KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2013-03-12

DEL A

1. En svängningsrörelse beskrivs av
$$u(x,t) = A\cos\Big(\frac{2\pi x}{\lambda} - 2\pi f t\Big)$$
där amplituden A, våglängden λ och frekvensen f är givna konstanter. Visa att $u(x,t)$ uppfyller vågekvationen
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$
med ett lämpligt val av konstanten c. **(4 p)**

Lösning. Vi har att
$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{2\pi A}{\lambda}\sin\Big(\frac{2\pi x}{\lambda} - 2\pi f t\Big),\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\Big(\frac{2\pi}{\lambda}\Big)^2 A\cos\Big(\frac{2\pi x}{\lambda} - 2\pi f t\Big),\\
\frac{\partial u}{\partial t} &= 2\pi f A\sin\Big(\frac{2\pi x}{\lambda} - 2\pi f t\Big),\\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -(2\pi f)^2 A\cos\Big(\frac{2\pi x}{\lambda} - 2\pi f t\Big),
\end{aligned}$$
och ser att
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\Big(\frac{2\pi}{\lambda}\Big)^2}{(2\pi f)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{(\lambda f)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$
Alltså löser u vågekvationen med $c = \lambda f$. □

Svar: $c = \lambda f$

2. Bestäm de stationära punkterna till funktionen

$$f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{8}{x} - y$$

och avgör deras karaktär. **(4 p)**

Lösning. De stationära punkterna fås genom att sätta partialderivatorna av f lika med noll,

$$f'_x = \frac{1}{y} - \frac{8}{x^2} = 0, \tag{1}$$

$$f'_y = -\frac{x}{y^2} - 1 = 0. \tag{2}$$

Ekvation (1) ger att $y = x^2/8$ som insatt i (2) ger att $x^3 = -64$, vilket medför att $x = -4$ och $y = (-4)^2/8 = 2$. Det finns alltså en stationär punkt $(-4, 2)$.

Andraderivatorna av f är

$$f''_{xx} = \frac{16}{x^3}, \quad f''_{xy} = -\frac{1}{y^2}, \quad f''_{yy} = \frac{2x}{y^3},$$

och i punkten $(-4, 2)$ har de värdena

$$f''_{xx}(-4,2) = -\tfrac{1}{4}, \quad f''_{xy}(-4,2) = -\tfrac{1}{4}, \quad f''_{yy}(-4,2) = -1.$$

Det betyder att Taylorutvecklingen av ordning 2 av f i punkten $(-4, 2)$ är

$$\begin{aligned} f(-4+h, 2+k) &= f(-4,2) + f'_x(-4,2)h + f'_y(-4,2)k \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\big(f''_{xx}(-4,2)h^2 + 2f''_{xy}(-4,2)hk + f''_{yy}(-4,2)k^2\big) + \text{restterm} \\ &= -2 - \tfrac{1}{8}h^2 - \tfrac{1}{4}hk - \tfrac{1}{2}k^2 + \text{restterm} \\ &= -2 - \tfrac{1}{8}\Big[h^2 + 2hk + 4k^2\Big] + \text{restterm}. \end{aligned}$$

Kvadratkompletterar vi den kvadratiska formen får vi

$$= -2 - \tfrac{1}{8}\Big[(h+k)^2 + 3k^2\Big] + \text{restterm}.$$

Eftersom den kvadratiska formen är negativt definit är punkten $(-4, 2)$ ett lokalt maximum. □

Svar: Lokalt maximum i $(-4, 2)$

3. Betrakta vektorfältet $\boldsymbol{F}$ i $\mathbf{R}^3$ som ges av $\boldsymbol{F} = (yz, xz, xy)$ och kurvintegralen

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

a) Låt γ vara den kurva som ges av $(x, y, z) = (\cos t, \sin t, t)$ då t löper från 0 till $\pi/4$. Beräkna integralen genom att använda kurvans parametrisering. **(2 p)**

b) Visa att fältet $\boldsymbol{F}$ är konservativt och bestäm en potentialfunktion till $\boldsymbol{F}$. Beräkna nu integralen med hjälp av potentialen. **(2 p)**

Lösning. Se seminarieuppgifterna. □

Svar: –

DEL B

4. a) Bestäm alla reella tal a och b så att vektorfältet $\boldsymbol{F} = \big(xy^a, (1 + bx^2)y^2\big)$ blir konservativt i $\mathbf{R}^2$. **(2 p)**

   b) Beräkna, för dessa värden på a och b, kurvintegralen

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r},$$

   där C är en kurva från $(0, 0)$ till $(1, 2)$. **(2 p)**

Lösning.

