine  $L$  so that

$$\min_L \int_0^\infty [x_1^2(t) + u^2(t)] dt = \min_L \int_0^\infty [y^T Q_1 y + u^T Q_2 u] dt$$

where  $Q_1 = Q_2 = 1$ .

The optimal  $L$  is given by:  $L = Q_2^{-1} B^T S$  where  $S$  satisfies

$$A^T S + SA + C^T Q_1 C - SBQ_2^{-1} B^T S = 0.$$

This equation can be solved by postulating  $S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{pmatrix}$ . In this case, we cannot directly set  $\varepsilon = 0$ . The Riccati equation for  $S$  becomes

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -\varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \end{pmatrix} \\ L &= \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Evaluating the different elements leads to the following equations:

the11 element :  $0 = -2s_{11} + 1 - s_{11}^2 \Rightarrow s_{11} = \sqrt{2} - 1$   
the12 elements :  $0 = s_{11} - \varepsilon s_{12} - s_{12} - s_{11} s_{12} \Rightarrow$   
 $s_{12} = \frac{s_{11}}{1 + s_{11} + \varepsilon} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + \varepsilon} \rightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \varepsilon \rightarrow 0$   
the22 element :  $0 = 2s_{12} - 2\varepsilon s_{22} - s_{12}^2 \Rightarrow s_{22} = \frac{1}{2\varepsilon} (2s_{12} - s_{12}^2) \approx \frac{1}{4\varepsilon}$ , small  $\varepsilon$

This gives  $L = Q_2^{-1} B^T S = \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 1 & 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$   
The LQG-controller becomes

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x}) \\ u = -L\hat{x} \end{cases}$$

with  $K$  and  $L$  as above.

The static gain of the sensitivity function: i) and ii) gives

$$\begin{aligned} F_y &= L(sI - A + BL + KC)^{-1} K \stackrel{s=0}{=} \\ &= \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + l_1 + k_1 & -1 + l_2 \\ k_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \dots = \\ &= \frac{l_1 + l_2}{1 - l_2} = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow S(0) &= \frac{1}{1 + F_y(0)G(0)} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(b) If we use the  $K$  that was determined in a) above (hence having specified that the desired loop gain is given by  $C(sI - A)^{-1}K$  so that we can compute a new  $L$  with LTR( $y$ ), i.e. set  $Q_1 = \alpha Q_2 = \alpha$  and solve:

$$\begin{aligned} L_{ltr} &= Q_2^{-1} B^T S \\ S &: A^T S + SA + C^T \alpha C - SBQ_2^{-1} B^T S = 0 \end{aligned}$$

The Riccati equation gives in this case for the 11-element

$$s_{11}^2 + 2s_{11} - \alpha = 0$$

The solution to the Riccati equation can hence be obtained as

$$\begin{aligned} s_{11} &= -1 + \sqrt{1 + \alpha} \\ s_{12} &= \frac{s_{11}}{1 + s_{11} + \varepsilon} = \frac{-1 + \sqrt{1 + \alpha}}{\sqrt{1 + \alpha} + \varepsilon} \\ s_{22} &= \frac{1 - 1 + \sqrt{1 + \alpha}}{2\varepsilon \sqrt{1 + \alpha} + \varepsilon} \left[ 2 - \frac{-1 + \sqrt{1 + \alpha}}{\sqrt{1 + \alpha} + \varepsilon} \right] \approx \frac{1}{2\varepsilon} \frac{\alpha}{1 + \alpha} \end{aligned}$$

For small values of  $\varepsilon$  it thus holds that

Bodediagram för  $k = 1$  givet. Resonanstopp för  $w_0 \approx 0.14$ .

Vi inför mätbrus: Låt  $y = z + v_2$ , där  $v_2$  färgat mätbrus. Med styrlagen  $u = -L\dot{x} + \hat{p}r$  kan vi skriva  $z$  som

$$z = G_c r - T v_2 + \hat{s} v_1.$$

Vi ser här att genom att låta spektrat för  $v_2$  vara stort för  $w = w_0$  kommer  $T$  att tvingas vara liten där. Låt alltså  $v_2$  vara färgat brus med resonanstopp i  $w_0$ . Detta kan åstadkommas genom att t ex välja poler i  $-0.01 \pm 0.14i$  och nollställe i 0, dvs

$$v_2 = \frac{k_2 p}{p^2 + 0.021p + 0.02} w,$$

där  $w$  är vitt brus.

Realisering av  $v_2$ :

$$\dot{x}_v = \underbrace{\begin{pmatrix} -0.02 & -0.02 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A_v} x_v + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B_v} w$$

$$v_2 = \underbrace{\begin{pmatrix} k_2 & 0 \end{pmatrix}}_{C_v} x_v$$

Den utökade modellen fås nu som

$$\dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A_v \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ B_v \end{pmatrix} w, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ x_v \end{pmatrix}$$

$$y = (M \quad C_v) \bar{x}$$

med  $A, B, M, A_v, B_v, C_v$  enligt ovan

### 9.11

(a) Vi har att  $A = B = C = N = M = 1$ . Riccati-ekvationen för Kalmanfiltret reduceras därmed till

$$2P + R_1 - \frac{P^2}{R_2} = 0.$$

vilken har den p.s.d. lösningen  $P = R_2 + R_2 \sqrt{1 + \frac{R_1}{R_2}}$ . Kalmanfilterförstärkningen blir alltså

$$K = \frac{1}{R_2} P = 1 + \sqrt{1 + \frac{R_1}{R_2}} = 1 + \sqrt{1 + \beta}.$$

För tillstandsaterkopplingen gäller dualt att

$$L = \frac{1}{Q_2} S = 1 + \sqrt{1 + \frac{Q_1}{Q_2}} = 1 + \sqrt{1 + \alpha}.$$

$$S = \begin{pmatrix} -1 + \sqrt{1 + \alpha} & -\frac{1 - \sqrt{1 + \alpha}}{\sqrt{1 + \alpha}} \\ \frac{-1 + \sqrt{1 + \alpha}}{\sqrt{1 + \alpha}} & \frac{1}{2(1 + \alpha)} \end{pmatrix}$$

The corresponding feedback gain is

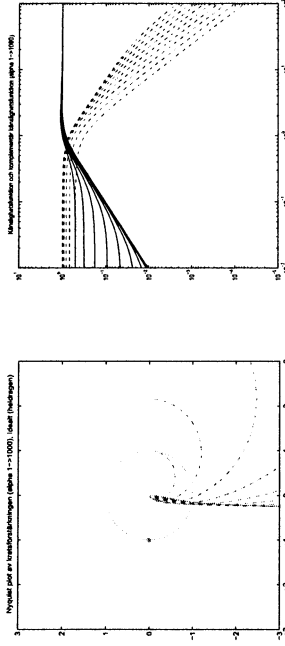
$$L_{tr} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \alpha} - 1 & \frac{\sqrt{1 + \alpha} - 1}{\sqrt{1 + \alpha}} \end{pmatrix}$$

The static gain of the sensitivity function ( $F_y(0) = \alpha$ ):

$$S(0) = \frac{1}{1 + F_y(0)G(0)} = \frac{1}{1 + \alpha} \rightarrow 0 \text{ when } \alpha \rightarrow \infty$$

(Do not confuse  $S(s)$  with the  $S$ -matrix that appears in the Riccati equation above!)

A Nyquist plot of how  $G F_y$  is shaped towards the desired loop transfer  $C(sI - A)^{-1}K$  (solid curve) as  $\alpha : 1 \rightarrow 1000$  is shown in the left figure, while the right figure shows a bode plot of how the sensitivity functions (solid) and the complementary sensitivities (dashed) change as  $\alpha : 1 \rightarrow 1000$ . Note in particular the improved disturbance rejection at low frequencies when  $\alpha$  increases.



### 9.10

$$G : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ z = Mx \end{cases}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ w_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2}w_0^2 & -0.01 & 0.01 \\ \frac{1}{2}w_0^2 & 0.01 & -0.01 \end{pmatrix}, \quad w_0^2 = \frac{k}{50}$$

Regulatorn blir alltså

$$F_y(p) = L(p-1+L+K)^{-1}K = \frac{(1+\sqrt{1+\alpha})(1+\sqrt{1+\beta})}{p+1+\sqrt{1+\alpha}+\sqrt{1+\beta}}$$

- (b) Det slutna systemets poler ges av egenvärdena till  $A - BL$  och  $A - KC$ . Vi får således poler i

$$-\sqrt{1+\alpha} \quad \text{och} \quad -\sqrt{1+\beta}.$$

Ett litet straff på  $u$  ( $\alpha$  stor) medför alltså en pol långt in i vänster halvplan, dvs ett snabbt system. Omvänt ger ett stort straff på  $u$  ( $\alpha$  liten) en pol nära  $-1$ , dvs det ursprungliga systemets pol speglas i den imaginära axeln. Duallt för Kalmanfiltret.

### 9.12

Kretsförstärkningen är

$$L(sI - A)^{-1}B = \frac{18}{(s-1)(s+2)}$$

Nyquistkurvan kommer alltså att närma sig origo med vinkeln  $-180^\circ$ . En LQ-optimal kretsförstärkning har dock alltid en asymptotisk fas på  $-90^\circ$ .

### 9.13

### 9.14

### 9.15

### 9.16

### 9.17

En tillståndsrealisering av systemet på observerbar kanonisk form är

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \begin{pmatrix} 1.7 & 1 \\ -0.7 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0.9 \\ -0.6 \end{pmatrix} \Delta u(t) \\ y(t) &= (1 \ 0) x(t) \end{aligned}$$

Referenssignal kan införas rna extra tillstånd. Bilda därför den utökade tillståndsvektorn

$$\bar{x}(t) = (x_1(t) \ x_2(t) \ r(t+1) \ r(t+2) \ r(t+3))^T.$$

Detta ger den utökade tillståndsmodellen

$$\bar{x}(t+1) = \begin{pmatrix} 1.7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{x}(t) + \begin{pmatrix} 0.9 \\ -0.6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta u(t)$$

$$y(t) = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) \bar{x}(t)$$

Tillståndsaterkopplingen erhålls genom att iterera Riccati-ekvationen

$$S_{t+1} = A^T S_t A - A^T S_t B (B^T S_t B + Q_2)^{-1} B^T S_t A + Q_1$$

$N - 1 = 2$  gånger och bildar

$$L = -(B^T S_2 B + Q_2)^{-1} B^T S_2 A.$$

För det aktuella kriteriet gäller att

$$Q_1 = S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = 0.1$$

vilket ger

$$L = (-1.7483 \ -1.0733 \ 0 \ 0.8947 \ 0.0929 \ 0.0095)$$

Alltså

$$\begin{aligned} \Delta u(t) &= -1.7483x_1(t) - 1.0733x_2(t) \\ &\quad + 0.8947r(t+1) + 0.0929r(t+2) + 0.0095r(t+3) \end{aligned}$$

Nu gäller dock att

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= -0.7x_1(t-1) - 0.6\Delta u(t-1) = -0.7y(t-1) - 0.6\Delta u(t-1) \end{aligned}$$

Vilket insatt i uttrycket för  $\Delta u(t)$  ovan ger

$$\begin{aligned} \Delta u(t) &= 0.644\Delta u(t-1) - 1.7483y(t) + 0.7513y(t-1) \\ &\quad + 0.8947r(t+1) + 0.0929r(t+2) + 0.0095r(t+3) \end{aligned}$$

9.18

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Q_2 = 0.5$$

$$S(A, B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0.2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{styrbar} \Rightarrow \text{stabiliserbar}$$

Det existerar alltså en optimal återkoppling, som ges av

$$L = (B^T S B + Q_2)^{-1} B^T S A$$

$$S = A^T S A + Q_1 - A^T S B (B^T S B + Q_2)^{-1} B^T S A$$

där  $S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$  är symmetrisk och positivt semidefinit.

$$\Rightarrow \begin{cases} s_{11} = 1 \\ s_{12} = 0 \\ s_{22} = 1 + 0.04s_{22} - \frac{0.04s_{22}^2}{s_{22} + 0.5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow s_{22} = 1.013 \Rightarrow L = \begin{pmatrix} 0 & 0.134 \end{pmatrix}$$

Återkopplingen blir  $u(t) = -0.134x_2(t)$ .

(b) Med återkopplingen  $u(t) = -Lx(t)$  har vi

$$x(t+1) = (A - BL)x(t)$$

som är stabil om egenvärdena till  $A - BL$  ligger innanför enhetscirkeln.

Låt  $l = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix}$ .

$$\det(\lambda I - A + BL) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + (l_2 - 0.2)\lambda + l_1 = 0$$

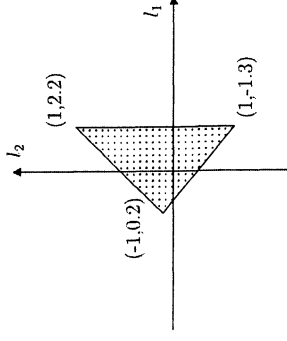
Inför Möbiusavbildningen

$$s = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \Rightarrow \lambda = \frac{s + 1}{s - 1}$$

från området innanför enhetscirkeln till vänstra halvplanet.

$$\Rightarrow (0.8 + l_2 + l_1)s^2 + 2(1 - l_1)s + 0.2 - l_2 + l_1 = 0$$

Routh-Hurwitz ger att systemet är stabilt om alla koefficienterna i polynomet ovan har samma tecken. I detta fall ger endast positiva koefficienter ett område i planet. Området illustreras i figuren.



9.19

(a) På tillståndsform kan den framtagna modellen skrivas

$$\frac{d}{dt}x_1(t) = -x(t) + u(t) + v_1(t)$$

$$y(t) = x(t)$$

där  $x_1(t) = \Delta h(t)$ ,  $u(t) = \Delta u_1(t)$  och  $v(t) = \Delta v_2(t)$ .

Diskretisering med samplingsintervallet  $T$  ger

$$x_1(t+1) = e^{-T}x_1(t) + (1 - e^{-T})u(t) + (1 - e^{-T})v_1(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

Här har vi antagit att även störledet är konstant mellan samplingsstillfällena. För att undvika kvarstående fel vid stegförändring införs integraltillståndet

$$x_2(t) = \frac{1}{q-1}e(t) = \frac{1}{q-1}(\tau(t) - y(t))$$

$$\Rightarrow x_2(t+1) = x_2(t) - x_1(t) + \tau(t)$$

Den utökade modellen, med integral verkan för LQG-designen blir

$$x(t+1) = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-T} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_A x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 - e^{-T} \\ 0 \end{bmatrix}}_B u(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 - e^{-T} \\ 0 \end{bmatrix}}_N v_1(t)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

$$z(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_M x(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}_C x(t)$$



9.21

The highest (relative penalty) of  $u$  appears for case 2. It results in the slowest step response, curve A, and the smallest  $u$  values, curve iii.

9.22

An intermediate case in terms of penalties is case 1, with an intermediate settling time, curve B, and an intermediate size of the input, curve i.

Cases 3 and 4 differ in the relative weighting of  $x_2$ , which is the time derivative of  $y$ . The highest weighting of  $x_2$  occurs for case 4, which results in the somewhat slower time response, curve C. Hence case 3 corresponds to curve D. Cases 3 and 4 correspond to curves ii, iv.

In summary

- case 1 – curves B, i
- case 2 – curves A, iii
- case 3 – curves D, ii (or iv)
- case 4 – curves C, iv (or ii)

9.23

- a) The general rule is that an increased  $R_1$  decreases  $S$ . Similarly, an increased  $R_2$  decreases  $T$ .

Hence the result is

- case 1 – curves A, c
- case 2 – curves C, b
- case 3 – curves B, a

- b) The Kalman gain is independent of a rescaling of the covariance matrices. If  $R_1$  and  $R_2$  gives a solution  $P$  to the Riccati equation and a Kalman gain  $K$ , then the penalty matrices  $\beta R_1$  and  $\beta R_2$  gives a solution  $\beta P$  and the same Kalman gain. The regulator will hence be the same as in case 1, and the sensitivity functions will hence of course be identical to those of case 1.

9.24

- (a) Den nya tillståndsvektorn och insignalen är

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \quad \bar{u} = \dot{u}.$$

Detta ger direkt det utökade systemet

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}\bar{u} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{u}$$

$$y = [C \ 0] \bar{x}$$

- (b) Styrslagen har formen

$$\bar{u} = \dot{u} = -\bar{L}\bar{x} = -[L \ l_{n+1}] \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = -Lx - l_{n+1}u.$$

Laplacetransformera styrslagen

$$sU = -LX - l_{n+1}U \Rightarrow U = -\frac{1}{s + l_{n+1}}LX$$

Man ska alltså lagpassfiltrera signalen som motsvarar återkopplingen från de ursprungliga tillstånden. Genom att de höga frekvensinnehållet försvinner kan inte styrsignalen ändra sig hur fort som helst.

## 10 Att forma kretsförstärkningen

### 10.1

The criterion to be minimized is the  $\mathcal{H}_2$ -norm of  $G_{ec}$ .

The system on state-space form

$$\dot{x}_1 = -x_1 + u$$

$$y = x_1$$

Weight functions

$$W_u(s) = 5, \quad W_T(s) = 0.5, \quad W_S(s) = \frac{1}{s}$$

Form the extended system  $G_0$ :

$$z_1 = W_u u = 5u$$

$$z_2 = W_T C u = 0.5x_1$$

$$z_3 = W_S(Cu + w) = x_2$$

where  $x_2$  is introduced as a new state via

$$x_2 = \frac{1}{p}(Gu + w) \Leftrightarrow \dot{x}_2 = x_1 + w$$

This gives

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} w \\ z &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y &= (1 \ 0) x + w \end{aligned}$$

Is this on innovation form? Examine the eigenvalues to  $A - NC$ !

$$A - NC = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

which has eigenvalues in  $\lambda = -1$  and  $\lambda = 0$ . The system is thus marginally in innovation form. Check  $M$  and  $D$ .

$$D^T(M \ D) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Thus, form a new input  $\tilde{u}$  as

$$\tilde{u} = (D^T D)^{1/2} u + (D^T D)^{-1/2} D^T M x = 5u \Leftrightarrow u = \frac{1}{5} \tilde{u}$$

This is a pure scaling of the input, and we get a new  $B$ -matrix

$$\tilde{B} = \frac{1}{5} B$$

Solve the Riccati equation:  $A^T S + SA + M^T M - S \tilde{B} \tilde{B}^T S = 0$

Postulate

$$S = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \end{pmatrix}$$

which gives

$$\begin{pmatrix} -s_1 + s_2 & -s_2 + s_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -s_1 + s_2 & 0 \\ -s_2 + s_3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{25} \begin{pmatrix} s_1^2 & s_1 s_2 \\ s_1 s_2 & s_2^2 \end{pmatrix} = 0$$

Hence

$$\begin{cases} -2s_1 + 2s_2 + 0.25 - \frac{1}{25}s_1^2 = 0 \\ -s_2 + s_3 - \frac{1}{25}s_1 s_2 = 0 \\ 1 - \frac{1}{25}s_2^2 = 0 \end{cases}$$

which has the positive definite solution  $s_1 = 4.686$  and  $s_2 = 5$ . The state feedback for the scaled system is thus given by

$$\tilde{L} = \tilde{B}^T S = \left(\frac{1}{5}s_1 \quad \frac{1}{5}s_2\right) = (0.937 \ 1)$$

For the original system, we get

$$L = \frac{1}{5} \tilde{L} = (0.187 \ 0.2)$$

The controller is hence given by

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + N(y - C\hat{x}) \\ u &= -L\hat{x} \end{aligned}$$

## 10.2

Kriteriet som skall minimeras är  $\mathcal{H}_\infty$ -normen av  $G_{er}$ . Det utökade systemet blir samma som i föregående uppgift. Uppgiften kan också lösas med t.ex. MATLAB genom att använda sig av koden

```
% Systembeskrivning
G = tf(1, [1 1]);

A = [-1 0; 1 0];
B = [1; 0];
Btilde = B/5;
C = [1 0];
M = [0; 1];
N = [0 0; 0.5 0; 0 1];
D = [5; 0; 0];

% Viktfunktioner
Ws = tf(1, [1 0]);
Wt = tf(0.5, 1);
Wu = tf(5, 1);

% Variabelbyte nödvändigt
Mtilde = ( eye(3) - D*inv(D'*D)*D')*M;
Dtilde = D*(D'*D)^(-1/2);

Dtilde'*[Mtilde Dtilde]

% Välj minsta gamma som ger pos.def. lösning
% och ett stabilt slutet system.
gamma = 5.2;
```



(b) We first verify that the state-space description is on the form (10.7) in the text book, and that the condition (10.8) is satisfied. We then observe that the problem is an  $H_2$ -optimal control problem according to Ch. 10.3. Thus, solve the Riccati equation

$$-S - S + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - S^2 = 0$$

This equation has the positive solution  $S = \sqrt{2} - 1$ . This gives  $L = S = \sqrt{2} - 1$ . The transfer function of the controller is obtained by taking the Laplace transform of the state-space equations describing the controller dynamics:

$$s\tilde{X}(s) = -\tilde{X}(s) + U(s) + Y(s); \quad U(s) = -(\sqrt{2} - 1)\tilde{X}(s)$$

which gives  $U(s) = -\frac{\sqrt{2}-1}{s+\sqrt{2}}Y(s)$ .

