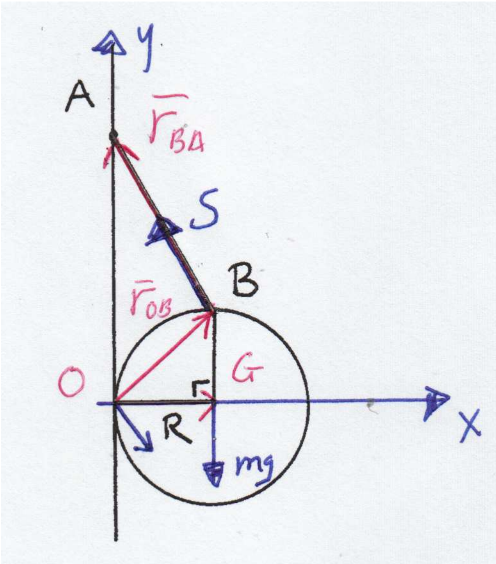
Lösningar till Tentamen, SG1109, 20/5, 2013

1.



$$\mathbf{r}_{OG} = R(1,0)\,, \quad \mathbf{r}_{OB} = R(1,1) \quad \mathbf{r}_{BA} = R(-1,\sqrt{3})\,, \quad \mathbf{e}_{BA} = \frac{(-1,\sqrt{3})}{2}\,. \qquad (1)$$

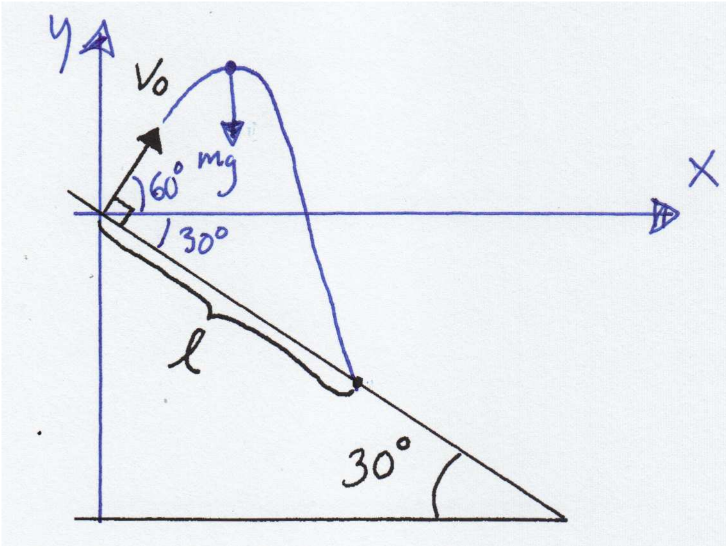
där vi använt Pythagoras sats för att bestämma $\mathbf{r}_{BA}$. Vidare har vi att $\mathbf{S} = S\mathbf{e}_{BA}$. Momentjämvikt med avseende på punkten O ger

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_{OB} \times S\mathbf{e}_{BA} + \mathbf{r}_{OG} \times (-\mathbf{e}_y mg) = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$R(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) \times S\frac{(-\mathbf{e}_x + \sqrt{3}\mathbf{e}_y)}{2} - Rmg\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{0} \Rightarrow S\frac{1+\sqrt{3}}{2} = mg \Rightarrow$$

$$S = \frac{2mg}{1+\sqrt{3}}\,. \qquad (2)$$

2.



Newtons andra lag i x-och y-led ger

$$m\ddot{x} = 0\,, \quad m\ddot{y} = -mg\,. \tag{3}$$

Begynnelsevillkoren är

$$x = y = 0\,, \quad \dot{x} = \frac{1}{2}v_o\,, \quad \dot{y} = \frac{\sqrt{3}}{2}v_o \ \text{ då } \ t = 0\,. \tag{4}$$

Integrera (3) två gånger och använd begynnelsevillkoren. Detta ger

$$x = \frac{1}{2}v_o t\,, \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}v_o t\,. \tag{5}$$

Nedslagspunkten ges av

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) l\,, \quad t = t_1\,. \tag{6}$$

Sätt in (6) i (7) :

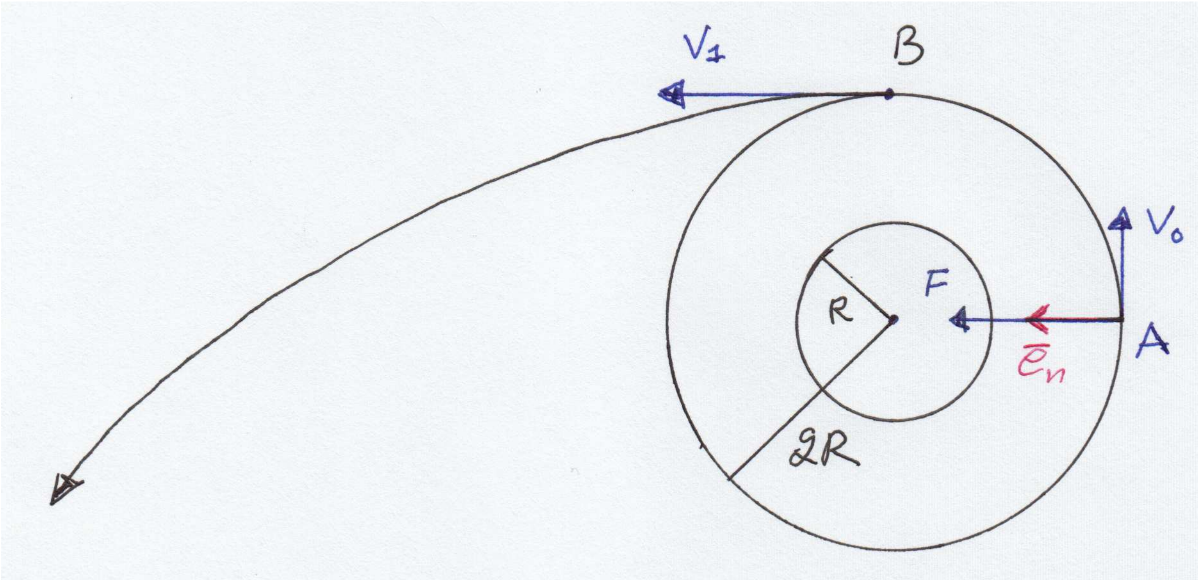
$$\frac{\sqrt{3}}{2}l = \frac{1}{2}v_o t_1\,, \tag{7}$$