a) Eftersom $\boldsymbol{F}$ är definierat på hela $\mathbf{R}^2$ som är enkelt sammanhängande är ett nödvändigt och tillräckligt villkor att $\boldsymbol{F}$ ska vara konservativt i $\mathbf{R}^2$ att

$$\frac{\partial}{\partial x}\big((1 + bx^2)y^2\big) = \frac{\partial}{\partial y}\big(xy^a\big),$$

dvs.

$$2bxy^2 = axy^{a-1}$$

för alla x och y. Detta är uppfyllt om $a = 3$ och $b = \frac{3}{2}$ alternativt om $a = b = 0$.

b) Vi söker en potential φ som uppfyller $\operatorname{grad}\varphi = \boldsymbol{F}$ i respektive fall.

- $a = 3$ och $b = \frac{3}{2}$: Detta ger att

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = xy^3, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = (1 + \tfrac{3}{2}x^2)y^2.$$

  Från den första identiteten får vi att $\varphi(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^3 + g(y)$ och detta insatt i den andra identiteten ger att

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \tfrac{3}{2}x^2y^2 + g'(y).$$

  Identifierar vi med det tidigare uttrycket för $\partial\varphi/\partial y$ ser vi att $g'(y) = y^2$ varför $g(y) = \frac{1}{3}y^3 + C$. Väljer vi konstanten C lika med 0 får vi potentialen

$$\varphi(x, y) = \tfrac{1}{2}x^2y^3 + \tfrac{1}{3}y^3.$$

- $a = b = 0$: Detta ger att

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = x, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = y^2,$$

  som bara är uppfyllt om $\varphi(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3 + C$ där C är en konstant. Väljer vi $C = 0$ får vi potentialen

$$\varphi(x, y) = \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}y^3.$$

Kurvintegralen blir i fallet $a = 3$ och $b = \frac{3}{2}$,

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \varphi(1,2) - \varphi(0,0) = \tfrac{20}{3}.$$

I fallet $a = b = 0$ blir kurvintegralen

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \varphi(1,2) - \varphi(0,0) = \tfrac{19}{6}.$$

$\square$

Svar:

a) När $a = 3, b = \frac{3}{2}$ eller när $a = 0, b = 0$.

b) $\frac{20}{3}$ (när $a = 3$ och $b = \frac{3}{2}$), $\frac{19}{6}$ (när $a = b = 0$).

5. Bestäm det största och minsta värde som funktionen $f(x,y) = xy$ antar på ellipsskivan $x^2 + xy + y^2 \leq 3$. **(4 p)**

Lösning. Sätt $g(x,y) = x^2 + xy + y^2$. Då ges ellipsskivan av $g(x,y) \leq 3$ och dess rand (en ellips) av $g(x,y) = 3$.

Funktionen f är ett polynom och är därför en kontinuerlig funktion. Ellipsskivan är en begränsad mängd som innehåller sin rand (punkter på ellipsen $g(x,y) = 3$ uppfyller $g(x,y) \leq 3$) och är således en kompakt mängd. Dessa saker tillsammans innebär att f garanterat antar ett största och minsta värde på ellipsskivan.

Eftersom funktionen f är en kontinuerligt deriverbar funktion kan den bara anta sitt största och minsta värde i följande typer av punkter:

1. inre stationära punkter, dvs. punkter där $\nabla f = (0,0)$,
2. randpunkter där Lagrangevillkoret är uppfyllt, dvs. randpunkter där ∇f är parallell med ∇g,
3. singulära randpunkter, dvs. randpunkter där $\nabla g = (0,0)$.

Vi tar därför fram de punkter som uppfyller något av dessa tre villkor.

1. Gradienten av f är
$$\nabla f = (f'_x, f'_y) = (y, x)$$
och sätter vi den lika med nollvektorn $(0,0)$ får vi direkt att $x = y = 0$.

   Det finns alltså en inre stationär punkt $(0,0)$ som också ligger inuti ellipsskivan eftersom $g(0,0) = 0 \leq 3$.