(c) It holds that

$$Z(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(s) \\ W(s) \end{bmatrix}$$

$$Y(s) = W(s)$$

$$U(s) = -\frac{\sqrt{2}-1}{s+\sqrt{2}}Y(s) = -\frac{\sqrt{2}-1}{s+\sqrt{2}}W(s)$$

This implies that

$$Z(s) = \frac{1}{s+\sqrt{2}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}}_{G_{rc}(s)} W(s)$$

Furthermore, it holds that

$$\|G_{rc}\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} (G_{rc}(i\omega)G_{rc}^T(-i\omega)) d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{rc}^T(-i\omega)G_{rc}(i\omega)d\omega$$

$$= \frac{2-\sqrt{2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} d\omega$$

$$= \frac{2-\sqrt{2}}{2\pi} \left[ \sqrt{2} \arctan \frac{\omega}{\sqrt{2}} \right]_{-\infty}^{\infty} = \sqrt{2} - 1$$

Hence,  $\|G_{rc}\|_2 = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$ .

(d) The closed-loop transfer function can be computed from

$$Z(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(s) \\ W(s) \end{bmatrix}$$

$$Y(s) = W(s)$$

$$U(s) = -KY(s) = -KW(s)$$

```
% Lös Riccati-ekvationen
Q = Mtilde'*Mtilde;
R = Btilde*Btilde'-M*N'/gamma^2;

[P1,P2]=aresolv(A,Q,R);
P = P2/P1;
eig(P)
eig(A-Btilde*Btilde'*P)

% upphäv variabelbyte!
L = Btilde'*P/5;

% Räkna ut regulatorn
Fss = ss(A-B*L-N*C,N,L,0);
Fy = tf(Fss)

% Kretsförstärkningen
G0 = Fy*G;

% Räkna ut S, T, G_wu
S = minreal(1/(1+G0));
T = minreal(G0/(1+G0));
Gwu = minreal(-Fy*S);

% Kolla hur snyggt det blev
figure(1)
sigma(gamma*inv(Ws),S)
figure(2)
sigma(gamma*inv(Wt),T)
figure(3)
sigma(gamma*inv(Wu),Gwu)
figure(4)
step(S,T)
```

### 10.3

(a) A Laplace transform of the state space equations yields

$$sX(s) = -X(s) + U(s) + W(s)$$

$$Z(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} X(s) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} U(s)$$

$$Y(s) = W(s)$$

from which it follows that  $X(s) = \frac{1}{s+1}(U(s) + W(s))$  and that  $Z_1(s) = U(s)$ ,  $Z_1(s) = X(s) = \frac{1}{s+1}(U(s) + W(s))$ , and  $Y(s) = W(s)$ .

This gives

$$Z(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} -K \\ \frac{1-K}{s+1} \\ 1 \end{bmatrix}}_{G_{ec}(s)} W(s)$$

Furthermore, it holds that

$$\begin{aligned} \|G_{ec}\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} \left( G_{ec}(i\omega) G_{ec}^T(-i\omega) \right) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{ec}^T(-i\omega) G_{ec}(i\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ K^2 + \frac{(1-K)^2}{\omega^2 + 1} \right] d\omega \end{aligned}$$

This integral is finite only if  $K = 0$ . Thus, it has to be this value of  $K$  that minimizes  $\|G_{ec}\|_2^2$ . Furthermore, for  $K = 0$ , the integral evaluates to

$$\frac{1}{2\pi} [\arctan \omega]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2}$$

Hence, it holds that  $\|G_{ec}\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

## 10.4

(a) Taking the Laplace transform of the state-space equations gives

$$\begin{aligned} s\hat{X}(s) &= -X(s) + U(s) + W(s) \\ Z(s) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} X(s) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} U(s) \\ Y(s) &= W(s) \end{aligned}$$

from which it follows that  $X(s) = \frac{1}{s+1}(U(s) + W(s))$  and that  $Z_1(s) = U(s)$ ,  $Z_2(s) = X(s) = \frac{1}{s+1}(U(s) + W(s))$ , and  $Y(s) = W(s)$ .

(b) We first verify that the state-space description is on the form (10.7) in the text book, and that the condition (10.8) is satisfied. We then note that the problem is an  $\mathcal{H}_{\infty}$ -optimal control problem according to Ch. 10.4. We should hence solve the Riccati equation

$$-S - S + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T [0 \quad 1] + S(\gamma^{-2} - 1)S = 0$$

for  $\gamma = 1$ . This equation has the solution  $S = 1/2$  which is positive (and thus positive semidefinite). This gives  $L = S = 1/2$ . We observe that  $-1 - 1 \times L = -3/2$  is a stable matrix, hence  $L = 1/2$  is a valid solution.

(c) Now, study the same problem as in (b) with 1 replaced by  $\gamma$ , i.e. determine  $L$  such that  $\|G_{ec}\|_{\infty} \leq \gamma$  and the closed-loop system is internally stable. Then

find the smallest value of  $\gamma$  for which there is a solution. To this end, solve the Riccati equation

$$-S - S + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T [0 \quad 1] + S(\gamma^{-2} - 1)S = 0$$

for arbitrary  $\gamma$ . If  $\gamma \neq 1$  the solution is given by

$$S = \frac{1}{\gamma^{-2} - 1} \pm \frac{\sqrt{2 - \gamma^{-2}}}{|\gamma^{-2} - 1|}$$

A real solution exists if and only if  $2 - \gamma^{-2} \geq 0$  which is equivalent with the condition that  $\gamma \geq 1/\sqrt{2}$ . For  $\gamma = 1/\sqrt{2}$  we find  $S = 1$  which is positive (and hence positive semi-definite). This gives  $L = S = 1$ . For this value of  $L$ ,  $-1 - 1 \times L = -2$  which is a stable matrix, hence  $L = 1$  is a solution that minimizes  $\|G_{ec}\|_{\infty}$  and renders the closed-loop system internally stable. The transfer function of the controller is obtained by taking the Laplace transform of the state-space equations for the controller dynamics:

$$s\hat{X}(s) = -\hat{X}(s) + U(s) + Y(s); \quad U(s) = -\hat{X}(s)$$

which gives  $U(s) = -\frac{1}{s+2}Y(s)$ .

(d) The closed-loop transfer function can be computed from

$$\begin{aligned} Z(s) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(s) \\ W(s) \end{bmatrix} \\ Y(s) &= W(s) \\ U(s) &= -KY(s) = -KW(s) \end{aligned}$$

We find

$$Z(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} -K \\ \frac{1-K}{s+1} \\ 1 \end{bmatrix}}_{G_{ec}(s)} W(s)$$

Furthermore, it holds that

$$\sigma^2(G_{ec}(i\omega)) = G_{ec}^T(-i\omega)G_{ec}(i\omega) = K^2 + \frac{(1-K)^2}{\omega^2 + 1}$$

It is obvious that

$$\|G_{ec}\|_{\infty}^2 = \sup_{\omega} \sigma^2(G_{ec}(i\omega)) = K^2 + (1-K)^2 =: f(K)$$

Finally, we have  $f'(K) = 4K - 2 = 0$  for  $K = 1/2$  and  $f''(K) = 4 > 0$  so  $f(K)$  is minimized by  $K = 1/2$ . Since  $f(1/2) = 1/2$  it follows that

$$\min_K \|G_{ec}\|_{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

10.5

(a) The frequency weights  $W_S = \frac{1}{s}$  and  $W_T = W_u = 1$  give

$$\begin{aligned} z_1 &= W_u u = u \\ z_2 &= W_T C u = C \cdot x \\ z_3 &= W_S(Gu + w) \iff z_3 = C \cdot x + u = y \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z}_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} w \\ y &= (C \ 0) \begin{pmatrix} x \\ z_3 \end{pmatrix} + w \end{aligned}$$

Controllers for the  $\mathcal{H}_2$ - and  $\mathcal{H}_\infty$ -criteria can be determined using the equations in the text book.

(b) The observer is given by

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu \quad (*) \\ \dot{\hat{z}}_3 &= C\hat{x} + (y - C\hat{x}) = y \iff \dot{\hat{z}}_3 = \int y \, dt \end{aligned}$$

The state-feedback is given by

$$u = -(L \ -\alpha) \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{z}_3 \end{pmatrix} = -L\hat{x} + \alpha\hat{z}_3 = -L\hat{x} + \alpha \int y \, dt$$

which, together with (\*), gives the desired form for the controller. The controller thus has integral action.

(c) If the system itself includes an integrator, then  $\det(pI - A) = p \cdot \xi(p)$  which implies that

$$u = \frac{\alpha}{1 + \frac{1}{p\xi(p)}L(pI - A)^\alpha B} \cdot \frac{1}{p} y = \frac{\alpha\xi(p)}{p\xi(p) + L(pI - A)^\alpha B} y$$

i.e. the integral term of the controller is cancelled.

10.6

10.7

(a) Om  $x_1$  är den störda utsignalen och  $x_2 = W_S(Gu + w)$  får vi följande utökade modell:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} w \\ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= (1 \ 0) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + w \end{aligned}$$

(b)

$$P^T P = 1 \implies \text{inverterbart}$$

$$\det(\lambda I - A + NC) = \det \left( \begin{pmatrix} \lambda + 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) = \lambda(\lambda + 1) = 0$$

$\implies A - NC$  har inga egenvärden i HHP. Vi kan alltså beräkna en  $\mathcal{H}_2$ -regulator med (10.15) och (10.16) i kursboken:

$$A^T S + SA + M^T M - SBB^T S = 0 \implies \begin{cases} 2(s_{12} - s_{11}) + 1 - s_{11}^2 = 0 \\ s_{22} - s_{12} - s_{11}s_{12} = 0 \\ 1 - s_{12}^2 = 0 \end{cases}$$

$$\implies S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \implies L = (1 \ 0) S = (1 \ 1)$$

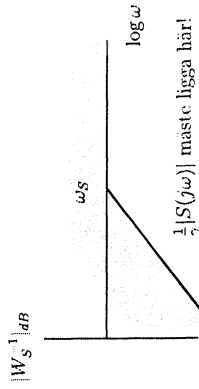
$$F_y(p) = L(pI - A + BB^T S + NC)^{-1} N = \frac{p+1}{p(p+2)}$$

10.8

$$\|G_{ex}\|_\infty < \gamma \implies \begin{cases} |W_S(j\omega)S(j\omega)| < \gamma \quad \forall \omega \\ |W_T(j\omega)T(j\omega)| < \gamma \quad \forall \omega \\ |W_U(j\omega)G_{inv}(j\omega)| < \gamma \quad \forall \omega \end{cases}$$

Alltså har vi  $|S(j\omega)| < \gamma |W_S^{-1}(j\omega)|$  och  $|T(j\omega)| < \gamma |W_T^{-1}(j\omega)|$ .

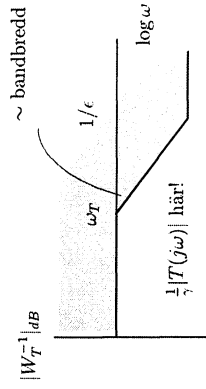
(a)



Ju längre ned  $\frac{1}{4}|S(j\omega)|$  ligger desto bättre undertryckning av lågfrekventa störningar.

Ur figuren ser vi att  $\omega_S$  ökar  $\Rightarrow$  bättre undertryckning.

(b) Vi har  $W_T^{-1} = \frac{\omega_T(1 + \epsilon s)}{s + \omega_T}$



Vi ser att om  $\omega_T$  ökar så ökar troligen bandbredden.

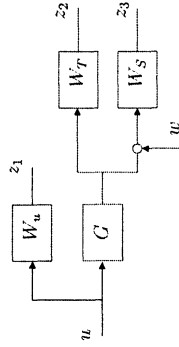
10.9

(a)  $\mathcal{H}_\infty$ -regulatorn  $F_v$  är på tillståndsform

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{x}(t) &= A\hat{x}(t) + Bv(t) + N(y(t) - C\hat{x}(t)) \\ u(t) &= -L_\infty \hat{x}(t) \end{aligned}$$

Regulatorn har alltså samma ordning som storleken på  $A$ -matrisen för det utvidgade systemet

$$\begin{aligned} z_1 &= W_u u \\ z_2 &= W_T G u \\ z_3 &= W_S(Gu + w) \end{aligned}$$



För en överföringsfunktion behövs lika många tillstånd som poler, dvs roll för  $W_v$ , två för  $G(1 + 0.3p + 2p = 0)$ , en för  $W_T(p = -10)$  och 1 för  $W_S(p = 0)$ . Totalt blir det 4 tillstånd. Eftersom varken  $p = -10$  eller  $p = 0$  är nollställen hos  $G$  kan vi inte reducera blockschemat. Alltså är en tillståndsbeskrivning med 4 tillstånd minimal  $\Rightarrow$  regulatorn är av ordning 4.

(b) Överföringsfunktionen från  $w$  till  $y$  är känslighetsfunktionen  $S$ .

Alltså  $\|G_{ee}\| < 2.5 \Rightarrow |W_S S(j\omega)| < 2.5 \quad \forall \omega$

$$|S(j\omega)| < 2.5 |W_S^{-1}(j\omega)| = 2.5 \frac{\omega}{|j\omega + 3|} \leq 2.5 \frac{0.1}{\sqrt{0.1^2 + 9}} = 0.083 \quad \forall \omega < 0.1.$$

Specifikationen  $S(j\omega) < \frac{1}{10} \quad \forall \omega < 0.1$  är alltså uppfyllt.

(c) Om vi benämner det sauna systemet  $G_o$  och modellfelet vi haft vid designen av regulatorn med  $\Delta_G$  har vi

$$\left. \begin{aligned} G_o &= G(1 + \Delta_G) \\ G &= \frac{1+s}{1+0.3s+2s^2} \Rightarrow \Delta_G = \frac{1}{1+0.1s} - 1 = \frac{-0.1}{1+0.1s} \\ G_o &= \frac{1}{G_I + 0.1s} \end{aligned} \right\}$$

Slutna systemet är stabilt trots modellfel om  $\|\Delta_G\|_\infty \|T\|_\infty < 1$ . Vi har

$$\|\Delta_G\|_\infty = \sup_{\omega} \left| \frac{0.1j\omega}{1+0.1j\omega} \right| = 1$$

Systemet är således stabilt trots modellfelet om  $\|T\|_\infty < 1$ .

$$\|G_{ee}\| < 2.5 \Rightarrow \|T\|_\infty < 2.5 \|W_T^{-1}\|_\infty$$

$$\|W_T^{-1}\|_\infty \sup_{\omega} \left| \frac{1+0.1j\omega}{j\omega+3} \right| = \frac{1}{3}$$

$$\|T\|_\infty < \frac{2.5}{3} < 1 \Rightarrow \text{stabilt!}$$

10.10

a)

$$L(s) = G_P(s)G_I(s) = \frac{1-s}{1+s} \frac{0.5}{s} = \frac{-0.5s + 0.5}{s^2 + s}$$

In observable canonical form

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

b) Straightforward calculations give

$$I = R^T X = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 2.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 2.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Let  $\lambda_m$  denote the largest eigenvalue to  $XZ$ . It holds that

$$\begin{aligned} R &= I - \frac{1}{\gamma^2}(I + ZX) \\ &= \frac{1}{\gamma^2}(\gamma^2 I - I - ZX) \\ \gamma &= \alpha\sqrt{1 + \lambda_m} \\ K &= R^{-1}ZC^T \\ R^{-1} &= \gamma^2[(\gamma^2 - 1)I - ZX]^{-1} \end{aligned}$$

However, if  $\alpha = 1$ , we have  $\gamma^2 = 1 + \lambda_m$  and

$$R^{-1} = (1 + \lambda_m)(\lambda_m I - ZX)^{-1}$$

Note now that (use that  $X$  and  $Z$  are symmetric) the matrix  $XZ$  has the same eigenvalues as  $(XZ)^T = Z^T X^T = ZX$ . Hence we find that  $\lambda_m I - ZX$  is singular. We cannot compute neither  $R$ , nor  $K$ .

d) Assume that the feedback (PI - regulator)  $G_{PI}(s) = \frac{ns+\beta}{s}$  is used. The loop gain becomes

$$L(s) = G_P(s)G_{PI}(s) = \frac{1 - s\alpha s + \beta}{1 + s}$$

which is not strictly proper. Hence a state space representation will have a nonzero direct term (a matrix  $D \neq 0$ ), which violates the assumptions used in the Glover-McFarlane design procedure.

## 10.11

a) Introduce the new variables as

$$\begin{aligned} z_1 &= W_u u = bu \\ z_2 &= W_S y = \frac{a}{p} y \\ z_3 &= W_T x_1 = 0.5x_1 \end{aligned}$$

Only  $z_2$  involves some new dynamics. Introduce the additional state variable

$$x_2 = z_2 = \frac{a}{p}(x_1 + w)$$

so  $\dot{x}_2 = ax_1 + aw$ . The state space model for the extended system becomes

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} w \\ y &= (1 \ 0) x + w \\ z &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u \end{aligned}$$

b) It holds that

$$D^T M = 0, \quad D^T D = b^2$$

In case  $b^2 \neq 1$ , rescale the problem. Introduce

$$\bar{u} = bu$$

as the scaled input. The rewritten model becomes

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1/b \\ 0 \end{pmatrix} \bar{u} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} w \\ y &= (1 \ 0) x + w \\ z &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \bar{u} \end{aligned}$$

## 10.12

Om  $\|G_{rc}\| < \gamma$  har vi

$$\begin{aligned} |W_S(i\omega)S(i\omega)| &< \gamma \quad \forall \omega \\ |W_T(i\omega)T(i\omega)| &< \gamma \quad \forall \omega \iff \\ |S(i\omega)| &< \gamma \quad |W_S^{-1}(i\omega)| \\ |T(i\omega)| &< \gamma \quad |W_T^{-1}(i\omega)| \end{aligned}$$

(a)

$$W_T^{-1} = \frac{1 + \epsilon s}{1 + \frac{s}{\omega_T}}$$

I bodeplotten kommer  $\frac{1}{\gamma} |T(i\omega)|$  att ligga mellan  $\omega_T$  och  $1/\epsilon$ .

Ökar vi  $\omega_T$  kan  $|T|$  öka mellan  $\omega_T$  och  $1/\epsilon \implies$  sämre robusthet.

Vi har  $|T| < \frac{1}{|\Delta G|}$  (Ekv. 6.33 i kursboken)  $\implies$  stabil

(b) Endast

$$W_S(s) = \frac{s + \omega_S}{s}$$

ger  $|W_S^{-1}(i\omega)| \rightarrow 0$  då  $\omega \rightarrow 0 \implies |S(i\omega)| \rightarrow 0 \iff$  lagfrekvent processbrus ger inga kvarstående fel.

