KTH Teknikvetenskap

Envariabelanalys

Tomas Ekholm

Institutionen för matematik

Innehåll

1 Att läsa innan vi börjar

1.1 Varför läsa matematik?

Matematisk teori är ett ypperligt tillfälle att lära sig att analysera, resonera, argumentera, strukturera och ordna. Matematik bygger på abstraktion och den som lär sig att lätt ta till sig abstraktion besitter en enorm styrka i analytiska sammanhang.

1.2 Uppmaning till läsaren av detta häfte

Detta är ett häfte, som på ett kompakt vis beskriver de grundläggande begreppen inom envariabelanalys. Läsaren uppmanas att läsa häftet med ett räkneblock bredvid sig för att komplettera med de steg som utelämnas. Dessa steg ska förhoppningsvis vara möjliga för den engagerade läsaren att genomföra. Det är med andra ord inte förväntat att läsaren endast ska kunna sitta med häftet och tillgodogöra sig innehållet. Löpande i kapitlens text finns det övningar för att läsaren ska kunna se om vederbörande har tillgodogjort sig materialet.

För de läsare som inte är vana att arbeta med abstrakta synsätt kommer häftet kanske att verka onödigt komplicerat skrivet. Abstraktioner kan verka krångligt för den som är ovan, men för den som blivit vän med abstraktioner är de en enorm källa till förenkling. Abstraktion möjliggör att metoder, designer och förhållningssätt kan få större genomslagkraft och bli applicerbara i många konkreta situationer. Det är i denna anda som detta häfte är skrivet. Se detta som en möjlighet att lära dig det abstrakta synsätt, som är ett så ovärderligt redskap inom alla vetenskapliga discipliner.

Till de flesta definitioner och satser följer konkretiserande exempel. Dessa exempel är inte i fokus, utan tjänstgör som redskap för att förstå vad definitionen eller satsen innebär.

Att läsa matematik är svårt. Det finns inte några genvägar till att bemästra dess struktur. Hårt och målinriktat arbete är den enda vägen till insikt. Med denna insikt följer självförtroende inom abstraktion, generaliserande och analytiskt tänkande. Speciellt svår är den första riktiga kursen i matematik, d.v.s. den första kursen som bygger på definitioner och satser. Innan den första riktiga kursen har undervisningen gått ut på att se exempel, lära sig metoder utan vidare väldefinierad förankring i teorin och applicera dem på nya exempel. Vi är inte intresserade av sådan kunskap. De flesta företags frontlinje utgör utforskning av det okända. Det är inför den situationen en ingenjör måste förbereda sig.

Använd gärna wikipedia och youtube för att söka på de begrepp och metoder som ni grubblar på. Nackdelen med wikipedias sidor är att det ofta blir väldigt avancerat när den breda massan beskriver matematik.

1.3 Definitioner, satser och bevis

Matematik struktureras i huvudsak med hjälp av definitioner och satser. En **definition** är ett införande av ett begrepp. Följande är ett exempel på en definition

Definition 1.1. Ett heltal a är **jämnt** om det finns ett heltal b sådant att $a = 2b$.

En sats är ett påstående och ett bevis av en sats är ett logisk stärkt resonemang som visar att satsen är sann. Exempelvis

Sats 1.2. *Produkten av två jämna tal är ett jämnt tal.*

BEVIS: Låt a_1 och a_2 vara två jämna tal, d.v.s. enligt definitionen finns det tal b_1 och b_2 sådana att $a_1 = 2b_1$ och $a_2 = 2b_2$. Produkten kan skrivas som

$$a_1a_2 = (2b_1)(2b_2) = 4b_1b_2 = 2c,$$

där $c = 2b_1b_2$. Eftersom c är ett heltal är produkten enligt definitionen ett jämnt tal. ■

1.4 Mängder

Låt oss börja med att titta på ett av de mest grundläggande begreppen i matematiken, nämligen mängder. En **mängd** är en samling objekt, som till exempel tal, och dessa objekt kallar vi för **element** i mängden. Det enklaste sättet att beskriva en mängd är att räkna upp dess element. Vi använder oss då av en kommaseparerad uppräkning av elementen innanför symbolerna $\{\}$. Ett sådant exempel är mängden

$$A = \{1, 3, a, 7, Pelle\}.$$

Detta betyder att A är en mängd som innehåller elementen $1, 3, a, 7$ och $Pelle$. Vi säger att A är mängden av $1, 3, a, 7$ och $Pelle$.