2. Lagrangevillkoret att $\nabla f(y,x)$ är parallell med $\nabla g = (2x+y, x+2y)$ innebär att ∇f och ∇g är linjärt beroende och därför måste determinanten
$$\begin{vmatrix} -\nabla f- \\ -\nabla g- \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ 2x+y & x+2y \end{vmatrix} = 2y^2 - 2x^2 = 2(y-x)(y+x)$$
vara lika med noll. Detta ger oss två fall:

   - $x = y$: Randvillkoret $g(x,y) = 3$ ger oss då ekvationen $3x^2 = 3$ som har lösningarna $x = \pm 1$. Vi har alltså två punkter $(-1,-1)$ och $(1,1)$.
   - $x = -y$: Då ger randvillkoret $g(x,y) = 3$ oss att $x^2 = 3$ som har lösningarna $x = \pm\sqrt{3}$. Vi har därmed de två punkterna $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ och $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$.

3. I singulära punkter är
$$\nabla g = (2x+y, x+2y) = (0,0).$$
Detta ger oss det linjära ekvationssystemet
$$\begin{aligned} 2x + y &= 0, \\ x + 2y &= 0, \end{aligned}$$
som har lösningen $x = y = 0$. Punkten $(0,0)$ är dock inte en randpunkt ty $g(0,0) \neq 3$.

Det finns alltså fem punkter

$$(0,0), \quad (-1,-1), \quad (-\sqrt{3},\sqrt{3}), \quad (\sqrt{3},-\sqrt{3}) \quad \text{och} \quad (1,1)$$

där största och minsta värde för f kan antas. Eftersom

$$f(0,0) = 0, \quad f(-1,-1) = 1, \quad f(-\sqrt{3},\sqrt{3}) = -3,$$
$$f(\sqrt{3},-\sqrt{3}) = -3 \quad \text{och} \quad f(1,1) = 1$$

ser vi att på ellipsskivan antar f det största värdet 1 i punkterna $(-1,-1)$ och $(1,1)$, och det minsta minsta värdet -3 i punkterna $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ och $(\sqrt{3},-\sqrt{3})$. $\square$

Svar: Största värde är 1 och minsta värde är -3.

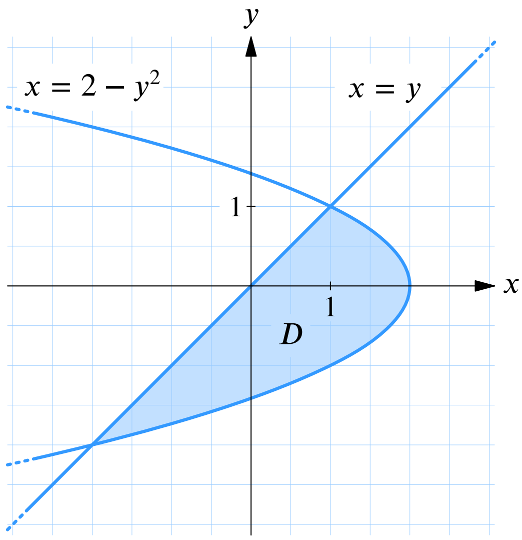
6. Beräkna

$$\iint_D xy\,dx\,dy$$

där D är det område som begränsas av parabeln $x = 2 - y^2$ och den räta linjen $x = y$.

(4 p)

Lösning. Parabeln $x = 2 - y^2$ har x-axeln som symmetriaxel och den punkt med störst x-koordinat är $(2, 0)$. Tillsammans med den räta linjen $x = y$ avgränsas ett område D enligt figuren.



Skärningspunkterna mellan parabeln och den räta linjen är punkter som ligger på båda kurvorna och uppfyller därför båda kurvornas ekvationer,

$$x = y, \tag{1}$$

$$x = 2 - y^2. \tag{2}$$

Ekvation (1) insatt i (2) ger en ekvation endast i y,

$$y = 2 - y^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad y^2 + y - 2 = 0.$$

Denna andragradsekvation har lösningarna $y = -2$ och $y = 1$. Skärningspunkterna är alltså $(-2, -2)$ och $(1, 1)$.