### 10.13

(a)  $H_\infty$ -regulatorn  $F_y$  har tillståndsformerna:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A\hat{x} + Bu + N(y - C\hat{x}) \\ u &= -L_\infty \hat{x} \end{aligned}$$

$A$  är systemmatrisen för systemet. Regulatorn har samma ordning som storleken på  $A$  om tillståndsrepresentationen är minimal. Vi kan skriva

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A\hat{x} + Bu + N(y - C\hat{x}) \\ z &= M\hat{x} + Du \end{aligned}$$

där

$$\begin{aligned} z_1 &= W_u u \\ z_2 &= W_T G u \\ z_3 &= W_S (G u + \omega) \end{aligned}$$

För en överföringsfunktion behövs lika många tillstånd som poler, dvs

- 0 för  $W_u$
  - 2 för  $G$  ( $1 + 0.3p + 2p^2 = 0$ )
  - 1 för  $W_T$  ( $p = -10$ )
  - 1 för  $W_S$  ( $p = 0$ )
- $\implies 4$  tillstånd.

Eftersom  $p = -10$  och  $p = 0$  inte är nollställen till  $G$  kan vi inte reducera systemet. Alltså är en tillståndsbeskrivning med 4 tillstånd minimal och regulatorn är av ordning 4.

(b) Överföringsfunktionen från  $\omega$  till  $y$  är  $S$ . Vi har specifikationen:  $|S(i\omega)| < 1/10$  och  $|G_{ec}| < 2.5$ . Detta ger  $|W_S S(i\omega)| < 2.5 \implies |S(i\omega)| < 2.5 |W_S^{-1}(i\omega)| = 2.5 \left| \frac{\omega}{\omega^2 + 3} \right| < 2.5 \frac{0.1}{(\omega^2 + 9)^{1/2}} = 0.083 \forall \omega < 0.1$ . Kravet är uppfyllt!

(c) Låt samma systemet vara  $G_0$  och modellfelet  $\Delta G$ . Vi har

$$\begin{aligned} G_0 &= G(1 + \Delta G) \\ G &= \frac{1 + s}{1 + 0.3s + 2s^2} \\ G_0 &= G \frac{1}{1 + 0.1s} \end{aligned}$$

Detta ger

$$\Delta G = \frac{1}{1 + 0.1s} - 1 = \frac{-1s}{1 + 0.1s}$$

Det slutna systemet är stabilt trots modellfel om  $\|\Delta G\|_\infty \|T\|_\infty < 1$ .

Vi har

$$\|\Delta G\|_\infty = \omega \left| \frac{0.1i\omega}{1 + 0.1i\omega} \right| = 1$$

vilket ger stabilitet om  $\|T\|_\infty < 1$ . Villkoret  $\|G_{ec}\| < 2.5$  innebär att  $\|T\|_\infty < 2.5 \|W_T^{-1}\|_\infty$ , dvs

$$\|W_T^{-1}\|_\infty = \omega \left| \frac{3 + i\omega}{1 + 0.1i\omega} \right| = \frac{1}{3}$$

och vi får  $\|T\|_\infty < \frac{2.5}{3} < 1 \implies$  stabilt!

### 10.14

(a) Ställ upp systemet på tillståndsform

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \underbrace{p}_A x + \underbrace{1}_B u \\ y &= \underbrace{1}_C x. \end{aligned}$$

Eftersom vi straffar utsignalen är  $M = C = 1$ . Ur kriteriet ser vi också att  $Q_1 = 1$ . För att lösa det linjär-kvadratiska problemet ska vi lösa Riccati-ekvation 9.7b i kursboken.

$$A^T S + SA + M^T Q_1 M - SBQ_2^{-1} B^T S = 2ps + 1 - \frac{Q_2}{S} = 0$$

Den positivt definita lösningen är

$$S = pQ_2 + \sqrt{p^2 Q_2^2 + Q_2}.$$

Styrslagen är

$$u(t) = -BLx(t) = -BQ_2^{-1} B^T Sx(t) = \left(-p - \sqrt{p^2 + \frac{1}{Q_2}}\right)x(t).$$

Det återkopplade systemet blir

$$\dot{x} = Ax + Bu = (A - BL)x = \left(p - p - \sqrt{p^2 + \frac{1}{Q_2}}\right)x = -\sqrt{p^2 + \frac{1}{Q_2}}x,$$

och har en pol i

$$s = -\sqrt{p^2 + \frac{1}{Q_2}} \rightarrow -p \quad \text{da } Q_2 \rightarrow \infty.$$

(b) Känslighetsfunktionen är

$$S = \frac{1}{1 + GK} = \frac{s - p}{s - p + K}.$$

Om  $|K_{\text{opt}} S(i\omega)|$  är konstant måste även  $|S(i\omega)|$  vara konstant. Eftersom  $|S(i\omega)|$  går mot ett  $\omega$  går mot oändligheten är konstanten ett.  $S(s)$  ska vara ett allpassfilter, det vill säga polen ska vara speglingen av nollstället i imaginäraxeln.

$$S = \frac{s - p}{s - p + K} = \frac{s - p}{s + p} \implies K = 2p.$$

Motsvarande pol hamnar i  $-p$ . Observera att vi får samma lösning som i uppgift a)!

## 11 Beskrivning av olinjära system

## 12 Stabilitet hos olinjära system

### 12.1

Tillståndsvariablerna  $x_1 = y$  och  $x_2 = \dot{y}$  ger

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -0.2(1+x_2^2)x_2 - x_1 \end{pmatrix} = f(x)$$

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \Rightarrow$$

$$\dot{V} = V_x f(x) = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = -0.2x_2^2(1+x_2^2)$$

$$\dot{V} < 0 \text{ utom fallet } x_2 = 0$$

$x_2 \equiv 0 \Rightarrow x_1 = \text{konstant} = 0$ . Alltså är nolllösningen asymptotiskt stabil.

### 12.2

Nej, kravet  $\dot{V}(x) \geq 0$ ,  $\forall x$  uppfylls ej.

### 12.3

$$\begin{cases} k_1 = 0.5 \\ k_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

en cirkel genom punkterna  $-1/3$  och  $-2$ .

### 12.4

Olinjäriteten begränsas av räta linjer med lutningarna  $k_1 = 0$  och  $k_2 = 1$ . Detta ger att det icke tillåtna området enligt cirkelkriteriet blir halvplanet  $Re s < -1$ . Svar: För att stabilitet skall kunna garanteras måste  $G(i\omega)$  ligga utanför området  $Re s < -1$ .

### 12.5

Olinjäriteten begränsas av linjer med lutningarna  $k_1 = 0$  och  $k_2 = \infty$ , vilket enligt cirkelkriteriet ger att hela vänstra halvplanet är icke tillåtet område.

$$Re G(i\omega) = -\frac{K}{\omega^2 + 1} < 0 \quad \forall \omega$$

ger att stabilitet ej kan garanteras för något  $K > 0$ .

### 12.6

Tillstånden  $x_1 = \Phi$ ,  $x_2 = \dot{\Phi}$  ger

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{mg}{J} \sin x_1 \end{aligned}$$

Styrslagen

$$l = l_0 + \varepsilon \Phi \dot{\Phi}$$

ger

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{mg}{J} \sin x_1 (l_0 + \varepsilon \Phi \dot{\Phi}) \end{aligned}$$

Som Lyapunovfunktion använder vi

$$V(x) = \frac{1}{2} J x_2^2 + mg l_0 (1 - \cos x_1)$$

vilken motsvarar energin i systemet. Detta ger

$$\dot{V} = J x_2 \dot{x}_2 + mg l_0 \sin x_1 \dot{x}_1 = -\varepsilon mg x_2^2 x_1 \sin x_1 \leq 0 \quad (-\pi/2 < x_1 \pi/2)$$

$\dot{V} = 0$  endast då  $x_1 \equiv 0$  eller  $x_2 \equiv 0$ .  $x_1 \equiv 0 \Rightarrow x_2 = 0$  och  $x_2 \equiv 0 \Rightarrow x_1 = 0$ .

Svar:  $\dot{V}(x) < 0$  för alla  $x_1 \neq 0$ ,  $x_2 \neq 0$  ger att  $x \rightarrow 0$ .

### 12.7

Tillstånden  $x_1 = y$  och  $x_2 = \dot{y}$  och styrslagen

$$u = -\text{sgn}(ax_1 + bx_2)$$

ger

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 - 3x_2 - \text{sgn}(ax_1 + bx_2) \end{aligned}$$

Ljapunovfunktionen

$$V(x) = \left( \frac{\alpha}{2} x_1^2 + \frac{\beta}{2} x_2^2 \right)$$

ger

$$\dot{V} = (\alpha - 2\beta)x_1x_2 - 3\beta x_2^2 - \beta x_2 \operatorname{sgn}(ax_1 + bx_2)$$

Tag, t ex,  $\alpha = 2, \beta = 1, a = 0, b = 1$ , vilket ger

$$\dot{V} = -3x_2^2 - |x_2| \leq 0$$

## 12.8

Olinjäriteten ges av

$$f(u) = u + \arctan(u)$$

Derivatan av  $f(u)$  ges av

$$f'(u) = 1 + \frac{1}{1+u^2}$$

och den är maximal för  $u = 0$  och  $f'(0) = 2$ .  $f'(u) \rightarrow 1$  då  $u \rightarrow \infty$ . Ur detta fås

$$1 \leq \frac{u + \arctan(u)}{u} \leq 2$$

vilket ger att Nyquistkurvan för den linjära delen av servosystemet ej får skära eller omsluta en cirkel genom punkterna  $-1$  och  $-1/2$ .

## 12.9

Enligt cirkelkriteriet är systemet stabilt, om Nyquistkurvan ej omsluter eller skär cirkeln som går genom punkterna  $-4/3$  och  $-4/7$ .

Enligt boken går kretsförstärkingen för en LQ-design ej in i eller runt cirkeln som går igenom punkterna  $0$  och  $-2$ . Eftersom denna cirkel omsluter den ovanstående mindre cirkeln, så förblir alltså systemet stabilt.

## 13 Kvalitativt uppförande. Fasplan

### 13.1

$$\ddot{x} - (0.1 - 10x_2^2/3)\dot{x} + x + x^2 = 0$$

Inför tillståndsvariablerna  $x_1 = x$  och  $x_2 = \dot{x}$ , samt skriv på tillståndsform

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1(1+x_1) + x_2(0.1 - 10x_2^2/3) = f_2(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Bestäm de singulära och deras karaktär, samt skissera fasplanet.

#### 1. Singulära punkter

$$f(x^0) = 0 \Rightarrow x_2^0 = 0 \text{ samt } x_1^0(1+x_1^0) = 0.$$

$$\text{SP I} \begin{cases} x_1^0 = 0 \\ x_2^0 = 0 \end{cases}, \quad \text{SP II} \begin{cases} x_1^0 = -1 \\ x_2^0 = 0 \end{cases}$$

#### 2. Linjärisera kring de singulära punkterna

Taylor's formel:

$$f(x) = f(x^0) + \frac{df}{dx}(x) \Big|_{x=x^0} (x-x^0) + o|x-x^0| = \frac{df}{dx}(x) \Big|_{x=x^0} (x-x^0) + o|x-x^0|$$

eftersom  $f(x^0) = 0$ . Matrisen  $\frac{df}{dx}(x)$  är funktionen  $f$ 's Jacobian. Den har  $ij$ -elementet  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -1 - 2x_1 \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0.1 - 10x_2^2$$

Gör variabelbytet  $z = x - x^0$  i de olika singulära punkterna.

#### 3. SP I

Linjär approximation  $\dot{z} = Az$ , med

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Matrisen  $A$ 's egenvärden ges av

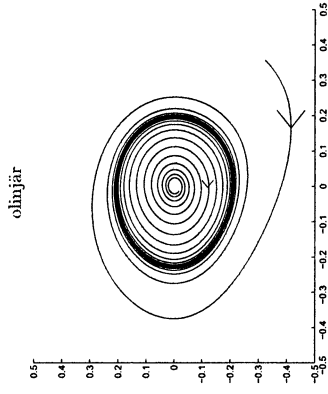
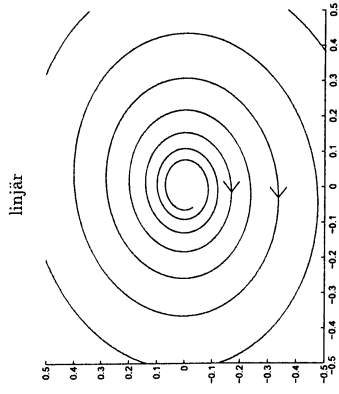
$$0 = \det(\lambda I - A) = \lambda(\lambda - 0.1) + 1.$$

dvs

$$\lambda = 0.05 \pm \sqrt{0.05^2 - 1}$$

Den linjära approximationen har således ett instabilt fokus i  $(0,0)$ . För instabila fokus gäller att den olinjära differentialekvationen har samma typ av singularitet som den linjära approximationen (se kursmaterialet). Observera att den linjära approximationen endast gäller *nära* den singulära punkten.





#### 4. SP II

Linjär approximation  $\dot{z} = Bz$ , med

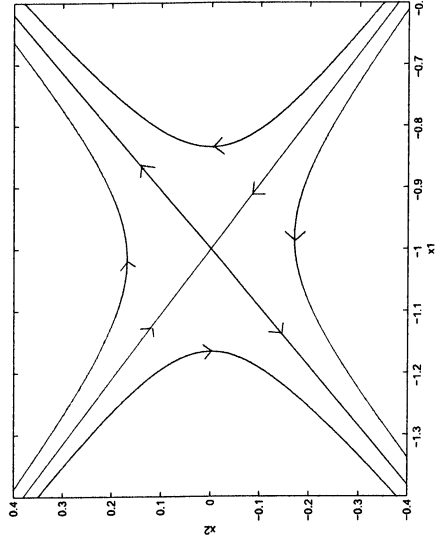
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Eigenvärden till  $B$ ,

$$0 = \det(\lambda I - B) = \lambda(\lambda - 0.1) - 1$$

$$\lambda = 0.05 \pm \sqrt{0.05^2 + 1}, \quad \lambda_1 \approx -0.95, \quad \lambda_2 \approx 1.05$$

Den linjäriserade ekvationen har tydligen en sadelpunkt i  $(-1, 0)$ . Detta gäller även för den olinjära ekvationen. Den stabila egenvektorn är  $(1, -0.95)$ , och den instabila är  $(1, 1.05)$ .

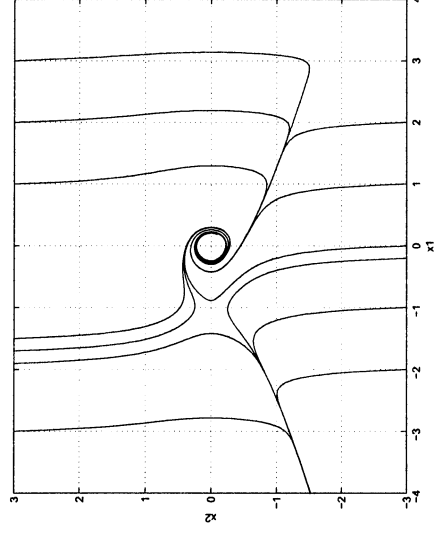


#### 5. Långt från singulära punkter

Hur ser banorna ut på långt avstånd från origo? Bilda derivatan,

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \frac{-x_1(1+x_1) + x_2(0.1 - 10x_2/3)}{x_2}$$

När  $x_1$  är begränsad och  $x_2 \rightarrow \pm\infty$ , så gäller tydligen att  $\dot{x}_2/\dot{x}_1 \rightarrow -\infty$ . Alltså blir banorna lodräta när  $|x_2|$  växer (och även då  $x_2 \rightarrow 0$ ).



## 13.2

Den olinjära länken beskrivs av

$$f(x) = \begin{cases} x + a, & x < -a \\ 0, & -a \leq x \leq a \\ x - a, & x > a \end{cases}$$

Sambandet mellan Laplacetransformerna av  $x$  och  $e$  i figuren ges av

$$s(s + B)\mathcal{L}\{x\} = K\mathcal{L}\{e\}$$

I tidsplanet blir ovanstående ekvation

$$\ddot{x} + B\dot{x} = Ke$$

Dessutom gäller att

$$e = u - f(x) = -f(x)$$

vilket ger

$$\ddot{x} + B\dot{x} + Kf(x) = 0$$

Inför nu tillståndsvariabler enligt  $x_1 = x$  och  $x_2 = \dot{x}$ . Tillstånds ekvationerna blir då

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (13.1)$$

$$\dot{x}_2 = -Kf(x_1) - Bx_2 \quad (13.2)$$

Dela upp fasplanet i områden inom vilka  $f(x)$  är linjär.

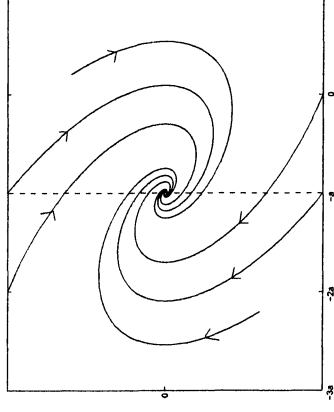
- Området  $x_1 < -a$ . Den enda singulära punkten är  $x_1 = -a, x_2 = 0$ . Med variabelbytet  $z_1 = x_1 + a, z_2 = x_2$  fås linjära tillstånds ekvationer,  $\dot{z} = Az$ , där

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -K & -B \end{pmatrix}$$

Matrisen  $A$ s egenvärden är

$$\lambda = -\frac{B}{2} \pm \sqrt{\frac{B^2}{4} - K}$$

Punkten  $x = (-a, 0)$  är således en stabil nod eller ett stabilt fokus. Vi skissar fasplanet för fallet att  $4K > B^2$ , vilket ger ett stabilt fokus.



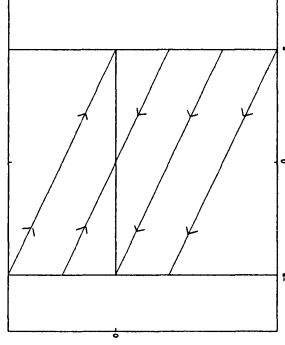
- Området  $-a \leq x_1 \leq a$ . De singulära "punkterna" blir här ett linjesegment:  $x_2 = 0$  och  $-a \leq x_1 \leq a$ . Rörelseekvationerna är

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -Bx_2 \end{aligned}$$

Bilda derivatan

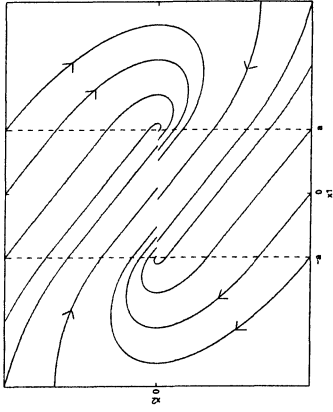
$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = -B$$

Inom hela det betraktade området har alltså banorna lutningen  $-B$ .



- Området  $x_1 > a$ . Singulär punkt  $x_1 = a, x_2 = 0$ . Sätt  $z_1 = x_1 - a, z_2 = x_2$ . Då fås samma tillstånds ekvation för  $z$  som i fallet  $x_1 < -a, z = Az$ . Om  $4K > B^2$ , blir således även punkten  $x = (a, 0)$  ett stabilt fokus analogt med fallet  $x_1 < -a$ .

För att få fasporträttet måste vi nu sätta samman de tre dellösningarna enligt 1., 2. och 3.



