KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Lösningsförslag med bedömningskriterier till kontrollskrivning 2
Måndagen den 29 april, 2013

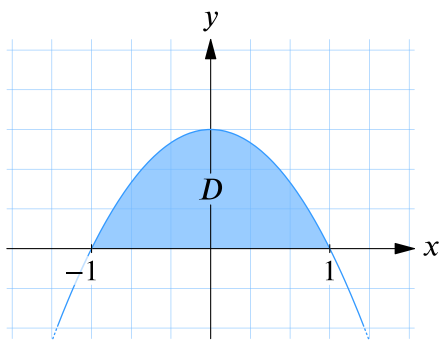
(1) Låt (x_C, y_C) vara tyngdpunkten för området D i xy-planet som ges av $0 \leq y \leq 1 - x^2$. Av symmetriskäl är $x_C = 0$. Beräkna y_C som ges av

$$y_C = \frac{\displaystyle\iint_D y\,dx\,dy}{\displaystyle\iint_D 1\,dx\,dy}. \qquad \textbf{(4 p)}$$

LÖSNINGSFÖRSLAG

Området D beskrivs av

$$\begin{aligned} -1 &\leq x \leq 1, \\ 0 &\leq y \leq 1 - x^2. \end{aligned}$$



Detta ger

$$\begin{aligned} \iint_D 1\,dx\,dy &= \int_{-1}^{1} \int_0^{1-x^2} dy\,dx = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\,dx \\ &= \left[x - \tfrac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^{1} = \tfrac{4}{3} \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} \iint_D y\,dx\,dy &= \int_{-1}^{1} \int_0^{1-x^2} y\,dy\,dx = \int_{-1}^{1} \tfrac{1}{2}\big(1 - x^2\big)^2\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (1 - 2x^2 + x^4)\,dx = \frac{1}{2}\left[x - \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 \right]_{-1}^{1} = \tfrac{8}{15}. \end{aligned}$$

Tillsammans får vi

$$y_C = \iint_D y\,dx\,dy \Big/ \iint_D 1\,dx\,dy = \tfrac{8}{15} \big/ \tfrac{4}{3} = \tfrac{2}{5}.$$

(2) Funktionen $f(x, y) = x^2 - 4xy + 2xy^2$ har de tre stationära punkterna $(0, 0)$, $(0, 2)$ och $(1, 1)$.

a) Taylorutveckla f till ordning 2 kring respektive stationär punkt. **(2 p)**

b) Avgör om de stationära punkterna är lokala maximipunkter, minimipunkter eller sadelpunkter med hjälp av Taylorutvecklingarna i deluppgift a. **(2 p)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

a) I de tre stationära punkterna har vi

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(2x - 4y + 2y^2, -4x + 4xy\right) = (0, 0).$$

Andraderivatorna till f är

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = -4 + 4y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4x.$$

Vi har $f(0, 0) = 0$, så Taylorutvecklingen vid $(0, 0)$ är

$$\begin{aligned} f(0 + h, 0 + k) &= 0 + \tfrac{1}{2}\left(2 \cdot h^2 + 2 \cdot (-4)hk + 0 \cdot k^2\right) + \text{restterm} \\ &= h^2 - 4hk + \text{restterm}. \end{aligned}$$

Vid $(0, 2)$ har vi

$$\begin{aligned} f(0 + h, 2 + k) &= 0 + \tfrac{1}{2}\left(2h^2 + 2 \cdot 4hk + 0 \cdot k^2\right) + \text{restterm} \\ &= h^2 + 4hk + \text{restterm} \end{aligned}$$

och vid $(1, 1)$ är

$$\begin{aligned} f(1 + h, 1 + k) &= -1 + \tfrac{1}{2}\left(2h^2 + 2 \cdot 0 \cdot hk + 4k^2\right) + \text{restterm} \\ &= -1 + h^2 + 2k^2 + \text{restterm}. \end{aligned}$$

b) Vi kvadratkompletterar andragradstermerna i Taylorutvecklingen vid de tre punkterna och får

- $(0, 0)$: $h^2 - 4hk = (h - 2k)^2 - 4k^2$,
- $(0, 2)$: $h^2 + 4hk = (h + 2k)^2 - 4k^2$,
- $(1, 1)$: $h^2 + 2k^2$.

Från dessa kvadratkompletteringar kan vi avläsa att $(0, 0)$ och $(0, 2)$ är sadelpunkter eftersom de kvadratiska formerna är indefinita. Vi avläser att $(1, 1)$ är en lokal minimipunkt eftersom den kvadratiska formen är positivt definit.

(3) För polära koordinater i planet används r och θ som koordinater.

a) Definiera r och θ i ord, och uttryck x, y i r, θ. **(1 p)**

b) Koordinatlinjer ges av r = konstant resp. θ = konstant. Skissera några av dessa koordinatlinjer i xy-planet. **(1 p)**

c) Beräkna funktionaldeterminanten

$$\frac{d(x,y)}{d(r,\theta)}$$

och förenkla svaret så långt som möjligt. **(2 p)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

a) Se kursboken sid 31–32.

b) Se kursboken sid 31–32.

c) Se kursboken exempel 13, sid 141.

Svar:

(1) $y_C = \frac{2}{5}$

(2) a) $f(0+h, 0+k) = h^2 - 4hk +$ restterm
$f(0+h, 2+k) = h^2 + 4hk +$ restterm
$f(1+h, 1+k) = -1 + h^2 + 2k^2 +$ restterm

b) Punkterna $(0,0)$ och $(0,2)$ är sadelpunkter, medan $(1,1)$ är en lokal minimipunkt.

(3) Se kursboken sid 31–32 och exempel 13, sid 141.