KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Lösningsförslag till kontrollskrivning 1
Onsdagen den 10 april, 2013

(1) Låt f vara en deriverbar funktion av en variabel. Visa att funktionen

$$z = xyf\left(\frac{x}{y}\right)$$

uppfyller ekvationen

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2z.$$ **(4 p)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

Vi har

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= yf\left(\frac{x}{y}\right) + xyf'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}\\ &= yf\left(\frac{x}{y}\right) + xf'\left(\frac{x}{y}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= xf\left(\frac{x}{y}\right) + xyf'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\\ &= xf\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x^2}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right).\end{aligned}$$

Alltså är

$$\begin{aligned}x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} &= xyf\left(\frac{x}{y}\right) + x^2f'\left(\frac{x}{y}\right) + xyf\left(\frac{x}{y}\right) - y\,\frac{x^2}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right)\\ &= 2xyf\left(\frac{x}{y}\right)\\ &= 2z.\end{aligned}$$

(2) Låt $f(x, y) = x \cos xy$.

a) I vilken riktning växer f snabbast i punkten $(\frac{1}{4}, \pi)$? Hur stor är tillväxthastigheten i den riktningen? **(2 p)**

b) Beräkna riktningsderivatan av f i riktningen $(1, 1)$ i punkten $(\frac{1}{4}, \pi)$. **(2 p)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

a) Funktionen växer snabbast i gradientens riktning. För denna funktion har vi

$$
\begin{aligned}
\operatorname{grad} f &= \big(\cos xy - xy \sin xy, -x^2 \sin xy\big) \\
&= \big\{\ (x, y) = (\tfrac{1}{4}, \pi)\ \big\} \\
&= \Big(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(1 - \frac{\pi}{4}, -\frac{1}{16}\Big).
\end{aligned}
$$

Riktningsderivatan i denna riktning är

$$
\begin{aligned}
\big|\operatorname{grad} f\big| &= \sqrt{\frac{1}{2}\Big(1 - \frac{\pi}{4}\Big)^2 + \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{16}\Big)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\Big(1 - \frac{\pi}{4}\Big)^2 + \frac{1}{256}}.
\end{aligned}
$$

b) Vi normaliserar riktningsvektorn $(1, 1)$ till längd 1, vilket ger $(1, 1)/\sqrt{2}$. Riktningsderivatan i den riktning är

$$
\operatorname{grad} f \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{16}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{15}{16} - \frac{\pi}{4}\Big).
$$

(3) Antag att y beräknas från u, v och w genom

$$
y = \frac{v^{1/2}}{u^{1/3} w^2}.
$$

a) Bestäm en linjär approximation av y vid punkten $(u, v, w) = (8, 9, 1)$. **(2 p)**

b) Antag att u, v och w anges med noggrannheten

$$
u = 8 \pm 0{,}04, \quad v = 9 \pm 0{,}04, \quad w = 1 \pm 0{,}01.
$$

Använd den linjära approximationen för att ange motsvarande noggrannhet för y. **(2 p)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

a) Den linjära approximationen vid $(u, v, w) = (8, 9, 1)$ är

$$y(8 + \Delta u, 9 + \Delta v, 1 + \Delta w) = y(8, 9, 1) + \frac{\partial y}{\partial u}(8, 9, 1)\,\Delta u + \frac{\partial y}{\partial v}(8, 9, 1)\,\Delta v + \frac{\partial y}{\partial w}(8, 9, 1)\,\Delta w + \text{restterm.}$$

I detta fall är $y(u, v, w) = u^{-1/3}v^{1/2}w^{-2}$ så $y(8, 9, 1) = \frac{3}{2}$, och

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\tfrac{1}{3}u^{-4/3} \cdot v^{1/2} \cdot w^{-2} = -\tfrac{1}{3} \cdot 2^{-4} \cdot 3 \cdot 1 = -\tfrac{1}{16},$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = u^{-1/3} \cdot \tfrac{1}{2}v^{-1/2} \cdot w^{-2} = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot 1 = \tfrac{1}{12},$$

$$\frac{\partial y}{\partial w} = u^{-1/3} \cdot v^{1/2} \cdot (-2)w^{-3} = \tfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot (-2) = -3.$$

Alltså blir den linjära approximationen

$$y(8 + \Delta u, 9 + \Delta v, 1 + \Delta w) = \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{16}\Delta u + \tfrac{1}{12}\Delta v - 3\Delta w + \text{restterm.}$$

b) Om vi försummar resttermen får vi

$$\begin{aligned}\left| y - \tfrac{3}{2} \right| &= \left| -\tfrac{1}{16}\Delta u + \tfrac{1}{12}\Delta v - 3\Delta w \right| \\ &\leq \tfrac{1}{16}|\Delta u| + \tfrac{1}{12}|\Delta v| + 3|\Delta w|.\end{aligned}$$

Med de angivna noggrannheterna har vi $|\Delta u| \leq 0{,}04$, $|\Delta v| \leq 0{,}04$ och $|\Delta w| \leq 0{,}01$. Alltså är

$$\begin{aligned}\left| y - \tfrac{3}{2} \right| &\leq \tfrac{1}{16} \cdot 0{,}04 + \tfrac{1}{12} \cdot 0{,}04 + 3 \cdot 0{,}01 \\ &= 0{,}01\left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3} + 3\right) \\ &= \tfrac{43}{1200} \\ &\leq \tfrac{48}{1200} \\ &= \tfrac{4}{100},\end{aligned}$$

vilket ger

$$1{,}46 = \tfrac{3}{2} - \tfrac{4}{100} \leq y \leq \tfrac{3}{2} + \tfrac{4}{100} = 1{,}54.$$

Svar:

(1) Se lösningen.

(2) a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(1 - \dfrac{\pi}{4}\right)^2 + \dfrac{1}{256}}$ b) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{15}{16} - \dfrac{\pi}{4}\right)$

(3) a) $y(8 + \Delta u, 9 + \Delta v, 1 + \Delta w) = \frac{3}{2} - \frac{1}{16}\Delta u + \frac{1}{12}\Delta v - 3\Delta w + \text{restterm}$

b) $1{,}46 \leq y \leq 1{,}54$