### 13.3

(a) Inför  $x_1 = y, x_2 = \dot{y}$ , som ger

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\operatorname{sgn} x_1 \end{aligned}$$

Singulära punkter saknas. Fasporträttet skisseras i två delar, beroende på  $\operatorname{sgn} x_1$ . Då  $x_1 > 0$  fås

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{1}{x_2}$$

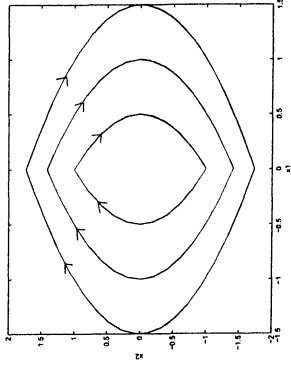
Den separabla differentialekvationen har lösningen

$$\frac{1}{2}x_2^2 + x_1 = \text{konst}$$

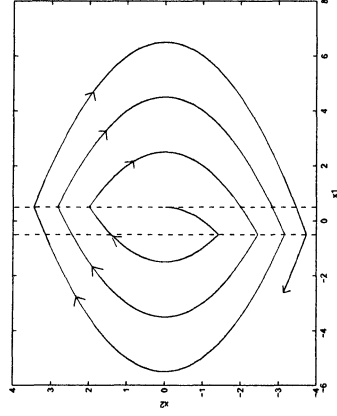
dvs  $x_1$  som funktion av  $x_2$  blir en skara av parabler. För  $x_1 < 0$  fås på samma sätt

$$\frac{1}{2}x_2^2 - x_1 = \text{konst}$$

Fasporträttet:



(b) För  $x_1 > a$  gäller som ovan  $\frac{1}{2}x_2^2 + x_1 = \text{konst}$  och då  $x_1 < -a$  har vi  $\frac{1}{2}x_2^2 - x_1 = \text{konst}$ . För fallet  $|x_1| \leq a$  gäller att reläet behåller sitt gamla värde, dvs parabeln "fortsätter".



### 13.4

a)  $G'(s) = 1$

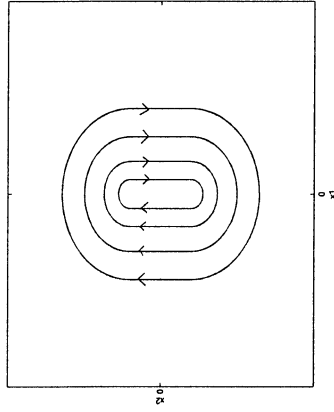
Låt  $x_1 = y$  och låt  $x_2$  beteckna insignalen till linjäretet (dödzonen). Då erhålls tillståndsbekrivningen

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f(x_2), \\ \dot{x}_2 &= -x_1 \end{aligned}$$

där

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < -1 \\ 0, & -1 \leq x \leq 1 \\ x-1, & x > 1 \end{cases}$$

Man får centrum i de stationära punkterna  $x = (0, -1)$  (för  $x_2 \leq -1$  ekvationen) och  $x = (0, 1)$  (för  $x_2 \geq 1$  ekvationen). Då  $-1 < x_2 < 1$  fås  $x_1 = \text{konst}$ . Detta ger fasplanet

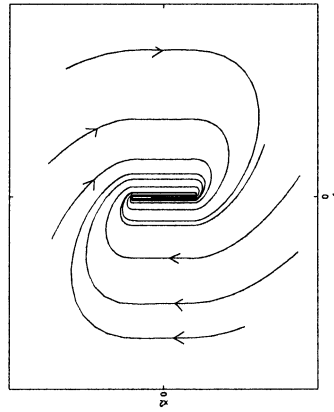


Bilen återgår alltså inte till önskad position med denna "P-regulator".

b)  $G(s) = 1 + s$   
 0 Nu blir tillståndsrepresentationen

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f(x_2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - f(x_2) \end{aligned}$$

Skiljnaden mot fall 1. är att de stationära punkterna blir stabila fokus istället för centrum. Fasplanet blir alltså



Bilen återgår till önskad position, men Limus får sitta och rycka i ratten.

### 13.5

$$\dot{x}_2 = 0 \Rightarrow 0 = -3x_2(1 + \frac{1}{6}x_1) + x_1x_2 = \frac{1}{2}(x_1 - 6)x_2$$

dvs  $x_1 = 6$  eller  $x_2 = 0$ . Två fall:

- $x_2 = 0$  och  $\dot{x}_1 = 0 \Rightarrow 0 = 2x_1 - 0.2x_1^2 = 0.2(10 - x_1)x_1$  dvs  $x_1 = 0$  eller  $x_1 = 10$ .
- $x_1 = 6$  och  $\dot{x}_1 = 0 \Rightarrow 0 = 2 \cdot 6(1 + \frac{1}{6} \cdot 6) - 6 \cdot x_2 - 0.2 \cdot 6^2(1 + \frac{1}{6} \cdot 6) = 24 - 6x_2 - 14.4$

De stationära punkterna är alltså

$$\text{SP I: } \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}, \quad \text{SP II: } \begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = 0 \end{cases}, \quad \text{SP III: } \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 1.6 \end{cases}$$

Jacobianen för systemet är

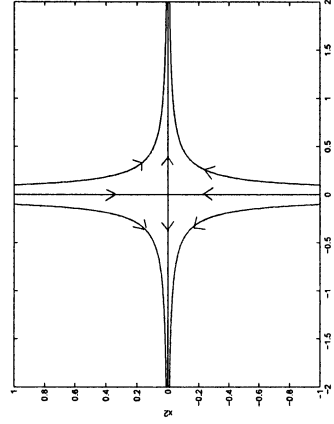
$$H(x) = \frac{df}{dx}(x) = \begin{pmatrix} 2 - 0.4x_1 - x_2/(1 + x_1/6)^2 & -x_1/(1 + x_1/6) \\ x_2/(1 + x_1/6)^2 & -3 + x_1/(1 + x_1/6) \end{pmatrix}$$

**SP I:**

$x_1 = x_2 = 0$  ger

$$H_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

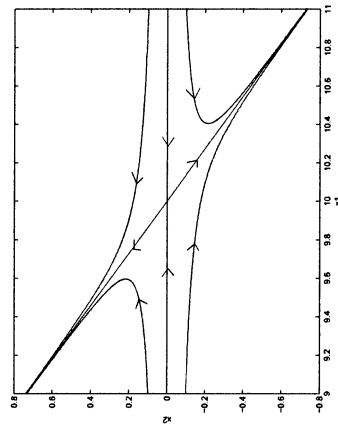
Origo blir en sadelpunkt med banor enligt



**SP II:**  
 Då  $x_1 = 10$  och  $x_2 = 0$  blir Jacobianen

$$H_2 = \begin{pmatrix} -2 & -3.75 \\ 0 & 0.75 \end{pmatrix}$$

även detta är en sadelpunkt. Den instabila egenvektorn är  $(3.75, -2.75)$ , och den stabila är  $(1, 0)$ . Fasplanet ser ut enligt

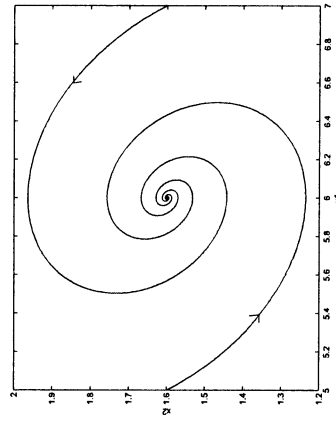


**SP III:**

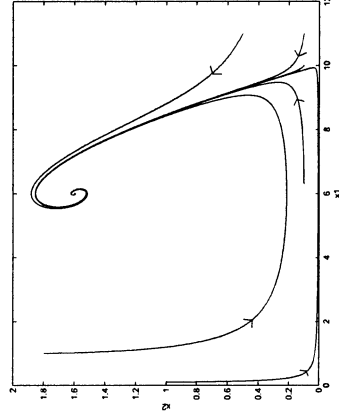
$x_1 = 6, x_2 = 1.6$  ger

$$H_3 = \begin{pmatrix} -0.8 & -3 \\ 0.4 & 0 \end{pmatrix}$$

Egenvärdena är  $-0.4 \pm 1.02i$ . Vi har alltså ett stabilt fokus, med fasplan enligt



Sammansättningen av dessa fasplan är nu rättfram:



### 13.6

Inför tillståndsvariablerna  $x_1 = y$  och  $x_2 = \dot{y} \Rightarrow$ ,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + f(x_2) \end{aligned}$$

För  $x_2 < 0$  gäller

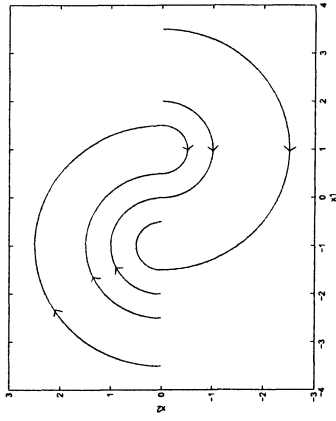
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 1 \end{cases} \Rightarrow \text{kritisk pkt } \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Jacobianen blir

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

med egenvärden  $\pm i \Rightarrow x = (-1, 0)$  är ett centrum.

För  $x_2 < 0$  fås på samma sätt att  $x = (1, 0)$  är ett centrum. Det sammansatta fasplanet ser ut som

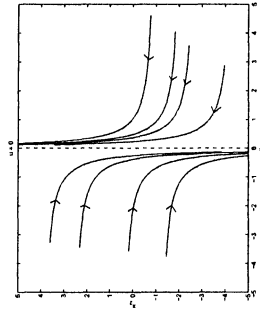


Systemet svänger in sig mot någon punkt längs  $x_1$ -axeln, dvs  $\dot{y}$  går mot noll.

### 13.7

(a) Singulära punkter ges av  $x_1 = 0$ , dvs hela  $x_2$ -axeln, då  $u = 0$ . Banorna ges av

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{1}{x_1^2} \Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{x_1} + C.$$

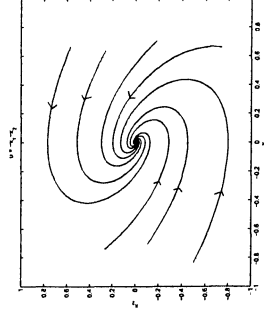


(b)  $\dot{V} = V_x \dot{x} = -2x_1^4 + 2x_1 u + 2x_1 x_2 \Rightarrow$  Välj  $u = -x_1 - x_2$

Detta ger  $\dot{V} = -2x_1^4 - 2x_1^2 < 0$  och stationär punkt  $x_1 = x_2 = 0$ . Motsvarande linjärisering är

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x. \text{ med egenvärden } \lambda = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Fasplanet blir alltså ett stabilt fokus.



### 13.8

(a) There are three equilibrium points

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} -\sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix}$$

The Jacobian is

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 + x_1^2/2 & -1 \end{pmatrix}$$

For the first point, we have

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

with eigenvalues in  $s = -0.5 \pm i\sqrt{0.75}$ . The equilibrium is a stable focus.

For the second point, we have

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

with eigenvalues in  $s = 1$  and  $s = -2$ . The equilibrium is a saddle point.

For the third point, we have

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

with eigenvalues in  $s = 1$  and  $s = -2$ . The equilibrium is a saddle point.

(b) There is a unique stationary point,  $x = (0 \ 0)^T$ . The Jacobian becomes

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}|_{x=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

As it has eigenvalues in  $s = 0.5 \pm i\sqrt{0.75}$ , it is an unstable focus.

- (c) From the second equation we find that either  $x_2 = 0$  or  $x_2 = 2(1 + x_1)$ . Inserting this into the first equation, we find that there are in total four equilibrium points, as described below. Further, the Jacobian is in the general case

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 - 2x_1 - \frac{2x_2}{(1+x_1)^2} & -2\frac{x_1}{(1+x_1)} \\ \frac{x_2^2}{(1+x_1)^2} & 2 - \frac{2x_2}{(1+x_1)} \end{pmatrix}$$

The first stationary point  $x = (0 \ 0)^T$  gives

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

It has eigenvalues in  $s = 1$  and  $s = 2$ , and is an unstable focus.

The second stationary point  $x = (1 \ 0)^T$  gives

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

It has eigenvalues in  $s = -1$  and  $s = 2$ , and is a saddle point.

The third stationary point  $x = (0 \ 2)^T$  gives

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

It has eigenvalues in  $s = -3$  and  $s = -2$ , and is a stable node.

The fourth stationary point  $x = (-3 \ -4)^T$  gives

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

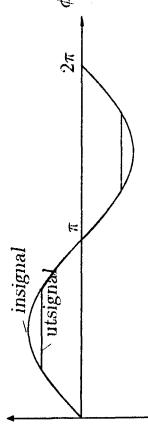
It has eigenvalues in  $s = 7.772$  and  $s = -0.772$ , and is a saddle point.

## 14 Själsvängningar och beskrivande funktion

### 14.1

Den beskrivande funktionen för den olinjära länken (mätting) finns angiven i kurslitteraturen, tillsammans med de beskrivande funktionerna för ett antal andra statistiska olinjäriteter. Vi ska dock härleda den beskrivande funktionen.

- Lägg på signalen  $e(t) = C \sin \Phi$ , där  $\Phi = \omega t$ , på ingången till mättingen. Om  $C \leq 1$  så blir utsignalen från mättingen  $u(t) = e(t)$ . Om  $C > 1$  så blir utsignalen från mättingen enligt nedanstående figur.



Här ges  $\Phi_1$  av  $C \sin \Phi_1 = 1$ , dvs  $\Phi_1 = \arcsin(1/C)$ .

- Räkna ut koefficienterna  $a_1$  och  $b_1$  enligt

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\Phi) \cos \Phi \, d\Phi, \quad b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\Phi) \sin \Phi \, d\Phi$$

Eftersom  $u(\Phi)$  är en udda funktion och  $\cos \Phi$  är jämn så blir  $a_1 = 0$ . Av symmetriskäl kan vi skriva  $b_1$  som ( $C > 1$  förutsätts)

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} u(\Phi) \sin \Phi \, d\Phi \\ &= \frac{4}{\pi} \left( \int_0^{\Phi_1} C \sin^2 \Phi \, d\Phi + \int_{\Phi_1}^{\pi/2} \sin \Phi \, d\Phi \right) \\ &= \frac{4C}{\pi} \left( \frac{\Phi_1}{2} - \frac{\sin 2\Phi_1}{4} + \frac{\cos \Phi_1}{C} \right) \end{aligned}$$

Eftersom  $\sin 2\Phi_1 = 2 \sin \Phi_1 \cos \Phi_1$ ,  $\sin \Phi_1 = 1/C$  och  $\cos \Phi_1 = \sqrt{C^2 - 1}/C$  så får vi

$$b_1 = \frac{2C}{\pi} \left( \arcsin \frac{1}{C} + \frac{\sqrt{C^2 - 1}}{C^2} \right)$$

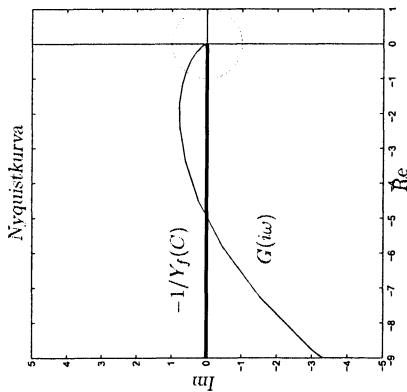
- Den beskrivande funktionen ges nu av  $Y_f(C) = (b_1 + ia_1)/C$

$$Y_f(C) = \frac{2}{\pi} \left( \arcsin \frac{1}{C} + \frac{\sqrt{C^2 - 1}}{C^2} \right)$$

(gäller för  $C > 1$ ,  $Y_f(C) = 1$  då  $C \leq 1$ )

Rita nu Nyquistkurvan för  $C(s) = 10/(s(1 + s)^2)$ , och kurvan  $-1/Y_f(C)$  i samma diagram.

$$\begin{aligned} \arg G(i\omega) &= -\pi/2 - 2 \arctan \omega \\ |G(i\omega)| &= 10/(\omega(1 + \omega^2)) \end{aligned}$$



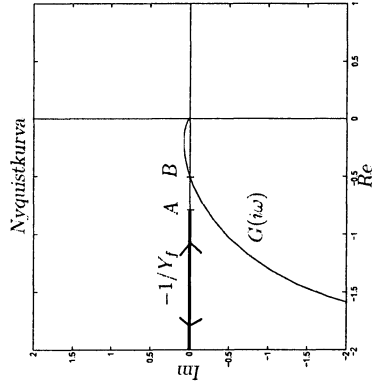
Eventuell skärning mellan kurvorna sker då  $\arg G(i\omega) = -\pi \Rightarrow \omega = 1$ . Nu är  $|G(i1)| = 5$ , och

$$-1/Y_f(C) = G(i1) = -5$$

för  $C \approx 6.3$ . Man får alltså en periodisk lösning med ungefärlig amplitud 6.3 och vinkelfrekvens 1 rad/s. Enligt det modifierade Nyquistkriteriet är "systemet instabilt" om Nyquistkurvan omsluter  $-1/Y_f(C)$ . Detta sker då  $C < 6.3$ , vilket betyder att svängningsamplituden kommer att öka. Då däremot  $C > 6.3$ , så är systemet stabilt och svängningens amplitud avtar. Slutsatsen är att självsvängningen är "stabil".

### 14.2

Nyquistkurva och beskrivande funktion



Beskrivande funktionen "vänder" i punkten A, vilket inträffar för  $C = \sqrt{2}D$  och ger  $A = -\frac{\pi D}{2H}$  (eftersom  $\frac{dH}{dC} \sqrt{1 - D^2/C^2}$  maximeras för  $C = \sqrt{2}D$ , vilket ger värdet  $\frac{2H}{\pi D}$ ). Eventuell skärning sker då Nyquistkurvan passerar neg. reella axeln. Man får att  $\arg G(i\omega) = -\pi$  för  $\omega = 1$ , och  $|G(i1)| = 1/2$ . Punkten B svarar alltså mot  $B = -1/2$ . Nätt och jämnt självsvängning betyder att  $B \approx A$  och att svängningsamplitud  $\approx 2.5$  ger  $\sqrt{2}D = 2.5$ . Alltså är  $D = 5 \cdot \sqrt{2}/4$  och  $H = \pi \cdot 5 \cdot \sqrt{2}/4$ . Självsvängningens frekvens är  $\omega = 1$ .

### 14.3

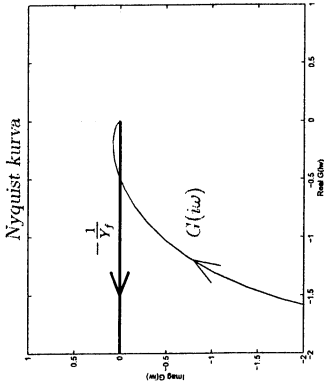
(a) Beskrivande funktionen för reläet ges av (se kurslitteraturen)

$$Y_f(C) = 4/(\pi C), \Rightarrow -1/Y_f(C) = -\pi C/4$$

Kurvan  $-1/Y_f(C)$  omfattar alltså hela negativa reella axeln. För Nyquistkurvan fås

$$\begin{aligned} G(i\omega) &= \frac{K}{i\omega(i\omega+1)^2} = \frac{K(1-i\omega)^2 \cdot (-i\omega)}{\omega^2(1+\omega^2)^2} \\ &= \frac{K(1-\omega^2-2i\omega)(-i\omega)}{\omega^2(1+\omega^2)^2} = \frac{-2K\omega - iK(1-\omega^2)}{\omega^2(1+\omega^2)^2} \end{aligned}$$





Självsvängning fås alltid, eftersom Nyquistkurvan korsar  $-1/Y_f(C)$  (neg. reella axeln) för alla värden på  $K$ .

(b) I skärningspunkten är  $\arg G(i\omega) = -\pi$ , vilket inträffar för  $\omega = 1$ . Eftersom  $|G(i)| = K/2$ , så ges svängningens amplitud  $C$ , av sambandet

$$-\frac{K}{2} = -\frac{\pi C}{4}$$

Kravet  $C < 0.1$  ger nu att  $K < \pi/20$  krävs.

(c) En lead-länk (eller en PD-länk) designad så att  $G(i\omega)$  får ett argumenttillskott (fasavancering) för  $\omega > 1$ , gör att amplitudmarignalen ökar, vilket betyder att ett större  $K$  kan användas.