Om A är en mängd och x är ett element i mängden A så skriver vi $x \in A$ och säger att x **tillhör** A. Exempelvis gäller att $3 \in \{1, 3, 7\}$ och $b \in \{a, b, 10, 3\}$. Att ett element x inte tillhör mängden A skrivs $x \notin A$. Den **tomma mängden** innehåller ingenting och betecknas $\varnothing$.

Ett annat sätt att beskriva en mängd är att skriva

$$\{x \in D : \text{villkor på } x\}. \tag{1.1}$$

Med detta menar man mängden av alla element i D som uppfyller de givna villkoren. Vi tar oss även friheten att utelämna mängden D om den är given utifrån villkoren på x. Som exempel tar vi

$$B = \{n \in \{1, 2, 3, \ldots\} : n \text{ är udda}\} = \{n : n \text{ är ett positivt udda heltal}\}$$

och

$$C = \{y \in \{1, 2, 3, 4\} : y > 2\}.$$

Mängden B innehåller alla udda positiva heltal, medan C innehåller alla element från mängden $\{1, 2, 3, 4\}$ som är större än 2. Alltså har vi

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots\} \quad \text{och} \quad C = \{3, 4\}.$$

Exempel 1.3. Låt $A = \{4, 5, 8, 4711, 12, 18\}$ och $B = \{x \in A : x > 10\}$. Då är $B = \{12, 18, 4711\}$ medan $\{x \in A : x < 3\} = \varnothing$. Vidare har vi att $4 \in A$ och $4 \notin B$. ▲

Vi bryr oss inte om i vilken ordning eller hur många gånger elementen räknas upp och därmed gäller till exempel

$$\{1, 2, 3, 4\} = \{3, 1, 4, 2\} = \{1, 3, 3, 1, 2, 4, 4, 1, 3, 2, 4\}.$$

Vi använder även notationen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ för att säga att $a_1 \in A$, $a_2 \in A$ och $a_n \in A$.

Definition 1.4. Låt A och B vara mängder. Om alla element i mängden A också är element i mängden B så sägs A vara en **delmängd** till B. Detta betecknas $A \subseteq B$.

Exempel 1.5. Mängden $\{1, a\}$ är en delmängd till $\{1, 3, a\}$, eftersom alla element i $\{1, a\}$ finns i mängden $\{1, 3, a\}$. Vi skriver $\{1, a\} \subseteq \{1, 3, a\}$. ▲

Definition 1.6. Antag att A och B är mängder. **Unionen** av A och B består av de element som ligger i någon av mängderna och betecknas $A \cup B$. **Snittet** av A och B består av de element som ligger i båda mängderna och betecknas $A \cap B$.

Exempel 1.7. Låt $A = \{1, 3, 5, 6\}$ och $B = \{5, 3, 4711\}$. Då har vi $A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 4711\}$ och $A \cap B = \{3, 5\}$. ▲

Det är dags att titta på några viktiga talmängder. Den mängd vi använder för att räkna föremål är de **naturliga talen**

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Tar vi med negativa tal får vi **heltalen**

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Beteckningen kommer från tyskans *zahl* som betyder tal. Bråken eller de **rationella talen**

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

Här kommer beteckningen från engelskans *quotient*. Slutligen betecknar vi med $\mathbb{R}$ de **reella talen**. De reella talen kan ses som mängden av alla tal på tallinjen, exempelvis $0, -1, 3/2, -527/3, \sqrt{2}$ och π. Det ligger utanför ramarna för detta häfte att göra en stringent definition av dessa tal. Vi betecknar med

$$\mathbb{C} = \{a + \mathrm{i}b \colon a, b \in \mathbb{R}, \mathrm{i} \text{ är den imaginära enheten}\}$$

de **komplexa talen**. Notera att $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. Det sista, att $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, följer eftersom de komplexa talen med endast realdel kan identifieras med det reella talen.

Exempel 1.8. Vi har att $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} : n \geqslant 0\}$. ▲

Exempel 1.9. Mängden $\{n \in \mathbb{Z} : n = 2k \text{ för något } k \in \mathbb{Z}\}$ är mängden av alla jämna heltal. Denna mängd kan också skrivas som $\{2k \colon k \in \mathbb{Z}\}$, eller som $\{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$. ▲

Exempel 1.10. Låt oss påpeka att en mängd även kan ha andra mängder bland dess element. Exempelvis kan vi låta

$$A = \{2, 3, \{-1, 1\}, 4\},$$

och vi har att $\{-1, 1\} \in A$, det vill säga mängden $\{-1, 1\}$ är ett element i mängden A. Observera att $-1 \notin A$. ▲

Låt A vara en mängd. För att ta bort element ur A används symbolen $\setminus$. Vi definierar $A \setminus B = \{x \in A \colon x \notin B\}$. Exempelvis är $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ mängden av alla reella tal utom 0 och 1.