I y-led har området D utsträckningen $-2 \le y \le 1$ och i x-led begränsas D underifrån av kurvan $x = y$ och ovanifrån $x = 2 - y^2$. Området D kan därmed beskrivas som

$$-2 \le y \le 1, \quad y \le x \le 2 - y^2.$$

Dubbelintegralen kan nu beräknas som en itererad integral,

$$
\begin{aligned}
\iint_D xy\,dx\,dy &= \int_{-2}^{1}\Big(\int_{y}^{2-y^2} xy\,dx\Big)\,dy \\
&= \int_{-2}^{1} y\,\Big[\,\tfrac{1}{2}x^2\,\Big]_{x=y}^{x=2-y^2}\,dy \\
&= \frac{1}{2}\int_{-2}^{1} y\big((2-y^2)^2-y^2\big)\,dy \\
&= \frac{1}{2}\int_{-2}^{1}(4y-5y^3+y^5)\,dy \\
&= \tfrac{1}{2}\Big[\,2y^2-\tfrac{5}{4}y^4+\tfrac{1}{6}y^6\,\Big]_{-2}^{1} \\
&= \tfrac{1}{2}\Big(2-\tfrac{5}{4}+\tfrac{1}{6}-\big(8-20+\tfrac{32}{3}\big)\Big) \\
&= \tfrac{9}{8}.
\end{aligned}
$$

$\square$

Svar: $\frac{9}{8}$

DEL C

7. Beräkna flödet av $\boldsymbol{F} = (0, 0, y^2 + xz)$ genom halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$, i den riktning som har positiv z-komponent. **(4 p)**

Lösning. Låt S vara halvsfären och S' vara cirkelskivan i x,y-planet med medelpunkt i origo och radie 2. Då bildar S och S' tillsammans en sluten yta som innesluter ett halvklot K.

Om $d\boldsymbol{S}$ är det utåtriktade vektoriella ytelementet så ger Gauss sats att

$$\iint_{S+S'} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_K \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dx\, dy\, dz$$

och eftersom

$$\iint_{S+S'} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} + \iint_{S'} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$$

så är alltså

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_K \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dx\, dy\, dz - \iint_{S'} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}. \tag{$*$}$$

Vi ska beräkna det sökta flödet i vänsterledet genom att beräkna de två integralerna i högerledet.

Divergensen av $\boldsymbol{F}$ ges av

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \frac{\partial}{\partial x}\, 0 + \frac{\partial}{\partial y}\, 0 + \frac{\partial}{\partial z}\, (y^2 + xz) = x$$

och trippelintegralen i $(*)$ blir därmed

$$\iiint_K x\, dx\, dy\, dz.$$

Denna integral har värdet 0 eftersom integranden x är en udda funktion i x-led och kroppen K är spegelsymmetrisk i x-led kring planet $x = 0$.

På ytstycket S' ges det utåtpekande vektoriella ytelementet $d\boldsymbol{S}$ av

$$d\boldsymbol{S} = (0, 0, -1)\, dx\, dy$$

och därmed är

$$\begin{aligned}
\iint_{S'} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} &= \iint_{S'} (0, 0, y^2 + x \cdot 0) \cdot (0, 0, -1)\, dx\, dy \\
&= -\iint_{S'} y^2\, dx\, dy \\
&= -\iint_{x^2+y^2 \leq 4} y^2\, dx\, dy \\
&= \{ \text{Polära koordinater} \} \\
&= -\int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 (r \sin\theta)^2\, r\, dr \right) d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta \int_0^2 r^3\, dr \\
&= -\int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{2}\, d\theta \int_0^{2\pi} r^3\, dr \\
&= -\left[\tfrac{1}{2}\theta - \tfrac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{2\pi} \cdot \left[\tfrac{1}{4} r^4 \right]_0^2 \\
&= -4\pi.
\end{aligned}$$

Svaret blir alltså

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = 0 - (-4\pi) = 4\pi.$$

□

Svar: 4π

8. Betrakta integralen
$$\iint_D \frac{dx\,dy}{x+y} \tag{$*$}$$
där D är en triangel med hörnpunkter i $(0,0)$, $(2,2)$ och $(1,3)$.

a) Förklara varför $(*)$ måste betraktas som en generaliserad integral. **(1 p)**

b) Inför ett linjärt variabelbyte så att två av kanterna till D blir parallella med de nya koordinataxlarna. **(1 p)**

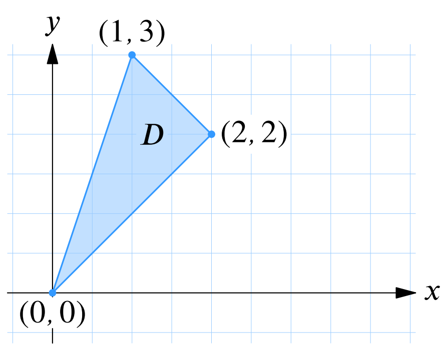
c) Visa att integralen är konvergent genom att beräkna den med variabelbytet i deluppgift b. **(2 p)**

Lösning.