#### 14.4

Om man gör ett relä experiment får man en svängning för vilken man kan avläsa frekvens  $\omega_u$  och amplitud  $C$ . Dessa två värden räknades ut i uppgift 14.3. Man skaffar sig alltså kunskap om en punkt på Nyquistkurvan, nämligen precis den som ligger på negativa reella axeln. Detta kunskap behövs för att kunna använda sig av Ziegler-Nichols inställningsregler. Två variabler behöver man: den ultimata förstärkningen  $K_u$  och den ultimata perioden  $T_u$ . Bada kan räknas ut från svängningens amplitud  $C$  och frekvens  $\omega_u$ .

$$C = \frac{4}{\pi} |G(i\omega)| = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{K_u} \Rightarrow K_u = \frac{4}{\pi C}$$

Den ultimata perioden blir

$$T_u = \frac{2\pi}{\omega_u}$$

Fran uppgift 14.3 vet man att  $\omega_u = 1$  och  $C = \frac{2\Delta}{\pi}$ . Med  $K = 1$  blir  $K_u = 2$  och  $T_u = 2\pi$ . Ziegler-Nichols inställningsregler ger alltså följande regulatorparametrar:

$$PI - regulator : K_c = 0.4, T_i = \frac{8}{5}\pi$$

$$PID - regulator : K_c = 0.6, T_i = \pi, T_d = \frac{6}{25}\pi$$

#### 14.5

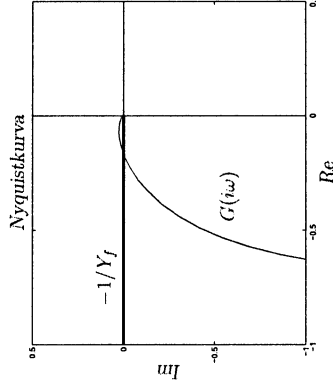
Beskrivande funktion för idealt relä:

$$Y_f(C) = \frac{4}{\pi \cdot C} \Rightarrow \frac{1}{Y_f(C)} = -\frac{\pi}{4} \cdot C$$

(a)  $H(s) = 1$

Rita Nyquistkurvan för  $G(s)H(s) = G(s)$

$$\begin{aligned} G(i\omega) &= \frac{1}{i\omega(\omega^2 + 1)(i\omega + 2)} = \frac{-i(1 - i\omega)(2 - i\omega)}{\omega(\omega^2 + 1)(\omega^2 + 4)} \\ &= \frac{-i}{(\omega^2 + 1)(\omega^2 + 4)} - \frac{i}{\omega(\omega^2 + 1)(\omega^2 + 4)} \end{aligned}$$



Om Nyquistkurvan nu omsluter punkten  $-1/Y_f(C)$  så ökar utsignalens amplitud och om den ej omsluter så minskar amplituden. Vi kommer i detta fall att få en stabil självsväng. Frekvens och amplitud ges av skärningen mellan kurvorna. Denna inträffar då  $\text{Im } G(i\omega) = 0$ , dvs för  $\omega = \sqrt{2}$ . Eftersom  $\text{Re } G(i\sqrt{2}) = -1/6$ , fås

$$-1/6 = -\frac{\pi C}{4} \Rightarrow C = \frac{2}{3\pi}$$

Svar: Den stabila självsvängningen har amplituden  $2/(3\pi)$  och frekvensen  $\omega = \sqrt{2}$ .

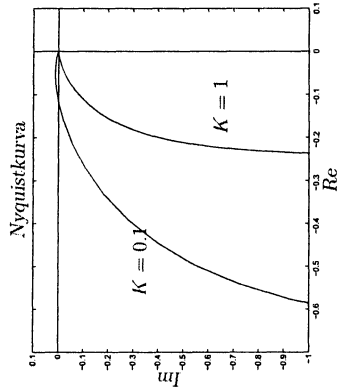
(b)  $H(s) = 1 + Ks$   
 Studera  $G(i\omega)H(i\omega)$

$$\begin{aligned} G(i\omega) \cdot H(i\omega) &= \frac{-i(1-i\omega)(2-i\omega)(1+Ki\omega)}{\omega(\omega^2+1)(\omega^2+4)} \\ &= \frac{-3+2K-K\omega^2}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)} + i \frac{-2+\omega^2-3K\omega^2}{\omega(\omega^2+1)(\omega^2+4)} \end{aligned}$$

Enligt (a), så undviker man svängningar om imaginärdelen  $< 0 \forall \omega$ .

$$\begin{aligned} -2 + \omega^2 - 3K\omega^2 < 0 &\Rightarrow \\ K > \frac{\omega^2 - 2}{3\omega^2} \end{aligned}$$

Eftersom  $(\omega^2 - 2)/(3\omega^2) < 1/3 \forall \omega$  så kan vi ta  $K > 1/3$ .  
 Svar:  $K > 1/3$ .



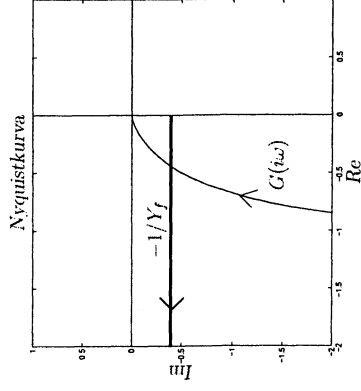
## 14.6

Den beskrivande funktionen för ett relä med hysterese ges av

$$\begin{aligned} Y_f(C) &= \frac{4}{\pi C} \left( \sqrt{1-1/(2C)^2} - i/(2C) \right), \quad C \geq 0.5 \\ -1/Y_f(C) &= -\frac{\pi C}{4} \sqrt{1-1/(2C)^2} - i\frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

(a) Rita Nyquistkurvan och beskrivande funktionen.

$$\frac{1}{i\omega(1+i\omega)} = \frac{-1-i\omega}{\omega(1+\omega^2)}$$



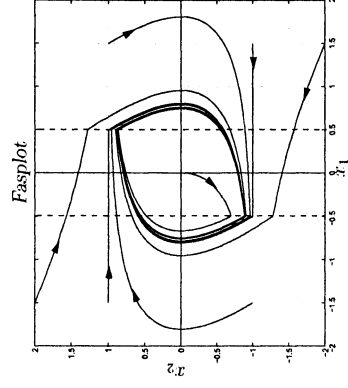
Skärning fås för  $\omega = 1.235$ ,  $C = 0.75$ . Detta kan fås grafiskt, eller genom lösning av ekvationssystemet

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega(1+\omega^2)} &= \frac{\pi}{8} \\ \frac{\pi C}{4} \sqrt{1-1/(2C)^2} &= \frac{1}{1+\omega^2} \end{aligned}$$

$C$  litet  $\Rightarrow -1/Y_f(C)$  omslutes  $\Rightarrow$  svängningsamplituden växer  
 $C$  stort  $\Rightarrow -1/Y_f(C)$  omslutes ej  $\Rightarrow$  svängningsamplituden avtar  
 Slutsats: Stabil självsvängning.

(b)  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = \dot{\theta}$  ger

$$u = \begin{cases} 1 & x_1 < -0.5 \\ -1 & x_1 > 0.5 \end{cases}$$



14.7

(a) Vi löser problemet genom att titta på det slutna systemets karakteristiska ekvation. Kretsförstärkningen ges av

$$L(s) = F(s)G(s) = K_c \frac{T_d T_i s^2 + T_i s + 1}{T_i s^2 (s + 0.1)}$$

Det slutna systemet blir sedan

$$G_c(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{1}{s^3 + (0.1 + K_c T_d) s^2 + K_c s + \frac{K_c}{T_i}}$$

Stabiliteten av systemet kan undersökas med Rouths algoritim. Denna ger med  $a_0 = 1$ ,  $b_0 = (0.1 + K_c T_d)$ ,  $a_1 = K_c$  och  $b_1 = \frac{K_c}{T_i}$  följande schema:

1	$K_c$	$a_1$
$(0.1 + K_c T_d)$	$\frac{K_c}{T_i}$	$b_1$
$K_c \left( \frac{0.1 + K_c T_d - \frac{1}{T_i}}{0.1 + K_c T_d} \right)$	0	$c_1$
$\frac{K_c}{T_i}$	0	$d_1$

Alla termer i den första kolumnen är strikt positiva om

$$T_i > \frac{1}{0.1 + K_c T_d} \approx 0.48.$$

Med de givna värden på  $K_c$  och  $T_i$  och  $T_d$  är detta villkor alltid uppfyllt, och systemet är således asymptotiskt stabilt.

(b) För att avgöra om det kan finnas en självsvängning, används metoden med beskrivande funktion. Eftersom systemet inte är på "standardform", måste man slå ihop processen och regulatorn (se sid 350 i kursboken). Beskrivande funktionen för en mättning (se kursboken sid 404) ges av

$$Y_f(C) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left( \arcsin \frac{1}{C} + \frac{\sqrt{C^2-1}}{C} \right) & \text{då } C > 1 \\ 1 & \text{då } C \leq 1 \end{cases}$$

Denna funktion ligger mellan 0 och 1 för alla  $C$ , alltså sträcker sig  $-\frac{1}{\sqrt{1-C^2}}$  längs den negativa reella axeln vänster om punkten  $-1$ . Om en självsvängning skall kunna predikteras med beskrivande funktion, så måste  $L(i\omega)$  skära den negativa reella axeln till vänster om  $-1$ . För att kunna räkna ut detta, måste man skaffa sig

$$\begin{aligned} L(i\omega) &= K_c \frac{(1 - T_d T_i \omega^2) + i\omega T_i}{T_i \omega^2 T_i (0.1 + i\omega)} \\ &= K_c \frac{0.1(1 - T_d T_i \omega^2) + \omega^2 T_i}{-T_i \omega^2 (0.01 + \omega^2)} + i \frac{(0.1 T_i - 1 + T_d T_i \omega^2) \omega}{-T_i \omega^2 (0.01 + \omega^2)} \end{aligned}$$

För att ta reda på när denna funktion skär negativa reella axeln, betrakta när imaginärdelen av  $L(i\omega)$  är lika med noll.

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} L(i\omega) &= 0 \\ \Leftrightarrow (0.1 T_i - 1 + T_d T_i \omega^2) \omega &= 0 \\ \{ \omega = 0 \text{ är ointressant (origo)} \} \\ \Leftrightarrow 0.1 T_i - 1 + T_d T_i \omega^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \omega = \omega_0 &= \sqrt{\frac{1 - 0.1 T_i}{T_d T_i}} \end{aligned}$$

Vidare kan man konstatera att  $\operatorname{Im} L(i\omega) > 0 \forall \omega < \omega_0$  och  $\operatorname{Im} L(i\omega) < 0 \forall \omega > \omega_0$ . Dessutom vet man att  $\operatorname{Re} L(i\omega) = -\infty$  då  $\omega \rightarrow 0$  och  $\operatorname{Re} L(i\omega) = 0$  då  $\omega \rightarrow \infty$ . Detta tillsammans med resultatet från (a) leder till följande två fall:

- (a)  $T_i < 10$ : det finns en frekvens  $\omega_0$  som inte är 0 eller  $\infty$  där Nyquistkurvan skär imaginäraxeln.
- (b)  $T_i \geq 10$ : ekvationen ger ingen intressant lösning, dvs Nyquist kurvan skär inte den imaginära axeln förutom i origo.

Detta betyder att det kan uppstå en självsvängning bara om man har en tillräcklig stark integraldel ( $T_i < 10$ ). För integraltider större än 10 predikterar metoden ingen självsvängning.

14.8

(a) Den beskrivande funktionen för reläet är

$$Y_f(C) = \frac{4}{\pi C}$$

Eftersom den är reell måste vi söka skärningen mellan  $G(i\omega)$  och  $-1/Y_f(C)$  där  $G(i\omega)$  också är reell. Vi har

$$G(i\omega) = \frac{1}{(1 + \omega^2)^2} \left( -2 - \frac{i(1 - \omega^2)}{\omega} \right),$$

vilket ger  $\omega = 1$  som motsvarar en periodtid på  $T = 2\pi \approx 6.28$ . Eftersom  $Y_f$  är avtagande kommer svängningen i detta fall att vara stabil.

(b) Låt  $G(s)$  ha tillståndsrealiseringen

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned}$$

Antag att vi har en stabil självsvängning och att reläet slår om vid tidpunkterna  $t_k$ . Styrsignalen kommer då att vara konstant ( $u(t) = \bar{u}_k$ ) mellan  $t_k$  och  $t_{k+1}$ . Vi får då det "samplade" systemet

$$\begin{aligned} x(t_{k+1}) &= Fx(t_k) + K\bar{u}_k \\ y(t_k) &= Cx(t_k), \end{aligned}$$

där

$$F = e^{sT/2} \quad \text{och} \quad K = \int_0^{T/2} e^{-bs} ds B.$$

där  $T/2 = t_{k+1} - t_k$  är halva periodtiden. Eftersom signalen är symmetrisk får vi  $x(t_{k+1}) = -x(t_k)$ . Dessutom måste vi ha  $\eta(t_k) = 0$  i omslagpunkterna. Detta ger

$$C(I + F)^{-1} K \bar{u}_k = 0 \quad (14.1)$$

vilket är detsamma som  $H_{T/2}(-1) = 0$ , där  $H_\tau$  definierats i ledningen. Numerisk lösning ger  $T \approx 6.42$ .

### 14.9

(a) Kretsförstärkningen ges av

$$G_0(s) = F(s)G(s) = \frac{K_c N (sT_i + 1 + s^2 T_i^2 T_d)(s + b)}{T_i^2 s^2 (s + 0.1)(s + bN)}$$

För att underlätta räkningarna väljes  $b = 0.1$ . Observera att detta ej nödvändigtvis är ett bra val i praktiken. Med detta val gäller dock att imaginärdelen av  $G_0(i\omega)$  ges av

$$\frac{K_c N (0.1 T_i N - 1 + \omega^2 T_i T_d)}{\omega T_i^2 (N + \omega^2)}$$

som är negativ för alla  $\omega > 0$  om  $N > 10/T_i$ . Detta medför att Nyquistkurvan för kretsförstärkningen ej skär negativa reella axeln, och speciellt ej negativa reella axeln till vänster om  $-1$ . Alltså predikterar metoden med beskrivande funktion ej självsvängning.

(b) Det gäller att

$$\tilde{U}(s) = W(s) [U(s) - \tilde{U}(s)] - F(s)G(s)U(s)$$

och därav följer att  $\tilde{U}(s) = -H(s)U(s)$  med

$$H(s) = \frac{F(s)G(s) - W(s)}{1 + W(s)}$$

Metoden med beskrivande funktion predikterar ej självsvängning om Nyquistkurvan för  $H(s)$  ej skär negativa reella axeln till vänster om  $-1$ . Detta är ekvivalent med att Nyquistkurvan för

$$1 + H(s) = \frac{1 + F(s)G(s)}{1 + W(s)}$$

ej skär negativa reella axeln. Börja med att beräkna täljaren:

$$\begin{aligned} 1 + F(s)G(s) &= \frac{s^2(s + 0.1) + K_c(s + 1/T_i + s^2 T_d)}{s^2(s + 0.1)} \\ &= \frac{(s + \alpha\omega_0)(s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2)}{s^2(s + 0.1)} \\ &= \frac{(s + 1)(s^2 + 0.7s + 0.25)}{s^2(s + 0.1)} \end{aligned}$$

Detta medför att

$$1 + H(s) = \frac{(s + 1)(s^2 + 0.7s + 0.25)}{s(s + 0.1)(s + 1/T_i)}$$

Om  $T_i = 1$  gäller att

$$1 + H(s) = \frac{s^2 + 0.7s + 0.25}{s(s + 0.1)}$$

Låt  $s = i\omega$ . Argumentet för nämnaren är då  $-\pi/2$  för  $\omega = 0$  och avtar mot  $-\pi$  då  $\omega \rightarrow \infty$ . Argumentet för täljaren är 0 för  $\omega = 0$  och växer mot  $\pi$  då  $\omega \rightarrow \infty$ . Alltså gäller att argumentet för  $1 + H(i\omega)$  är större än  $-\pi$  för alla  $\omega > 0$ . Följdaktligen predikterar metoden med beskrivande funktion ej självsvängning. Observera att även alla värden på  $T_i$  som uppfyller  $0 < T_i \leq 1$  är tillåtna, eftersom argumentet för  $(i\omega + 1)/(i\omega + 1/T_i)$  då är positivt. Observera också att vi inte uttalat oss om värden på  $T_i > 1$ .

(c) Metoden i (a) kräver ingen mätning eller beräkning av den mättrade signalen, vilket är en fördel. En nackdel är att högfrekvensförstärkningen ökar, vilket kan medföra orimligt hög förstärkning av mätbrus. Metoden i (b) modifierar inte det slutna systemets dynamik om styrsignalen ej mätts, vilket är en fördel. En nackdel är att den mättrade signalen måste mätas eller beräknas.

### 14.10

(a) Rättframman men långa räkningar.

(b) Det gäller att regulatorns systemmatris ges av

$$F - MH = \begin{pmatrix} -1/T_i & K_c N/T_i \\ 0 & -N/T_d \end{pmatrix}$$

Polerna ges av nollställena till  $\det(sI - F + MH) = (s + 1/T_i)(s + N/T_d)$ . Alltså flyttas integratortipolen från 0 till  $-1/T_i$ . Den andra polen modifieras inte.

(c) Överföringsfunktionen från  $U(s)$  till  $\tilde{U}(s)$  ges av

$$W(s) = H(sI - F)^{-1}M = \frac{1}{sT_i}$$

(d) Låt

$$M = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$$

Regulatorns poler ges av nollställena till

$$\det(sI - F + MH) = s^2 + (m_1 + N/T_d - K_c N m_2)s + m_1 N/T_d$$

Genom att sätta koefficienterna för detta polynom av  $s$  lika med koefficienterna för  $s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$  erhålles två linjära ekvationer i  $m_1$  och  $m_2$  från vilka erhålles

$$m_1 = \frac{T_d \omega_0^2}{N}$$

$$m_2 = \frac{1}{K_c N} \left( \frac{T_d \omega_0^2}{N} + \frac{N}{T_d} - 2\zeta\omega_0 \right)$$

(e) Överföringsfunktionen från  $U(s) - \tilde{U}(s)$  till  $\tilde{U}(s)$  ges av

$$W(s) = H(sI - F)^{-1}M = \frac{\omega_0^2 - (N/T_d - 2\zeta\omega_0)s}{s(s + N/T_d)}$$

### 14.11

a) The describing function of the nonlinear block becomes, see the textbook, Example 14.5,

$$Y_f(C) = \begin{cases} 1 & C \leq 1 \\ \frac{2}{\pi} \left[ \arcsin \frac{1}{C} + \frac{1}{C} \sqrt{1 - \frac{1}{C^2}} \right] & C > 1 \end{cases}$$

Hence the curve  $-1/Y_f(C)$  starts in the point  $s = -1$ , and moves to the left along the negative real axis (as  $C$  increases from the value  $C = 1$  upwards.)

The Nyquist curve  $G(i\omega)$  lies completely in the third quadrant, and does not intersect  $-1/Y_f(C)$ . Hence the use of the describing function indicates that there will be no stable oscillation in the system.

b) The nonlinearity lies in a sector such that

$$0 \leq \left| \frac{f(y)}{y} \right| \leq 1$$

and hence  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = 1$ . Thus the circle to be used in the circle criterion degenerates in this case to the whole area to the left of the line  $Re\ s = -1$ .

