

1. TISDAGEN 3105

1.1. Låt $W \subseteq \mathbf{R}^n$ vara lösningsmängden till ett homogent ekvationssystem. Vi är nu i situation som liknar gårdagens. Skillnaden är att vi inte har tillgång till ekvationssystemet. Vi vill ändå hitta en bas för W .

Exempel 1.2. Lösningsmängden $W \subseteq \mathbf{R}^4$ till något okänt homogent

ekvationssystem är beskriven som de vektorer $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ sådan att

$AX = 0$, där

$$(1.2.1) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vi vill hitta en bas för W . Om vi skriver ut vad $AX = 0$ betyder får vi att W ges som lösningsmängden till följande homogena ekvationssystem

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 + 2x_4 = 0. \\ x_1 + x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Att hitta en bas för lösningsmängden till ett homogent ekvationssystem kan vi utföra. Gauss-Jordan elimination ger den reducerade trappsstegsmatrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

vilket har tre ledande ettor. Vi sätter $x_4 = t$, och har att $x_3 = 0$, $x_2 = -t$, och att $x_1 = -t$, där t är ett godtyckligt tal. Detta betyder att mängden W vi betraktar är

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} -t \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} \mid \text{godtyckliga tal } t \right\}.$$

En bas för W ges av vektorn $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Exempel 1.3. Låt $W \subseteq \mathbf{R}^4$ vara mängden

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} t_1 + 2t_3 + 2t_4 \\ t_2 + t_4 \\ t_1 + 2t_3 + 2t_4 \\ 2t_2 + 2t_4 \end{bmatrix} \mid \text{godtyckliga tal } t_1, t_2, t_3, t_4 \right\}.$$

Denna mängd är lösningsmängden till ett homogent ekvationssystem, och vi vill hitta en bas för W . Vi ser att W är det linjära höljet till fyra vektorer (sätt $t_1 = 1$ och $t_2 = t_3 = t_4 = 0$ för att få vektorn w_1 , sedan $t_2 = 1$ och $t_1 = t_3 = t_4 = 0$ etc).

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad w_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad w_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} .$$

Med andra ord har vi att $W = \text{Span}(w_1, w_2, w_3, w_4)$, och vi är nästan i en situation som vi har behandlat tidigare. Vi har att w_1, \dots, w_4 är en bas för W om vektorerna är linjärt oberoende. Vi kollar detta med att lösa ekvationen $t_1 w_1 + \dots + t_4 w_4 = 0$. Ekvationssystemet blir

$$(1.3.1) \quad \begin{cases} t_1 + 2t_3 + 2t_4 = 0 \\ t_2 + t_4 = 0 \\ t_1 + 2t_3 + 2t_4 = 0 \\ 2t_3 + 2t_4 = 0 \end{cases}$$

Den tillhörande matrisen är

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Gauss-Jordan elimination ger matrisen

$$(1.3.2) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösningar till ekvationen ?? erhålles som $t_4 = r$ en godtycklig konstant, $t_3 = s$ en godtycklig konstant, $t_2 = -r$, och $t_1 = -2s - 2r$. Lösningsmängden har två parametrar, och detta betyder att punkten $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = 0$ inte är den enda lösningen. Med andra ord är vektorerna w_1, w_2, w_3, w_4 inte linjärt oberoende. Vad gör vi nu?

1.4. Hur hittar man linjärt oberoende vektorer. Notera att om vi har vektorer w_1, w_2, w_3, w_4 i något \mathbf{R}^n som är linjärt beroende, då finns det en icke trivial lösning till ekvationen

$$t_1 w_1 + t_2 w_2 + t_3 w_3 + t_4 w_4 = 0.$$

Icke-trivial betyder att åtminstone en av skalärerna t_1, \dots, t_4 är nollskild. Om $t_1 \neq 0$, då kan vi skriva ekvationen ovan som

$$w_1 = -\frac{t_2}{t_1} w_2 - \frac{t_3}{t_1} w_3 - \frac{t_4}{t_1} w_4.$$

Detta betyder att w_1 är en linjär kombination av w_2, w_3, w_4 . Detta betyder vidare att

$$\text{Span}(w_1, w_2, w_3, w_4) = \text{Span}(w_2, w_3, w_4).$$

Exempel 1.5. Med denna observationen återgår vi till vårt Exempel ???. Vi har att lösningarna till ekvationssystemet $t_1w_1 + t_2w_2 + t_3w_3 + t_4w_4 = 0$ ges av