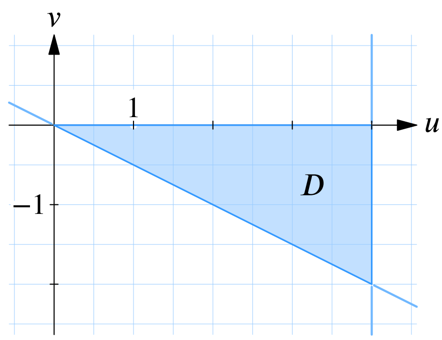
a) Integranden har en singularitet i $(0,0)$.

b) Vi ritar först upp triangeln D (se figur nedan). Kantlinjerna kan skrivas som
$$y = x, \quad y = 3x \quad \text{och} \quad y = 4 - x.$$
Området D kan därmed beskrivas som
$$\begin{cases} y \ge x, \\ y \le 3x, \\ y \le 4 - x, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - y \le 0, \\ 3x - y \ge 0, \\ x + y \le 4. \end{cases}$$
Vi inför därför de nya variablerna
$$\begin{cases} u = x + y, \\ v = x - y, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}(u+v), \\ y = \frac{1}{2}(u-v). \end{cases}$$

c) I dessa nya variabler är $3x - y = 3 \cdot \frac{1}{2}(u+v) - \frac{1}{2}(u-v) = u + 2v$ och området D beskrivs som
$$u \le 4, \quad v \le 0 \quad \text{och} \quad u + 2v \ge 0.$$



Området D i xy-planet



Området D i uv-planet

Vi har att

$$\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\tfrac{1}{2}$$

och beräknar integralen genom att gå över i de nya variablerna u och v,

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{dx\,dy}{x+y} &= \iint_D \frac{1}{u} \left|\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\right| du\,dv \\
&= \frac{1}{2} \iint_{\substack{0 \le u \le 4 \\ -u/2 \le v \le 0}} \frac{du\,dv}{u} \\
&= \frac{1}{2} \int_0^4 \left(\int_{-u/2}^0 dv \right) \frac{du}{u} \\
&= \frac{1}{2} \int_0^4 \frac{u/2}{u}\, du \\
&= \tfrac{1}{4} \cdot 4 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Eftersom integranden är positiv i D är integralen i x, y konvergent samtidigt som integralen uttryckt i u, v och dess itererade varianter är det. Ovanstående uträkning visar därmed att integralen i uppgiftstexten är konvergent och har värdet 1.

□

Svar:

a) Se lösningen.
b) T.ex. $u = x + y$, $v = x - y$.
c) Se lösningen. Integralens värde är 1.

9. En funktion f sägs uppfylla det starka Kuhn-Tucker villkoret i hörnpunkten $(1,1)$ till kvadraten $D = \{(x,y)\colon -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}$ om

$$f'_{\boldsymbol{v}}(1,1) \le C \qquad (*)$$

där $C < 0$ och för alla riktningar $\boldsymbol{v}$ som utifrån punkten $(1,1)$ pekar in i området D.

a) Visa att $f(x,y) = x^2y + y$ uppfyller det starka Kuhn-Tucker villkoret $(*)$ i hörnpunkten $(1,1)$. **(2 p)**

b) Använd Taylors formel av ordning 1 för att visa en C^2 funktion f som uppfyller det starka Kuhn-Tucker villkoret $(*)$ har en lokal maximipunkt i hörnpunkten $(1,1)$. **(2 p)**

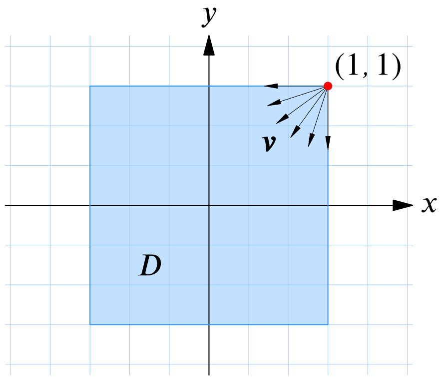
Lösning.

a) I hörnpunkten $(1,1)$ är

$$\begin{aligned}\nabla f(1,1) &= \big(2xy, x^2+1\big)\big|_{x=y=1}\\ &= (2,2)\end{aligned}$$

och de riktningar $\boldsymbol{v}$ som pekar in i området D ges av

$$\boldsymbol{v} = (h,k), \qquad \text{där } h \le 0 \text{ och } k \le 0.$$



När $h \le 0$ och $k \le 0$ pekar $\boldsymbol{v} = (h,k)$ in i området D.