A sufficient condition for stability is hence that the Nyquist curve lies complete to the right of the line  $Re\ s = -1$ . This means

$$Re \frac{K}{i\omega(i\omega + 1)} > -1, \quad \forall \omega$$

$$Re \frac{K(-i\omega)(-i\omega + 1)}{\omega^2(\omega^2 + 1)} > -1, \quad \forall \omega$$

$$-\frac{K\omega^2}{\omega^2(\omega^2 + 1)} > -1, \quad \forall \omega$$

$$K < \omega^2 + 1, \quad \forall \omega$$

$$K < 1$$

### 14.12

(a) Den beskrivande funktionen för relä med dödzon är (sidan 404 i kursboken).

$$Y_f(C) = \begin{cases} \frac{4}{\pi C} \sqrt{1 - D^2/C^2} & C > D \\ 0 & 0 \leq C \leq D \end{cases}$$

(b) Den beskrivande funktionen är grundtonen i en fourierserietveckling av den statistiska olinjäriteten. Fourierserien är

$$f(C \sin \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(C) \cos(n\alpha) + b_n(C) \sin(n\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(C) \cos(n\alpha + \varphi_n(C))$$

och koefficienterna räknas ut som

$$a_n(C) = \int_0^{2\pi} f(C \sin \alpha) \sin(n\alpha) d\alpha = \int_0^{2\pi} (f_1(C \sin \alpha) + f_2(C \sin \alpha)) \sin(n\alpha) d\alpha =$$

$$\int_0^{2\pi} f_1(C \sin \alpha) \sin(n\alpha) d\alpha + \int_0^{2\pi} f_2(C \sin \alpha) \sin(n\alpha) d\alpha = a_{n1}(C) + a_{n2}(C)$$

$$b_n(C) = \int_0^{2\pi} f(C \cos \alpha) \cos(n\alpha) d\alpha = \int_0^{2\pi} (f_1(C \cos \alpha) + f_2(C \cos \alpha)) \cos(n\alpha) d\alpha =$$

$$\int_0^{2\pi} f_1(C \cos \alpha) \cos(n\alpha) d\alpha + \int_0^{2\pi} f_2(C \cos \alpha) \cos(n\alpha) d\alpha = b_{n1}(C) + b_{n2}(C)$$

Fourierserien för stumman av två funktioner är stumman av fourierserierna av de enskilda funktionerna. Detta medför att den beskrivande funktionen för två parallellkopplade länkar är summan av länkarnas beskrivande funktioner.

(c) De beskrivande funktionerna är

$$Y_{f_1}(C) = \begin{cases} \frac{4}{\pi C} \sqrt{1 - 1/C^2} & C > 1 \\ 0 & 0 \leq C \leq 1 \end{cases}$$

$$Y_{f_2}(C) = \begin{cases} \frac{4}{\pi C} \sqrt{1 - 4/C^2} & C > 2 \\ 0 & 0 \leq C \leq 2 \end{cases}$$

Summan blir

$$Y_f(C) = \begin{cases} 0 & 0 \leq C \leq 1 \\ \frac{4}{\pi C} \sqrt{1 - 1/C^2} & 1 < C \leq 2 \\ \frac{4}{\pi C} (\sqrt{1 - 1/C^2} + \sqrt{1 - 4/C^2}) & C > 2 \end{cases}$$

### 14.13

(a) Exempel 14.3 sidan 403 i kursboken ger

$$Y_f(C) = K \left( 1 + \frac{3C^2}{4} \right)$$

- (b)  $-1/Y_f(C)$  motsvarar negativa reella axeln till höger om punkten  $-1/K$ . Eftersom Nyquist kurvan för likströmsmotorn uppfyller  $\text{Im}[G(i\omega)] < 0$  är det återkopplade systemet stabilt för alla värden på  $K$ .

- (c) En extra pol ökar fäsvridningen och kurvorna kommer att skära varandra. Om Nyquistkurvan för systemet omsluter punkten  $-1/K$ , så är systemet instabilt. Om den skär reella axeln till höger om punkten  $-1/K$ , så kommer systemet att vara stabilt för små amplituder  $C$ , men ge en instabil självsvängning för stora amplituder.

#### 14.14

- (a) Periodtiden för svängningen är  $T_u = 3$ , amplituden för  $y$  är  $C = 0.6$ , och reläets amplitud är  $u_0 = 1$ . Vidare gäller att beskrivande funktionen för reläet är  $Y_f(C) = 4u_0/(\pi C)$ . Självsvängning fås då  $Y_f(C)G(i\omega) = -1$ . Alltså ges den kritiska förstärkningen i Ziegler-Nichols frekvensvarsvarsmetod av  $K_u = 1/G(i\omega) = Y_f(C) = 4/(0.6\pi) = 2.1$ . Från tabellen erhålles  $K = 0.4K_u = 0.84$  och  $T_i = 0.8T_u = 2.4$ .
- (b) Det gäller att  $\arg(G(i\omega)) = -\arctan(\omega/a)$ , vilket medför att  $-\pi/2 < \arg(G(i\omega)) \leq 0$  för  $0 \leq \omega \leq \infty$ . Vidare gäller för en PI-regulator  $F(s) = K(1+1/(sT_i))$  att  $\arg(F(i\omega)) = \arctan(\omega T_i) - \pi/2$ , vilket medför att  $-\pi/2 \leq \arg(F(i\omega)) \leq 0$  för  $0 \leq \omega \leq \infty$ . Alltså gäller för kretsförstärkningen  $L(s) = F(s)G(s)$  att  $-\pi < \arg(L(i\omega)) \leq 0$  för  $0 \leq \omega \leq \infty$ . Därför skär Nyquistkurvan för  $L$  ej negativa reella axeln. Vidare ser vi i figuren för  $Y_f(C)$  att  $-1/Y_f(C)$  kommer att ligga helt på negativa reella axeln. Alltså finns det ingen skärning som gör att metoden med beskrivande funktion predikterar självsvängning.

## 15 Regulatorsyntes för olinjära system

## 16 Prediktionsreglering: MPC, GPC och DMM

### 16.1

We start by computing the one-, two-, and three-step predictors. We have that

$$\begin{aligned}\hat{y}(t+1) &= 1.7y(t) - 0.7y(t-1) + 0.9\Delta u(t) - 0.6\Delta u(t-1), \\ \hat{y}(t+2) &= 1.7\hat{y}(t+1) - 0.7\hat{y}(t) + 0.9\Delta u(t+1) - 0.6\Delta u(t) \\ &= 2.19y(t) - 1.19y(t-1) \\ &\quad + 0.9\Delta u(t+1) + 0.93\Delta u(t) - 1.02\Delta u(t-1), \\ \hat{y}(t+3) &= 1.7\hat{y}(t+2) - 0.7\hat{y}(t+1) + 0.9\Delta u(t+2) - 0.6\Delta u(t+1) \\ &= 2.533y(t) - 1.533y(t-1) \\ &\quad + 0.9\Delta u(t+2) + 0.93\Delta u(t+1) + 0.951\Delta u(t) - 1.314\Delta u(t-1).\end{aligned}$$

In matrix form, we can express this as

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \hat{y}(t+1) \\ \hat{y}(t+2) \\ \hat{y}(t+3) \end{pmatrix}}_{\hat{y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.9 & 0 & 0 \\ 0.93 & 0.9 & 0 \\ 0.951 & 0.93 & 0.9 \end{pmatrix}}_S \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta u(t) \\ \Delta u(t+1) \\ \Delta u(t+2) \end{pmatrix}}_u + \underbrace{\begin{pmatrix} 1.7y(t) - 0.7y(t-1) - 0.6\Delta u(t-1) \\ 2.19y(t) - 1.19y(t-1) - 1.02\Delta u(t-1) \\ 2.533y(t) - 1.533y(t-1) - 1.314\Delta u(t-1) \end{pmatrix}}_f$$

Using these matrix expressions (and the reference signal vector  $\mathbf{r}$ ) the criterion becomes

$$J = (\mathbf{r} - \hat{y})^T (\mathbf{r} - \hat{y}) + 0.1 \cdot \mathbf{u}^T \mathbf{u} = (\mathbf{r} - \mathbf{S}\mathbf{u} - \mathbf{f})^T (\mathbf{r} - \mathbf{S}\mathbf{u} - \mathbf{f}) + 0.1 \cdot \mathbf{u}^T \mathbf{u}$$

which is minimized by

$$\mathbf{u} = (\mathbf{S}^T \mathbf{S} + 0.1 \cdot \mathbf{I})^{-1} \mathbf{S}^T (\mathbf{r} - \mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 0.8947 & 0.0929 & 0.0095 \\ -0.8316 & 0.8091 & 0.0929 \\ -0.0766 & -0.8316 & 0.8947 \end{pmatrix} (\mathbf{r} - \mathbf{f})$$

The controller is the first component of this vector, i.e.

$$\begin{aligned}\Delta u(t) &= 0.644\Delta u(t-1) - 1.7483y(t) + 0.7513y(t-1) \\ &\quad + 0.8917r(t+1) + 0.0929r(t+2) + 0.0095r(t+3)\end{aligned}$$

**16.2**

We have that

$$\begin{pmatrix} \hat{y}(t+3) \\ \hat{y}(t+2) \\ \hat{y}(t+1) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} CA^3 \\ CA^2 \\ CA \end{pmatrix}}_{\mathbf{H}} x(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} CB & CA^2B & CA^3B \\ 0 & CB & CA^2B \\ 0 & 0 & CB \end{pmatrix}}_{\mathbf{S}} \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta u(t+2) \\ \Delta u(t+1) \\ \Delta u(t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

The criterion can thus be written as

$$\begin{aligned} J &= (\mathbf{r} - \hat{\mathbf{y}})^T (\mathbf{r} - \hat{\mathbf{y}}) + 0.1 \cdot \mathbf{u}^T \mathbf{u} \\ &= (\mathbf{r} - \mathbf{H}\mathbf{x}(t) - \mathbf{S}\mathbf{u})^T (\mathbf{r} - \mathbf{H}\mathbf{x}(t) - \mathbf{S}\mathbf{u}) + 0.1 \cdot \mathbf{u}^T \mathbf{u}. \end{aligned}$$

which is minimized by

$$\mathbf{u} = (\mathbf{S}^T \mathbf{S} + 0.1 \cdot I)^{-1} \mathbf{S}^T (\mathbf{r} - \mathbf{H}\mathbf{x}(t)).$$

In this case, it holds that

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2.53 & 2.19 \\ 2.19 & 1.7 \\ 1.7 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.93 & 0.951 \\ 0 & 0.9 & 0.93 \\ 0 & 0 & 0.9 \end{pmatrix}$$

which gives

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -0.3148 & -0.469 \\ -0.5936 & -0.7474 \\ -1.7483 & -1.0733 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0.8947 & -0.8316 & -0.0766 \\ 0.0929 & 0.8091 & -0.8316 \\ 0.0095 & 0.0929 & 0.8947 \end{pmatrix} \mathbf{r},$$

i.e.

$$\begin{aligned} \Delta u(t) &= -1.7483x_1(t) - 1.0733x_2(t) \\ &\quad + 0.8947r(t+1) + 0.0929r(t+2) + 0.0095r(t+3). \end{aligned}$$

Now, however, it holds that

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= -0.7x_1(t-1) - 0.6\Delta u(t-1) = -0.7y(t-1) - 0.6\Delta u(t-1) \end{aligned}$$

Inserting this in the expression for  $\Delta u(t)$  above gives

$$\begin{aligned} \Delta u(t) &= 0.644\Delta u(t-1) - 1.7483y(t) + 0.7513y(t-1) \\ &\quad + 0.8947r(t+1) + 0.0929r(t+2) + 0.0095r(t+3). \end{aligned}$$

**16.3**

(a) Process model

$$y(t) = G(q)u(t) = \frac{C(q)}{\Delta} \Delta u(t) = S(q)\Delta u(t)$$

where  $\Delta = 1 - q^{-1}$ . It thus holds that

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} s(k)\Delta u(t-i)$$

where  $s(k)$  are the step response coefficients to the system  $G(q)$ . The predictor at time  $t+k$  can thus be expressed as

$$\hat{y}(t+k) = \sum_{i=1}^{\infty} s(k)\Delta u(t+k-i).$$

Truncate the step response at  $i = n > k$  and partition the sum above into one part which depends on future control signals and one that depends on old control signals, i.e.

$$\hat{y}(t+k) = \underbrace{\sum_{i=1}^k s(k)\Delta u(t+k-i)}_{\text{framtida}} + \underbrace{\sum_{i=k+1}^n s(k)\Delta u(t+k-i)}_{\text{gamla}}$$

Analogously with Exercise 16.1 one can hence express all future predictions as

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{S}\mathbf{u} + \mathbf{f}.$$

where  $\mathbf{S}$  is a triangular matrix,  $\mathbf{u}$  includes future  $\Delta u$ 's and  $\mathbf{f}$  summarizes all old information. The control vector that minimizes the criterion is

$$\mathbf{u} = (\mathbf{S}^T \mathbf{S} + Q \cdot I)^{-1} \mathbf{S}^T (\mathbf{r} - \mathbf{f}).$$

The first component in this vector is used to control the process.

(b) Advantage: no detailed process model is required. It is sufficient to perform simple step response experiments to estimate the coefficients  $s(k)$ . Disadvantage: the predictor does not become exact since the step response has to be truncated in a practical implementation.

**16.4**

(c) With the prediction horizon  $Np = 1$ , the objective function becomes

$$V = y_k^2 + \hat{y}_{k+1}^2 + u_k^2$$

With the state-space model inserted

$$V = 2y_k^2 - 4y_k u_k + 5u_k^2$$

As the value of  $y_k$  is assumed given, the first term of the objective function will not affect the optimal input sequence and can be removed. Thus,  $h = 5$  and  $h = -4y_k$ .

The constraints give

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ L \end{pmatrix} u_k \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$





## 17.5

(a) Newtons kraftlag ger

$$m\ddot{y} = F - k(y) - d(\dot{y})$$

Inför  $x_1 = y$ ,  $x_2 = \dot{y}$  och  $x_3 = F$  vilket ger tillståndsformeln

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m}(-k(x_1) - d(x_2) + x_3) \\ \dot{x}_3 &= -x_3 + u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

(b) Relativt gradtal  $\nu$ ? Derivera  $y$ !

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{x}_1 = x_2 \\ \ddot{y} &= \dot{x}_2 = \frac{1}{m}(-k(x_1) - d(x_2) + x_3) \\ y^{(3)} &= \frac{1}{m}(-k'(x_1)\dot{x}_1 - d'(x_2)\dot{x}_2 + \dot{x}_3) \\ &= \frac{1}{m}(-k'(x_1)\dot{x}_1 - d'(x_2)\dot{x}_2 - x_3 + u) \end{aligned}$$

Alltså gäller att  $\nu = n = 3$  och det går att exakt linjärisera systemet. Inför variabelbytet

$$\begin{cases} z_1 = y \\ z_2 = \dot{y} \\ z_3 = \ddot{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = z_1 \\ x_2 = z_2 \\ x_3 = k(z_1) + d(z_2) + mz_3 \end{cases}$$

vilket ger tillståndsrepresentationen

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= \frac{1}{m}(-k'(z_1)z_2 - d'(z_2)z_3 - k(z_1) - d(z_2) - mz_3 + u) \\ y &= z_1 \end{aligned}$$

Styrslagen

$$u = m\dot{u} + k'(z_1)z_2 + d'(z_2)z_3 + k(z_1) + d(z_2) + mz_3$$

gör således systemet linjärt från  $\hat{u}$  till  $y$ .

## 18 Optimal styrning

### 18.1

Låt  $x_1 = \theta$  och  $x_2 = \omega$ . Då fås

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$$

det vill säga

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u = Ax + Bu$$

Vi har följande krav:  $x_2(t_f) = 0$ ,  $\varepsilon \leq x_1(t_f) \leq \varepsilon$ ,  $U = \{u : -2 \leq u(t) \leq 1\}$ .

$$\min_{u \in U} \int_0^{t_f} l(x, u) dt + \phi(t_f, x(t_f))$$

då

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x(0) = x_0 \\ x_1(t_f) = \bar{\varepsilon}, & -\varepsilon \leq \bar{\varepsilon} \leq \varepsilon \\ x_2(t_f) = 0 \end{cases}$$

Specifikt gäller här

$$\begin{cases} L(x, u) = 1 \\ \phi(t_f, x(t_f)) = 0 \\ \psi_1(t_f, x(t_f)) = x_2(t_f) \\ \psi_2(t_f, x(t_f)) = x_1(t_f) - \bar{\varepsilon} \\ \phi'(t_f, x(t_f); \mu) = \mu_1 x_2 + \mu_2 (x_1 - \bar{\varepsilon}) \end{cases}$$

Maximumprincipen ger villkoren

$$\min_{u \in U} H(x, u, \lambda)$$

med

$$H(x, u, \lambda) = L(x, u) + \lambda^T f(x, u) = 1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$$

då gäller

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, & x(0) &= x_0 \\ \dot{\lambda} &= -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T = -\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}, & \lambda(t_f) &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^T = \begin{pmatrix} \mu_2 \\ \mu_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

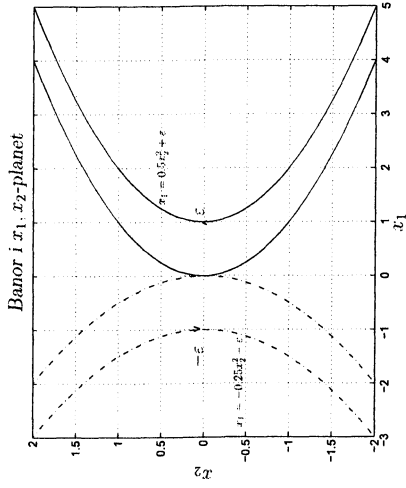
Eftersom  $\begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  har rang 2 och  $\psi_2(t_f, x(t_f)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  har rang 2 och egenvärdena till  $A$  är  $[0, 0]$ , vet vi sedan tidigare att  $u$  har bang-bang-karaktär med högst ett omslag.

$$u = +1 \text{ ger } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{dx_1}{dx_2} = x_2, \quad \text{dvs } x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + C_1$$

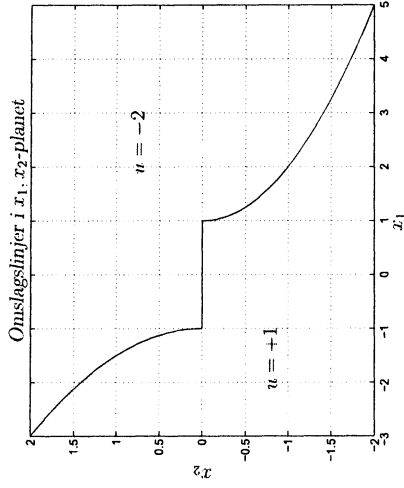
$$u = -2 \text{ ger } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{1}{2}x_2, \quad \text{dvs } x_1 = -\frac{1}{4}x_2^2 + C_1$$

Vi får följande banor i  $x_1$ - $x_2$ -planet enligt Figur 7.

Eftersom vi ska stanna på infsegmentet  $-\varepsilon \leq x_1 \leq \varepsilon$ ,  $x_2 = 0$  efter högst ett omslag hos  $u$  blir omslagslinjerna enligt Figur 8.



Figur 7: Banor i  $x_1$ - $x_2$ -planet för  $u = +1$  (heldragen linje) och  $u = -2$  (punktstreckad linje).



Figur 8: Optimala omslagskurvor i  $x_1$ - $x_2$ -planet med  $\varepsilon = 1$ .

## 18.2

Låt  $G(s) = \frac{1}{s}$ . Vi vill konstruera en styrslag som minimerar tiden för att styra systemet från ett godtyckligt tillstånd till origo, dvs

$$\min_{|u| \leq 1} \int_0^{t_f} 1 dt$$

311

under bivillkoret att sluttillstånden hamnar i origo.