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2r - 2s \\ -s \\ r \\ s \end{bmatrix} \mid \text{godtyckliga tal } r, s \right\}.$$

Med $s = 0$ erhåller vi lösningen $t_1 = -2r, t_3 = r$ och $t_2 = t_4 = 0$. Detta betyder att med $r = 1$ har vi

$$w_3 = 2w_1.$$

Vi har att w_3 är en linjär kombination av w_1 , och vi kan ta bort w_3 . Detta betyder att

$$\text{Span}(w_1, w_2, w_3, w_4) = \text{Span}(w_1, w_2, w_4).$$

Liknande, med $r = 0$ och $s = 1$ får vi att

$$w_4 = 2w_1 + w_2.$$

Detta ger att också w_4 kan skrivas som en linjär kombination av w_1 och w_2 . Med andra ord att

$$\text{Span}(w_1, w_2, w_4) = \text{Span}(w_1, w_2).$$

Man kan nu kolla att w_1 och w_2 är linjärt oberoende, vilket också garanteras av de två ledande ettorna i den reducerade trappstegsmatrisen ???. Vi har att w_1 och w_2 är en bas för W .

Exempel 1.6. Låt A vara matrisen som i ??, och låt $W \subseteq \mathbf{R}^3$ vara mängden

$$W = \{AX \mid X \in \mathbf{R}^4\}$$

Mängden W är lösningsmängden till ett homogent ekvationssystem. Hitta en bas för W . Här har vi inte ens vektorer vars linjära hölje ger W . För att lösa problemet, leker vi lett med vad vi har. Ta vektorn

$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ i \mathbf{R}^4 . Per definition har vi att Ae_1 är med i W . Vi kallar

denna för w_1 och räknar ut att denna blir

$$w_1 = Ae_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

På liknande sätt kan vi beräkna Ae_2, Ae_3, Ae_4 , där $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

och slutligen $e_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Detta ger tre vektorer w_2, w_3 och w_4 i W , och

dessa är

$$w_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad w_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Skall vi lista upp flera vektorer? Svaret är nej. Fördi om vi tar en godtycklig vektor X i \mathbf{R}^4 så har vi att

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

Med andra ord har vi att $X = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4$ är en linjär kombination av e_1, \dots, e_4 . Av de vanliga egenskaperna till matrismultiplikation har vi att

$$AX = A(x_1e_1 + \dots + x_4e_4) = x_1Ae_1 + \dots + x_4Ae_4 = x_1w_1 + x_2w_2 + x_3w_3 + x_4w_4.$$

Det vill säga att mängden W vi betraktar är det linjära höljet av w_1, \dots, w_4 ,

$$W = \text{Span}(w_1, w_2, w_3, w_4).$$

Att hitta en bas utifrån ett givet antal vektorer har vi precis gjort i exemplet ovan. Vi repeterar snabbt. Vi hittar först lösningarna till $t_1w_1 + \dots + t_4w_4$. Detta ekvationssystem har matris

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Gauss-Jordan elimination ger matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi har tre ledande ettor, vilket betyder att basen skall bestå av tre vektorer. Lösningssmängden till ekvationssystemet är $t_4 = t$, godtyckligt tal t , och $t_1 = -t$ och $t_2 = t_3 = 0$. Detta betyder att $w_1 = w_4$. En bas för W ges av w_1, w_2 och w_3 .

Define the notion of nullity.

1.7. Uppgifter. Läs mera i Anton-Rorres, Kapitel 4.7 (4.8). Rekomenderade uppgifter 4.5: 1-6, och 4.7: 2, 3, 4, 6, 7, 11, 12. 4.8: 9. Tentamen 2010-10-22, Uppgift 3. Tentamen 2010-03-15, Uppgift 4.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, KTH, STOCKHOLM, SWEDEN
E-mail address: `skjelnes@kth.se`