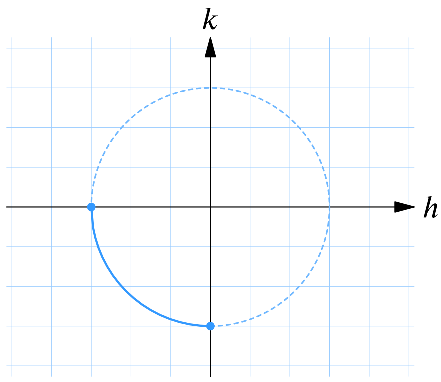
Funktionen f är differentierbar och därmed är

$$\begin{aligned}f'_{\boldsymbol{v}}(1,1) &= \nabla f(1,1)\cdot \boldsymbol{v}\\ &= (2,2)\cdot(h,k)\\ &= 2(h+k).\end{aligned}$$

För att undersöka om denna riktningsderivata är strikt negativ för de tillåtna riktningarna (h,k) löser vi optimeringsproblemet

$$\max\ 2(h+k)$$

$$\text{när } h^2+k^2 = 1 \text{ och } h,k \le 0.$$



Ekvationen $h^2+k^2 = 1$ ger enhetscirkeln i h,k-planet och olikheterna $h \le 0$ och $k \le 0$ begränsar de tillåtna (h,k) till den del av enhetscirkeln som finns i tredje kvadranten.

Kvartscirkeln kan vi parametrisera som

$$(h,k) = (\cos t, \sin t) \qquad \text{där} \quad \pi \le t \le 3\pi/2$$

och målfunktionen uttryckt i t blir

$$2(h+k) = 2(\cos t + \sin t).$$

För att bestämma maximum av detta uttryck sätter vi derivatan lika med noll,

$$\frac{d}{dt}\,2(\cos t + \sin t) = 2(-\sin t + \cos t) = 0,$$

vilket ger att $t = 5\pi/4$ och då är $2(h + k) = 2(-1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2}\,) = -4/\sqrt{2}$.

Maximum kan också antas i ändpunkterna $t = \pi$ och $t = 3\pi/2$. I dessa punkter är

$$\begin{aligned} t = \pi :& \qquad 2(h + k) = 2\big(\cos\pi + \sin\pi\big) = -2,\\ t = 3\pi/2 :& \quad 2(h + k) = 2\big(\cos(3\pi/2) + \sin(3\pi/2)\big) = -2. \end{aligned}$$

Eftersom $-4/\sqrt{2} < -2$ så är maximum alltså -2 och detta visar att f uppfyller det starka Kuhn-Tucker villkoret $(*)$ med $C = -2$.

b) Enligt Taylors formel är

$$f(1 + h, 1 + k) = f(1, 1) + \nabla f(1, 1)\cdot(h, k) + (h^2 + k^2)B(h, k),$$

där $B(h, k)$ är en begränsad funktion i en omgivning av $(h, k) = (0, 0)$. Denna formel kan skrivas som

$$\begin{aligned} \frac{f(1 + h, 1 + k) - f(1, 1)}{\sqrt{h^2 + k^2}} &= \nabla f(1, 1)\cdot\frac{(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} + \sqrt{h^2 + k^2}\,B(h, k)\\ &= f'_{\boldsymbol{v}}(1, 1) + \sqrt{h^2 + k^2}\,B(h, k), \end{aligned}$$

där $\boldsymbol{v}$ är enhetsvektorn som pekar i riktningen (h, k).

Eftersom $f'_{\boldsymbol{v}}(1, 1) \le C < 0$ för riktningen $\boldsymbol{v}$ som pekar från $(1, 1)$ till $(1 + h, 1 + k)$ som tillhör D och termen $\sqrt{h^2 + k^2}B(h, k) \to 0$ när $(h, k) \to (0, 0)$ så är

$$\frac{f(1 + h, 1 + k) - f(1, 1)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \le C + \epsilon < 0 \quad\Rightarrow\quad f(1 + h, 1 + k) \le f(1, 1)$$

i den omgivning av $(1, 1)$ inuti D där $|\sqrt{h^2 + k^2}B(h, k)| \le \epsilon$ och $\epsilon < |C|$, dvs. f har en lokal maximipunkt i $(1, 1)$.

$\square$

Svar: –