Inför tillstånden  $x_1 = y$ ,  $x_2 = \dot{y}$  och låt  $x = (x_1, x_2)^T$ . Tillståndsbeskrivning:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$$

dvs  $\dot{x} = Ax + Bu$  där  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  och  $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Vi kan formulera problemet på följande sätt:  $\mathcal{U} = \{u : |u| \leq 1\}$

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \int_0^{t_f} L(x, u) dt + \phi(t_f, x(t_f))$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, x(0) = x_0 \\ \Psi(t_f, x(t_f)) = x(t_f) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

där  $L(x, u) = 1$  och  $\phi(t, x) = 0$ , låt dessutom

$$\tilde{\phi} := \phi(t, x) + \mu^T \Psi(t, x) = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2$$

De nödvändiga villkor som styrslagen måste uppfylla ges av maximumprincipen:

$$\min_{u \in \mathcal{U}} H(x, u, \lambda) = L(x, u) + \lambda^T (AX + Bu) = 1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$$

där

$$\begin{cases} \lambda = - \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)^T = - \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \\ \lambda(t_f) = \left( \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \right)^T = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Nu är  $\{A, B\}$  styrbart, egenvärdena till  $A$  är båda reella och  $\Psi_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Sats ger att  $u(t)$  har bang-bang-karaktär med högst ett omslag. Alltså

$$u(t) = \begin{cases} -1, 0 \leq t < t_1 \\ +1, t_1 \leq t \leq t_f \end{cases} \text{ eller } u(t) = \begin{cases} +1, 0 \leq t < t_1 \\ -1, t_1 \leq t \leq t_f \end{cases}$$

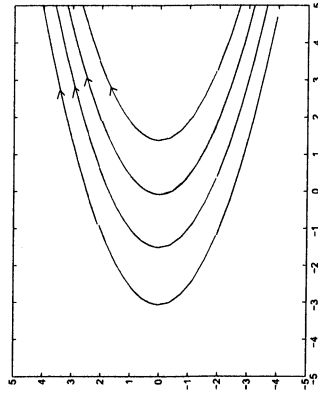
Ur differentialekvationerna kan vi också utläsa att  $x_1$  växer då  $x_2 > 0$  och avtar då  $x_2 < 0$

För  $u(t) = +1$  får vi  $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{dx_1}{dx_2} = x_2 \Leftrightarrow x_1 + C_1 = \frac{1}{2} x_2^2$$

se Figur 9.

312

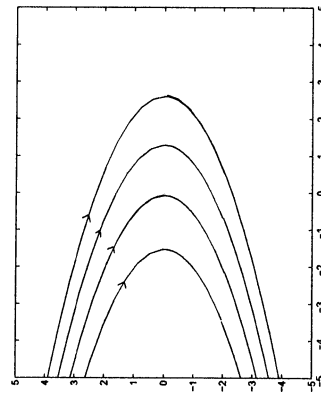


Figur 9: Fasplan för  $u(t) = +1$ .

För  $u(t) = -1$  får vi  $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -1 \end{cases}$

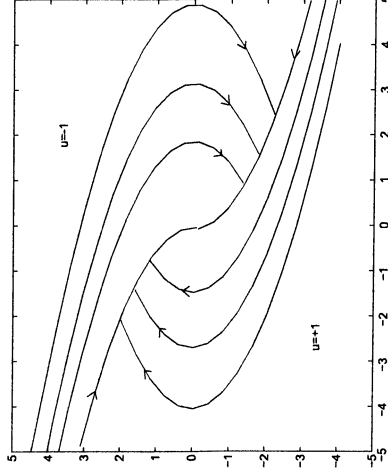
$$\Rightarrow \frac{\dot{x}_1}{\dot{x}_2} = \frac{dx_1}{dx_2} = -x_2 \Leftrightarrow x_1 + C_2 = -\frac{1}{2}x_2^2$$

se Figur 10.



Figur 10: Fasplan för  $u(t) = -1$ .

Nu vet vi att  $u(t) = \pm 1$  med högst ett omslag. Alltså måste insvängningen mot origo ske enligt Figur 11.



Figur 11: Fasplan för  $u(t) = \pm 1$ .

Styrslagen definieras alltså av

$$u(t) = -\text{sign} \left\{ x_1(t) - \frac{1}{2} \text{sign}\{x_1(t)\} x_2^2(t) \right\}$$

ty då är  $u(t) = -1$  ovanför omslagskurvan och  $u(t) = +1$  nedanför.

### 18.3

$$G(s) = \frac{1}{s(s-1)} \Rightarrow \dot{y} - \dot{y} = u$$

Lat  $x_1 = y$  och  $x_2 = \dot{y} \Rightarrow$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u = Ax + Bu$$

Vi vill ange en styrslag som för tillståndet från ett godtyckligt utgångsläge till origo på minimal tid under villkoret att  $|u(t)| \leq 1$ . Dvs:

$$\min |u| \leq 1 \int_0^{t_f} 1 dt \text{ då } \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Observera att om  $x_2 > 1$  så är  $\dot{x}_2(t) > 0 \forall t$  ty  $|u(t)| \leq 1$ . Detta betyder att  $x_2(t)$  växer obegränsat oberoende av  $u(t)$ . På samma sätt inses att  $x_2(t)$  avtar obegränsat om  $x_2 < 0$ . Slutsatsen är att systemet inte är styrbart för godtyckliga utgångslägen,  $x_0$ , och att problemet därför saknar lösning.

### 18.4

Vi har följande ekvationer

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x \\ \dot{y} = v_y \\ \dot{z}_x = \frac{F}{m} \cos(u) \\ \dot{z}_y = \frac{F}{m} \sin(u) - g \end{cases}$$

$$\text{Låt } z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{z} = f(z, u).$$

Antag att  $\phi(t_f, z(t_f))$  beskriven kriteriet som ska minimeras och att  $\psi(t_f, z(t_f)) = 0$  är de bivillkor som ska vara uppfyllda vid  $t = t_f$ . Alltså är integralen  $\int L(x, u) dt$  ej med.

Maximumprincipen ger nu

$$\min_{u \in U} H(z, u, \lambda) = \lambda^T f(z, u) = \lambda_1 z_3 + \lambda_2 z_4 + \lambda_3 \frac{F}{m} \cos u + \lambda_4 \left( \frac{F}{m} \sin u - g \right)$$

med

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z, u), & z(0) = z_0 \\ \dot{\lambda} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial z} \end{pmatrix}^T \\ \lambda(t_f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix}^T \\ \tilde{\phi}(t_f, z, u) = \phi(t_f, z) + \mu^T \psi(t_f, z) \end{cases}$$

De termer i  $H$  som innehåller  $u$  är

$$\frac{F}{m} (\cos u \sin u) \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = a^T b = |a||b| \cos(\varphi)$$

Maximum fås om  $\varphi = 0$  och minimum om  $\varphi = \pi$ . Således ska  $\begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \end{pmatrix}$  vara

riktad åt  $-\begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}$ . Alltså

$$\tan u = \frac{\sin u}{\cos u} = \frac{\lambda_1}{\lambda_3}$$

Vi har nu

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial z_1} = 0 & \Rightarrow \lambda_1(t) = C_1 \\ \dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial z_2} = 0 & \Rightarrow \lambda_2(t) = C_2 \\ \dot{\lambda}_3 = -\frac{\partial H}{\partial z_3} = -\lambda_1 & \Rightarrow \lambda_3(t) = -C_1 t + C_3 \\ \dot{\lambda}_4 = -\frac{\partial H}{\partial z_4} = -\lambda_2 & \Rightarrow \lambda_4(t) = -C_2 t + C_4 \end{cases}$$

Alltså

$$\tan(u(t)) = \frac{-C_2 t + C_4}{-C_1 t + C_3} = \frac{A t + B}{C t + D}$$

Hur kan vi beräkna  $C_1, \dots, C_4$ ? Optimala trajektorier kan genereras av  $\dot{z} = f(z, u)$ ,  $z(0) = z_0$  med  $u = \arctan\left(\frac{At+B}{Ct+D}\right)$ . Detta är ett randvärdesproblem som generellt sett är svåra att lösa.

### 18.5

Jämfört med uppgift 18.4 tillfogar vi  $\dot{m} = -\gamma F$  i tillståndsbeskrivningen. Alltså

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x \\ \dot{y} = v_y \\ \dot{v}_x = \frac{F}{m} \cos u \\ \dot{v}_y = \frac{F}{m} \sin u - g \\ \dot{m} = -\gamma F \end{cases}$$

$$\text{Låt } z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ v_x \\ v_y \\ m \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{z} = f(z, u).$$

Vidare är styrsignalen begränsad:  $0 \leq F \leq F_{\max}$ .

Vi tillämpar nu maximumprincipen på vårt problem

$$(*) \begin{cases} \min \phi(t_f, z(t_f)) & \dot{z} = f(z, u) \\ u(t) \in U, U = \{u : 0 \leq u \leq F_{\max}\} \\ z(0) = z_0 \\ \psi(t_f, z(t_f)) = 0 \end{cases}$$

Det finns ett  $\mu \neq 0$  (här  $\mu_0 = 1$ ) med

$$\tilde{\phi}(t, z(t); \mu) = \mu_0 \phi(t, z) + \sum_{j=1}^r \mu_j \psi_j(t, z)$$

om (\*) har en lösning  $z^*, u^*$ . Samtidigt gäller

$$\min_{u \in U} H(z^*, u, \lambda) = H(z^*, u^*, \lambda), \quad 0 \leq t \leq t_f$$

där  $\lambda$  uppfyller

$$\dot{\lambda} = -H_z(z^*, u^*, \lambda)^T, \quad \lambda(t_f) = \tilde{\phi}_z(t_f, x^*(t_f))^T$$

med

$$H(z, u, \lambda) = L(z, u) + \lambda^T f(z, u) = \lambda^T f(z, u)$$

eftersom  $L(z, u) = 0$  i vårt fall.

$$H(z, u, \lambda) = \lambda^T f(z, u) =$$

$$\lambda_1 z_3 + \lambda_2 z_4 + \lambda_3 \left( \frac{u_2}{z_5} \cos u_1 \right) + \lambda_4 \left( \frac{u_2}{z_5} \sin u_1 - g \right) - \lambda_5 \gamma u_2$$

Minimera nu  $H$  med avseende på  $u_1$  och  $u_2$

$$\min_{u \in U} H(z, u, \lambda)$$

$$= \min_{u \in U} \left( \lambda_3 \frac{u_2}{z_5} \cos u_1 + \lambda_4 \frac{u_2}{z_5} \sin u_1 - \lambda_5 \gamma u_2 + (\text{termer oberoende av } u) \right)$$

$$= \min_{u \in U} \left( \frac{\lambda_3}{z_5} \cos u_1 + \frac{\lambda_4}{z_5} \sin u_1 - \lambda_5 \gamma \right) u_2 + (\text{termer oberoende av } u)$$

$$= \min_{u \in U} \sigma(t) u_2 + (\text{termer oberoende av } u)$$

där

$$\sigma(t) = \frac{\lambda_3}{z_5} \cos u_1 + \frac{\lambda_4}{z_5} \sin u_1 - \lambda_5 \gamma$$

Vi ser här att beroende på tecknet på  $\sigma$  kommer  $u_2 = F_{\max}$ ,  $\sigma < 0$  eller  $F = 0$ ,  $\sigma > 0$ . Om  $\sigma = 0$  finns inget entydigt  $F$  som minimerar  $H$ .

Enligt uppgift 18.4 vet vi att  $\tan u_1 = \frac{\lambda_4}{\lambda_3}$ . Sammanfattningsvis har vi således

$$\tan u_1 = \frac{\lambda_4}{\lambda_3} \quad \text{och} \quad u_2 = \begin{cases} F_{\max}, & \sigma < 0 \\ 0, & \sigma > 0 \end{cases}$$

Man kan nu gå vidare med uppgiften genom att titta på  $\sigma$  och dess derivata  $\sigma'$  för att få en uppfattning om när och om omslaget sker. Detta kan göras genom att använda ekvationen  $\lambda = -H_z(z, u, \lambda)^T$  m.m. Vi stannar emellertid här.

## 18.6

(a) Betrakta det allmänare fallet

$$\min \int_0^\infty [\alpha x^2 + u^2] dt$$

Värdfunktionen  $V(t, x) = V(x)$  ty vi styr över oändlig tid ( $V_t = 0$ ). Hamilton-Jacobi ekvationen blir då

$$0 = -V_t = \arg \min_u (V_x f + L) = \arg \min_u (V_x(x + u) + \alpha x^2 + u^2) \quad (18.1)$$

Minimeringen av högerledet map u ger  $u = -V_x/2$ . Insatt i (18.1)

$$\alpha x^2 + V_x x - \frac{1}{4} V_x^2 = 0$$

vilket leder till

$$V_x = (1 \pm \sqrt{1 + \alpha}) 2x.$$

Eftersom  $V(x) > 0$  om  $x \neq 0$  och  $V(0) = 0$  väljer vi den positiva lösningen. Alltså får vi

$$V(x) = (1 + \sqrt{1 + \alpha}) x^2$$

och styrlagen

$$u = -\frac{1}{2} V_x = -(1 + \sqrt{1 + \alpha}) x.$$

Tolkning: Slutna systemet blir

$$\dot{x} = x + u = -x\sqrt{1 + \alpha}$$

och polen hamnar i  $-\sqrt{1 + \alpha}$ . Om vi nu låter  $\alpha$  gå mot noll så betyder det att vi bara straffar styrsignalenergi med implicit bivillkor att systemet ska bli stabilt, dvs vi vill stabilisera systemet med minsta möjliga styrsignalenergi. Slutna systemets pol hamnar då i  $-1$ , dvs den ursprungliga instabila polen i  $+1$  speglas in till  $-1$  i det stabila området.

(b) Lösas på samma sätt som i (a).

$$u = -V_x = -x(1 + \sqrt{1 + x^2})$$

(c)

$$u = -V_x = -x(1 + \sqrt{2 + x^2})$$

## 18.7

Betrakta det skalära systemet:

$$\dot{x} = x + u = f(x, u)$$

Problem:

$$\min_{u \in U} \int_0^1 \frac{1}{2} (x^2(t) + u^2(t)) dt.$$

under bivillkoret att  $x(1) = 0$ . Antag att  $U = \{u(t) : |u(t)| < \infty\}$ .

Ur problemformuleringen ser vi att

$$\Psi(t, x(t)) = x(t)$$

$$\Phi(t, x(t)) = 0$$

$$L(x(t), u(t)) = \frac{1}{2} (x^2(t) + u^2(t))$$

och  $\Psi(t_f, x(t_f)) = x(t_f) = 0, t_f = 1$ .

Alltså är  $\tilde{\Phi}(t, x(t)) = \Phi(t, x(t)) + \mu^T \Psi(t, x(t)) = \mu x(t)$ .

Maximumprincipen ger nu följande nödvändiga krav:

$$\min_{u \in U} H(x, u, \lambda) = L(x, u) + \lambda^T f(x, u) = \frac{1}{2}(x^2 + u^2) + \lambda(x + u)$$

$$\text{med } \begin{cases} \dot{x} = x + u, x(0) = x_0 \\ \lambda = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T = -(x + \lambda), \lambda(t_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t_f, x(t_f)) = \mu. \end{cases}$$

Vi får  $\frac{\partial H}{\partial u} = u + \lambda = 0 \Rightarrow u(t) = -\lambda$  och  $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = 1 > 0$ , dvs minimum.

Vi ser nu att vi måste beräkna  $\lambda(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$  under iakttagande av de bivillkor som ska vara uppfyllda ( $x(1) = 0$ ,  $\lambda(t_f) = \mu$ ).

$u(t) = -\lambda(t)$  ger ekvationssystemet:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - \lambda, x(0) = x_0, x(1) = 0 \\ \lambda = -\lambda - x, \lambda(1) = \mu \end{cases}$$

Låt  $z = \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{z} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} z$ , dvs  $z(t) = e^{At} z(0)$  där

$$\begin{aligned} e^{At} &= \mathcal{L}^{-1} \{ (sI - A)^{-1} \} = \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} s-1 & 1 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2-2} \begin{pmatrix} s+1 & -1 \\ -1 & s-1 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{2}t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh(\sqrt{2}t) & -\frac{1}{\sqrt{2}} \sinh(\sqrt{2}t) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \sinh(\sqrt{2}t) & \cosh(\sqrt{2}t) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh(\sqrt{2}t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vi har nu  $\lambda(t) = z_2(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sinh(\sqrt{2}t)x_0 + \left( \cosh(\sqrt{2}t) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh(\sqrt{2}t) \right) \lambda_0$  där  $z(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ \lambda_0 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} x_0 \\ \lambda_0 \end{pmatrix}$ .

$x_0$  kan anses känd men vi behöver bestämma  $\lambda_0$ . För att göra detta utnyttjar vi värdet på Hamiltonfunktionen i sluttidpunkten  $t_f = 1$ . Enligt definitionen har vi:

$$\begin{aligned} H(x(t_f), u(t_f), \lambda(t_f)) &= \frac{1}{2}(x^2(t_f) + u^2(t_f)) + \lambda(t_f)(x(t_f) + u(t_f)) = \\ &= \begin{cases} u(t_f) = -\lambda(t_f) \\ \lambda(t_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t_f, x(t_f)) = \mu \\ x(t_f) = 0 \end{cases} = -\frac{1}{2}\mu^2 \end{aligned}$$

Alltså  $0 = -\frac{1}{2}\mu^2 \Rightarrow \mu = 0$ .

Ur lösningen  $\lambda(t) = z_2(t)$  får vi då att

$$0 = \lambda(t_f) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sinh(\sqrt{2}t_f)x_0 + \left( \cosh(\sqrt{2}t_f) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh(\sqrt{2}t_f) \right) \lambda_0$$

dvs  $\lambda_0 = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \sinh(\sqrt{2})}{\cosh(\sqrt{2}) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh(\sqrt{2})} x_0$ .

Vi får

$$\lambda(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \sinh(\sqrt{2}t) + \\ \left( \cosh(\sqrt{2}t) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh(\sqrt{2}t) \right) \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \sinh(\sqrt{2})}{\cosh(\sqrt{2}) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh(\sqrt{2})} x_0 \end{pmatrix}$$

Styrslagen blir således:

$$u(t) = -\lambda(t) = -\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \sinh(\sqrt{2}t) + \\ \left( \cosh(\sqrt{2}t) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh(\sqrt{2}t) \right) \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \sinh(\sqrt{2})}{\cosh(\sqrt{2}) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh(\sqrt{2})} x_0 \end{pmatrix}$$

18.8

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2^3 + (1+x_1)u \end{cases} \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\min_{u \in U} \int_0^1 (e^{x_1^2} + x_2^2 + u^2) dt \Rightarrow \begin{cases} L = e^{x_1^2} + x_2^2 + u^2 \\ \phi = 0 \end{cases}$$

där  $U = \{u(t) : |u(t)| < \infty\}$

Maximumprincipen (med  $\mu_0 = 1$ , normala fallet)

$$\min_{u \in U} H = e^{x_1^2} + x_2^2 + u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2(-x_1 - x_2^3 + (1+x_1)u)$$

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -2x_1 e^{x_1^2} - \lambda_2(-1+u) \\ \dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -2x_2 - \lambda_1 + 3x_2^2 \lambda_2 \end{cases}$$

$$(\dot{\phi} = \phi + \psi = 0) \Rightarrow \lambda(1) = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

$$\min_{u \in U} H : \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow 2u + \lambda_2(H_{x_1}) = 0 \Rightarrow u = -\frac{1}{2}\lambda_2(1+x_1)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = 2 > 0 \text{ dvs min.}$$

Insättning av  $u = -\frac{1}{2}\lambda_2(1+x_1)$  i  $\dot{x}$ - och  $\dot{\lambda}$  ekv. ger:

$$\begin{cases} f_1 = \dot{x}_1 = x_2 \\ f_2 = \dot{x}_2 = -x_1 - x_2^2 - \frac{\alpha}{2}(1+x_1)^2 \\ f_3 = \lambda_1 = -2x_1 e^{x_1} + \lambda_2(1+x_1) \\ f_4 = \lambda_2 = -2x_2 - \lambda_1 + 3\lambda_2 x_2^2 \end{cases}$$

Vid  $t_f = 1$  måste gälla  $\lambda_1(1) = 0 = \lambda_2(1)$

**18.9**

Givet:

$$\begin{cases} \dot{x} = x_2 \\ x_2 = u, |u| \leq 1 \\ \min \int_0^{t_f} (1+|u|) dt, \quad x(0) \text{ godtyckligt} \\ x(t_f) = 0 \end{cases}$$

Sökt: Visa att en optimal är av formen

$$u(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leq t < t_1 \\ 0, & t_1 \leq t < t_2 \\ 1, & t_2 \leq t \leq t_f \end{cases} \quad \text{eller } u(t) = \begin{cases} 1, \dots \\ 0, \dots \\ -1, \dots \end{cases}$$

Antag att problemet är normalt!

$$H = 1 + |u| + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$$

Minimering av  $H$  då  $|u| \leq 1$ :

$$\begin{aligned} \lambda_2 > 1 &\Rightarrow u = -1 \\ |\lambda_2| < 1 &\Rightarrow u = 0 \\ \lambda_2 < -1 &\Rightarrow u = 1 \end{aligned}$$

$$\lambda = -\frac{\partial H}{\partial x} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\lambda}_1 = 0 \\ \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = B \\ \lambda_2 = A + Bt \end{cases}$$

för några konstanter  $A, B$ .