$$-\frac{1}{2}l = -\frac{1}{2}gt_1^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}v_o t_1\,, \tag{8}$$

och lös för v_o:

$$v_o = \frac{\sqrt{3gl}}{2}\,. \tag{9}$$

3. I den stationära banan i punkten A fås hastigheten v_o genom Newtons andra



lag:

$$\mathbf{e}_n: \quad m\frac{v_0^2}{2R} = mg\frac{R^2}{(2R)^2} \quad \Rightarrow \quad v_o = \sqrt{\frac{gR}{2}}. \tag{10}$$

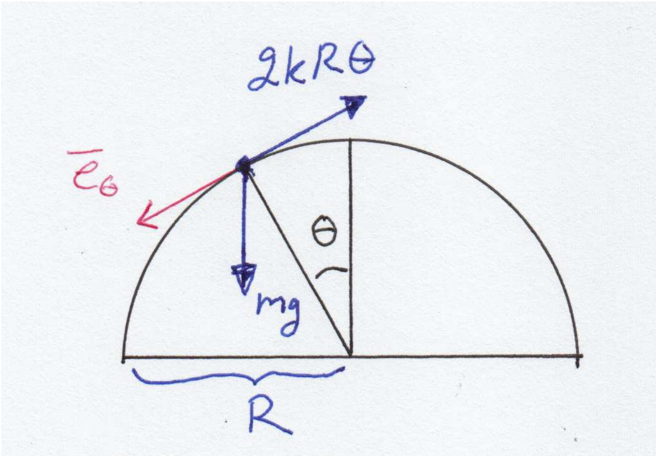
Den minsta hastigheten v_1 som satelliten måste ha i punkten B för att lämna jorden för alltid ges av energiekvationen

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - mg\frac{R^2}{2R} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{gR}, \tag{11}$$

och den minsta hastighetsökningen ges följaktligen av

$$\Delta v = v_1 - v_o = \sqrt{gR}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\sqrt{gR}. \tag{12}$$

4. Newtons andra lag ger:



$$\mathbf{e}_\theta : \quad m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = -2kR\theta + mg\sin\theta\,. \tag{13}$$

Med $r = R$ fås alltså ekvationen

$$mR\ddot{\theta} + 2kR\theta - mg\sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{2k}{m}\theta - \frac{g}{R}\sin\theta = 0\,, \tag{14}$$

För små vinklar kan vi införa approximationen $\sin\theta = \theta$ och ekvationen kan följaktligen skrivas

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{2k}{m} - \frac{g}{R}\right)\theta = 0\,, \tag{15}$$

vilket är den klassiska ekvationen för harmoniska svängningar med vinkelfrekvensen

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{m} - \frac{g}{R}} \tag{16}$$

och perioden

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2k}{m} - \frac{g}{R}}} = \frac{2\pi\sqrt{mR}}{\sqrt{2kR - mg}} \tag{17}$$

Teoridel

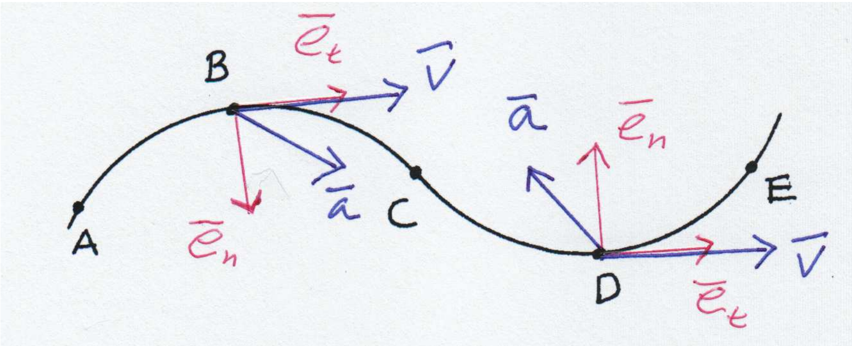
1a) Se sid. 33 i boken
b) Se sid. 18 i boken.
c) Dimensionsanalys ger perioden

$$\tau = C\sqrt{\frac{l}{g}}\,. \tag{18}$$

Perioden är alltså oberoende av massan. Förhållandet mellan de två perioderna blir alltså:

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,. \tag{19}$$

2a) Se sid. 146-148 i boken.
b)



3 a) Se sid. 331-332 i boken.
b) Se sid. 200 i boken.
4a) Se sid 255 i boken.
b) Se sid. 356 i boken.
c) $E = \frac{1}{2}kA^2$, där A är amplituden. Alltså fås

$$\frac{E(t+\tau)}{E(t)} = \frac{A(t)^2}{A(t+\tau)^2} = \frac{e^{-2\zeta\omega_n(t+\tau)}}{e^{-2\zeta\omega_n t}} = e^{-2\zeta\omega_n\tau} = e^{-4\pi\zeta(1-\zeta^2)^{-1/2}}\,. \tag{20}$$