Typiskt fas ( $B > 0$ ):

$H \equiv 0$ .

Svar: Se ovan!

**18.10**

Använd sats 18.5 och sats 18.6.

**18.11**

$$L(x, u) = \frac{1}{2}x_1^2, \quad \phi(t_f, x(t_f)) = 0, \quad \psi(t_f, x(t_f)) = x(t_f)$$

Maximumprincipen:

$$\min_{|u| \leq 1} H(x, u, \lambda, \mu) = \frac{1}{2}x_1^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$$

där

$$\lambda(t_f) = \psi_x^T \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \quad \dot{\lambda} = -H_x^T = \begin{pmatrix} -\mu_1 x_1 \\ -\lambda_1 \end{pmatrix}$$

Minimum fås för

$$u = \begin{cases} +1, & \lambda_2 < 0 \\ -1, & \lambda_2 > 0 \\ ?, & \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Bang-bang om ej  $\lambda_2 = 0$  på intervall.

Initialtillstånd  $x_0 = 0 \Rightarrow$  Optimal styrsignal  $u \equiv 0$ .

De singulära fallen  $\lambda_2 \equiv 1$  och  $\lambda_2 \equiv -1$  kan uteslutas eftersom de strider mot

18.12

The characteristic equation

$$\det(sI - A + BL) = 0$$

18.13

gives

$$s^3 + K_1 I_1 s^2 + K_1 K_2 I_2 s + K_2 K_1 I_3 = 0$$

All three poles in  $-0.5$  implies that we will have the equation

$$(s + 0.5)^3 = s^3 + 1.5s^2 + 0.75s + 0.125 = 0$$

Identification of the coefficients gives

$$I_1 = \frac{3}{2K_1} \quad I_2 = \frac{3}{4K_1 K_2} \quad I_3 = \frac{1}{8K_1 K_2}$$

19.1

a) Introduce the state variables

$$x_1 = m_1 = \dot{\theta} \quad x_2 = m_2 = \ddot{x} \quad x_3 = m_3 = \dot{x}$$

The figure gives the state equations

$$X_1(s) = \frac{1}{s} K_1 U(s)$$

$$X_2(s) = K_2 \Theta(s) = \frac{1}{s} K_2 X_1(s)$$

$$X_3(s) = \frac{1}{s} X_2(s)$$

Inverse Laplace transformation gives, in the time domain,

$$\dot{x}_1(t) = K_1 u(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = K_2 x_1(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = x_2(t)$$

On matrix form we get

$$\dot{\hat{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{x}(t) + \begin{pmatrix} K_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

The state feedback

$$u = -Lx + y_{ref}$$

gives the closed-loop system

$$\dot{x} = (A - BL)x + B y_{ref}$$

where

$$A - BL = \begin{pmatrix} -K_1 I_1 & -K_1 I_2 & -K_1 I_3 \\ K_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

## 19 Observatörer och tillståndsmetodik

b) Employ the observer

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(y(t) - C\hat{x}(t))$$

where

$$K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$$

The characteristic equation

$$\det(sI - A + KC) = 0$$

gives

$$s^3 + k_3 s^2 + k_2 s + k_1 K_2 = 0$$

The poles of the observer are placed to the left of the poles of the closed-loop system, e.g., in  $-2$ . This pole placement corresponds to the equation

$$s^3 + 6s^2 + 12s + 8 = 0$$

Identification of the coefficients gives

$$k_1 = \frac{8}{K_2} \quad k_2 K_2 = 12 \quad k_3 = 6$$

19.2

Introduce the state variables

$$x_1 = \theta \quad x_2 = \omega$$

This gives the state equations

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1/\tau \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ c_1 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \end{pmatrix} T$$



a) The feedback

$$u = -Lx + l_0\theta_{ref} = -l_1\theta - l_2\omega + l_0\theta_{ref}$$

gives

$$(A - BL)x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c_1l_1 & -(c_1l_2 + 1/\tau) \end{pmatrix}$$

The characteristic equation

$$\det(sI - A + BL) = 0$$

gives

$$s^2 + (l_2c_1 + \frac{1}{\tau})s + c_1l_1 = 0$$

Poles in  $1/\tau(-1 \pm i)$  corresponds to

$$(s + \frac{1-i}{\tau})(s + \frac{1+i}{\tau}) = s^2 + \frac{2}{\tau}s + \frac{2}{\tau^2} = 0$$

Identification of the coefficients gives

$$l_1 = \frac{2}{c_1\tau^2} \quad l_2 = \frac{1}{\tau c_1}$$

This gives the closed-loop system

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2/\tau^2 & -2/\tau \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ c_1 \end{pmatrix} l_0\theta_{ref} + \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \end{pmatrix} T$$

At steady state, i.e., when  $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ , we should have  $\theta = \theta_{ref}$  when  $T = 0$ .  $\dot{x}_1 = 0$  implies that  $x_2 = 0$  and  $\dot{x}_2 = 0$  then gives

$$\frac{-2}{\tau^2}x_1 + c_1l_0\theta_{ref} = 0.$$

i.e.,

$$l_0 = \frac{2}{c_1\tau^2}$$

The resulting control law becomes

$$u = \frac{2}{c_1\tau^2}\theta_{ref} - \frac{2}{c_1\tau^2}\theta - \frac{1}{\tau c_1}\omega$$

b) To remove steady state errors in the presence of disturbances we have to introduce integral action. One way of doing this is to introduce the disturbance as an extra state variable.

$$x_3(t) = T(= \text{constant}) \Rightarrow \dot{x}_3 = 0$$

New state space description

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/\tau & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

By estimating the unknown disturbance with an observer one may use feedback even from this state. We employ the observer

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x}) \quad K = (k_1 \ k_2 \ k_3)^T$$

The characteristic equation for the observer

$$\det(sI - A + KC) = 0$$

gives

$$s^3 + (k_1 + \frac{1}{\tau})s^2 + (k_2 + \frac{1}{\tau}k_1)s + c_2k_3 = 0$$

The poles are placed to the left of the eigenvalues of  $A - BL$ . As an example, we place them in e.g., in  $-2/\tau$ . This gives

$$(s + 2/\tau)^3 = s^3 + \frac{6}{\tau}s^2 + \frac{12}{\tau^2}s + \frac{8}{\tau^3} = 0$$

$$k_1 = \frac{6}{\tau} - \frac{1}{\tau} = \frac{5}{\tau}$$

$$k_2 = \frac{-1}{\tau}k_1 + 12\frac{1}{\tau^2} = \frac{7}{\tau^2}$$

$$k_3 = \frac{8}{\tau^3 c_2}$$

Let us study the second equation in the state space model

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{\tau}x_2 + c_2x_3 + c_1u$$

If  $u$  contains a term

$$\frac{-c_2}{c_1}\hat{x}_3$$

we get

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{\tau}x_2 + c_2(x_3 - \hat{x}_3) + c_1u'$$

where  $u'$  is the remaining part of the input. If  $\dot{x}_3 \rightarrow x_3$  the effect of the disturbance will subside. We modify the control law to

$$u = \frac{2}{c_1\tau^2}\theta_{ref} - \frac{2}{c_1\tau^2}\theta - \frac{1}{\tau c_1}\omega - \frac{c_2}{c_1}\hat{x}_3$$

### 19.3

a) The system

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

and the control law

$$u = -Lx + y_{ref}$$

gives the closed-loop system

$$\dot{x} = (A - BL)x + By_{ref}$$

$$A - BL = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 - l_1 & -3 - l_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gives the characteristic equation

$$s^2 + (4 + l_1)s + 3 + l_2 = 0$$

Poles in  $-3$  and  $-4$  corresponds to the equation

$$(s + 3)(s + 4) = s^2 + 7s + 12 = 0$$

Identification of the coefficients gives

$$l_1 = 3 \quad l_2 = 9$$

and the resulting control law becomes

$$u = -3x_1 - 9x_2 + y_{ref}$$

b) Employ an observer

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(y(t) - C\hat{x}(t))$$

where

$$K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

The characteristic equation of the observer is given by

$$s^2 + (4 + k_1 + k_2)s + k_1 + k_2 + 3 = 0$$

The reconstruction error  $\bar{x}$  converges to zero as  $p(t)e^{-t}$  if  $(A - KC)$  has a double eigenvalue in  $-1$ , i.e., if the characteristic equation is

$$s^2 + 2s + 1 = 0$$

Identification of the coefficients gives the condition

$$k_1 + k_2 = -2$$

which has solution, e.g.,

$$k_1 = -1 \quad k_2 = -1$$

c) Observer poles in  $-2$  corresponds to the equation

$$(s + 2)^2 = s^2 + 4s + 4 = 0$$

Identification of the coefficients gives the equations

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 &= 0 \\ k_1 + k_2 &= 1 \end{aligned}$$

The system of equations has no solution, which means that it is not possible to place the poles in  $-2$ . The reason is that the system is not observable.

## 19.4

The system is described by the equations

$$\dot{x}_1 = u_1 - x_1 + x_2 - x_4 = -2x_1 + x_2 + u_1$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3 - x_2 = x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$\dot{x}_3 = x_2 - x_3 - x_3 = x_2 - 2x_3$$

On matrix form this gives

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

a) Arbitrary values of the states can be obtained if the system is controllable.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det S = 1$$

**Answer:** Yes, arbitrary values can be obtained because the system is controllable.

b) Closed-loop system

$$\dot{x} = (A - BL)x + By_{ref}$$

$$A - BL = \begin{pmatrix} -2 - l_1 & 1 - l_2 & -l_3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

gives the characteristic equation

$$s^3 + (6 + l_1)s^2 + (10 + 4l_1 + l_2)s + 4 + 3l_1 + 2l_2 + l_3 = 0$$

Poles in  $-3$  implies that we will have the equation

$$(s + 3)^3 = s^3 + 9s^2 + 27s + 27 = 0$$

Identification of the coefficients gives

$$l_1 = 3 \quad l_2 = 5 \quad l_3 = 4$$

Thus, the control law is given by

$$u = -3x_1 - 5x_2 - 4x_3$$

c) Check when the system is observable. The sensor at  $x_1$  corresponds to  $C = (1 \ 0 \ 0)$ , i.e.,

$$O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det O = 1$$

The sensor at  $x_2$  corresponds to  $C = (0 \ 1 \ 0)$ , i.e.,

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -4 & 6 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det O = 0$$

The sensor at  $x_3$  corresponds to  $C = (0 \ 0 \ 1)$ , i.e.,

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det O = -1$$

The system is hence observable when the sensor is placed at  $x_1$  or  $x_3$ , but not with the sensor placed at  $x_2$ . Thus, the specifications may be fulfilled with the sensor placed at  $x_1$  or  $x_3$ . If the sensor is placed at  $x_1$ , the characteristic equation of the observer is given by

$$s^3 + (6 + k_1)s^2 + (10 + 4k_1 + k_2)s + 4 + 3k_1 + 2k_2 + k_3 = 0$$

Placing the poles in  $-4$  corresponds to the equation

$$(s + 4)^3 = s^3 + 12s^2 + 48s + 64 = 0$$

Identification of coefficients gives

$$k_1 = 6 \quad k_2 = 14 \quad k_3 = 14$$

## 19.5

a) The equations

$$T\dot{q} = -q + k_1u$$

and

$$A\dot{h} = q - v$$

with  $k_1 = 1$ ,  $T = 0.5$  and  $A = 1$  gives, on state space form,

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} v$$

The feedback

$$u = -l_1q - l_2h + r$$

gives the closed-loop system

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 2l_1 & -2l_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} v$$

with characteristic equation

$$(s + 2 + 2l_1)s + 2l_2 = s^2 + (2 + 2l_1)s + 2l_2 = 0$$

Comparison with the desired characteristic equation

$$(s + 2)^2 = s^2 + 4s + 4 = 0$$

gives

$$l_1 = 1 \quad l_2 = 2$$

b) At steady state we have  $q = 0$  and  $h = 0$ . With  $v = 0.1$  and  $r = 0$  we get

$$0 = -4q - 4h$$

and

$$0 = q - v$$

, i.e.,  $h = -0.1$ .

c) In order to determine the feedforward controller we start from the description

$$Y(s) = G_1(s)R(s) + H(s)V(s)$$

The state space description

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} r + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} v$$

$$y = (0 \ 1) \begin{pmatrix} q \\ h \end{pmatrix}$$

gives

$$H = \frac{1}{(s + 4)s} (0 \ 1) \begin{pmatrix} s & -4 \\ 1 & s + 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{(s + 4)}{(s + 4)s}$$

and

$$G_1 = \frac{1}{(s + 4)s} (0 \ 1) \begin{pmatrix} s & -4 \\ 1 & s + 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{(s + 4)s}$$

To eliminate  $v$  completely we shall choose the feedforward controller

$$R(s) = F_f(s)V(s)$$

where

$$F_f(s) = -\frac{H(s)}{G_1(s)}$$

The computations above gives

$$F_f(s) = \frac{(s + 4)}{2} = \frac{1}{2}s + 2$$

Removing the differentiation term yields

$$F_f(s) = 2$$

that is

$$r = 2v$$

At steady state this gives

$$0 = -4q - 4h + 4v$$

and

$$0 = q - v$$

that is  $h = 0$ .

d) Because  $k_1 \neq 1$  the feedback  $u = -q - 2h$  gives, at steady state,

$$0 = -2(1 + k_1)q - 4k_1h + 4k_1v$$

and

$$0 = q - v$$

which gives

$$0 = -4k_1h + (4k_1 - 2 - 2k_1)v$$

and

$$h = \frac{2(k_1 - 1)}{k_1}v$$

Because  $k_1 \neq 1$  we get a steady state control error. In order to determine when the expression for  $h$  is valid we consider the stability. The characteristic equation

$$s^2 + (2 + 2k_1)s + 4k_1 = 0$$

has both roots in the complex left hand plane for  $k_1 > 0$ , i.e., the expression is valid for all  $k_1 > 0$ .

e) Introduce the integral of the height as a new state

$$z(t) = \int_0^t h(s)ds \Rightarrow \dot{z} = h$$

With the state vector

$$x(t) = (q(t) \ h(t) \ z(t))^T$$

this gives

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2k_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} v$$

The state feedback  $u = -Lx$  gives

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 - 2k_1l_1 & -2k_1l_2 & -2k_1l_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} v$$

The third equation gives  $h = 0$  at steady state, independent of  $k_1$  provided  $L$  stabilizes the system.

## 19.6

a) Desired characteristic equation for the observer:

$$\lambda^2 + 20\lambda + 100 = 0 \tag{19.1}$$

331

The eigenvalues for the observer is given by

$$\det(\lambda I - (A - KC)) = \lambda^2 + \lambda k_1 + k_2 = 0$$

Comparison with (19.1) gives

$$\begin{cases} k_1 = 20 \\ k_2 = 100 \end{cases}$$

$$\text{Answer: } \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bv(t) + \begin{pmatrix} 20 \\ 100 \end{pmatrix} (y(t) - C\hat{x}(t))$$

b)  $u = 0$  gives

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = (A - KC)\hat{x} + Ky \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

According to (8.16) in the book the transfer function from  $y(t)$  to  $\hat{y}(t)$  is

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - (A - KC))^{-1}K = (1 \ 0) \begin{pmatrix} s+20 & -1 \\ 100 & s \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 20 \\ 100 \end{pmatrix} = \\ &= (1 \ 0) \frac{1}{(s+10)^2} \begin{pmatrix} s & 1 \\ -100 & s+20 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 20 \\ 100 \end{pmatrix} = \frac{20s+100}{(s+10)^2} \end{aligned}$$

Answer:

$$G(s) = \frac{20s+100}{(s+10)^2}$$

## 19.7

a) Set

$$x = \begin{pmatrix} X \\ S \end{pmatrix}, \quad u = S_{\text{un}}, \quad y = S.$$

Then

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \mu - D & 0 \\ -\mu/Y & -D \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ D \end{pmatrix} \\ C &= (0 \ 1) \end{aligned}$$

b) The controllability matrix is

$$(B \ AB) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ D & -D^2 \end{pmatrix}$$

which is singular. Hence the system is non-controllable.

332

19.8

The observability matrix is

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mu/Y & -D \end{pmatrix}$$

which is nonsingular, and the system is observable.

c) It is easily found that

$$G(s) = \frac{D}{s + D}$$

and there is hence a cancellation of a factor  $(s - \mu + D)$ . The reason is that the state  $x_1$  is noncontrollable.

d)

$$\dot{X} = 0 \Rightarrow \mu(\bar{S}) = D \Rightarrow \frac{\mu_o \bar{S}}{\bar{S} + K} = D \Rightarrow \bar{S} = \frac{DK}{\mu_o - D}$$

$$\dot{S} = 0 \Rightarrow -\frac{D}{Y}\bar{X} + D(\bar{S}_m - \bar{S}) = 0 \Rightarrow \bar{X} = Y(\bar{S}_m - \bar{S})$$

The linearized model around  $\begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{S} \end{pmatrix}$  has the form

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ D \end{pmatrix} S_m \\ y &= (0 \ 1) x \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} A_{11} &= \mu_i(\bar{S}) - D = 0 \\ A_{12} &= \frac{d\mu}{dS}\bar{X} = \frac{\mu_o K}{(\bar{S} + K)^2} \bar{X} = \frac{(\mu_o - D)^2}{\mu_o K} \bar{X} \\ A_{21} &= -\frac{\mu(\bar{S})}{Y} = -\frac{D}{Y} \\ A_{22} &= -\frac{d\mu}{dS}\bar{X} - D \end{aligned}$$

e) The controllability matrix becomes

$$(B \ AB) = \begin{pmatrix} 0 & A_{12}D \\ D & A_{22}D \end{pmatrix}$$

which is nonsingular, as  $A_{12} \neq 0$ . Hence the linearized system is controllable.

The observability matrix becomes

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

which is nonsingular, as  $A_{21} \neq 0$ . Hence the linearized system is observable.

a) As

$$CA = -k_1(\varphi_s \ \varphi_x) - D(1 \ 0)$$

the observability matrix is

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k_1\varphi_s - D & -k_1\varphi_x \end{pmatrix}$$

which is nonsingular as soon as  $\varphi_x \neq 0$ .

b) When  $S$  is measured, the observability matrix becomes

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k_1\varphi_s - D & -k_1\varphi_x & -k_1\varphi_P \\ \alpha\varphi_s + D^2 & \alpha\varphi_x & \alpha\varphi_P \end{pmatrix}$$

where  $\alpha = (k_1\varphi_s + D)k_1 - k_1k_2\varphi_P$ . As the observability matrix is singular, the system is not observable from  $S$ .

Set  $\varphi = (\varphi_s \ \varphi_x \ \varphi_P)$ . For a general row vector  $C$ , it is found that both  $CA$  and  $CA^2$  are some linear combinations of  $C$  and  $\varphi$ . Hence all three rows of the observability matrix

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix}$$

become linear combinations of  $C$  and  $\varphi$  (2 vectors only), which leads to the observability matrix being singular.