1.5 Lite historik om mängderlära

Under den senare delen av 1800-talet chockerade Georg Cantor den matematiska världen genom att visa att det finns flera oändligheter. Speciellt visade han att antalet delmängder till en given mängd är större än antalet element i mängden. Intresset för mängdteori växte och en av pionjärerna för den formella aspekten av ämnet var Gottlob Frege. Han försökte se mängdteorin som en grund för matematiken. Mitt under skrivandet av sin bok i ämnet fick han ett brev från en viss ung herre vid namn Bertrand Russell. Russell hade noterat att allt inte stod rätt till i Freges system. Enligt Frege kunde en mängd specificeras med en formel som utgör en restriktion på de element som ingår i mängden. Det var möjligt att bilda mängden av alla x som uppfyller villkoret $P(x)$, där $P(x)$ är ett påstående som beror av x. I symboler blir det

$$\{x \colon P(x)\},$$

jämför med (1.1).

Russells paradox bestod av att han valde $P(x)$ till $x \notin x$ och bildade mängden

$$A = \{x \colon x \notin x\},$$

som är som en oändlig rekursion. Vi får då att $A \in A$ medför att $A \notin A$ och omvänt att $A \notin A$ medför att $A \in A$. Detta är uppenbarligen en logisk motsägelse.

Många försökte rädda mängdteorin på olika sätt. Russell själv införde sin så kallade typteori med olika nivåer av mängder, där han kunde undvika paradoxer. Det mest framgångsrika förslaget kom 1908 från Ernst Zermelo och sedemera Adolf Fraenkel. Deras huvudidé var att man bara kunde bilda mängder på formen $\{x \in A \colon P(x)\}$, där A var en given mängd. I praktiken underförstår man ofta mängden A och skriver lite slarvigt $\{x \colon P(x)\}$. Dock bör man således vara en smula försiktig vid handhavandet av mängder.

Ett tack till Lars Svensson för detta delavsnitt.

2 Delmängder av reella tal

2.1 Intervall

Låt a och b vara reella tal. Följande mängder kallas **intervall**

a) $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \colon a \leqslant x \leqslant b\}$,

b) $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \colon a \leqslant x < b\}$,

c) $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \colon a < x \leqslant b\}$,

d) $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \colon a < x < b\}$,

e) $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \colon a \leqslant x\}$,

f) $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \colon a < x\}$,

g) $(\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} \colon x \leqslant b\}$,

h) $(\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} \colon x < b\}$,

i) $(\infty, \infty) := \mathbb{R}$.

Här står tecknet $:=$ för att vänsterledet är definierat som högerledet. Talen a och b kallas **ändpunkter** eller **randpunkter** till intervallet. Vi använder symbolen [om a tillhör intervallet och (om a inte tillhör intervallet. Om båda randpunkterna tillhör intervallet kallas intervallet **slutet**. Om inga av randpunkterna tillhör intervallet kallas intervallet **öppet**.

Exempel 2.1. Intervallen $(1, 5)$, $(-\infty, 4)$, $(-3, \infty)$ och $(-\infty, \infty)$ är öppna intervall eftersom alla randpunkter till intervallen ej tillhör intervallen. Intervallen $[1, 4]$, $[-2, \infty)$ och $(-\infty, \infty)$ är slutna för alla randpunkter till intervallen även tillhör intervallen. Intervallet $[2, 3)$ är varken öppet eller slutet. Läsaren har säkert noterat att intervallet $(-\infty, \infty)$ både är öppet och slutet, eftersom det inte finns några randpunkter. ▲

2.2 Egenskaper för delmängder av reella tal

En **omgivning** till en punkt $a \in \mathbb{R}$ är ett öppet intervall som innehåller a. Exempelvis är det öppna intervallet $(0, 1)$ en omgivning till talet $3/4$ och intervallen $(-1/n, 1/n)$ för $n > 0$ är alla omgivningar till 0. En **punkterad omgivning** till en punkt a är en omgivning till a där vi har tagit bort talet a.

Exempel 2.2. Mängden $\{x \in (-1, 2) : x \neq 0\} = (-1, 0) \cup (0, 2)$ är en punkterad omgivning till 0. ▲

Definition 2.3. Ett tal m sägs vara en **övre begränsning** till en mängd A om $x \leqslant m$ för varje $x \in A$. En mängd som har en övre begränsning kallas **uppåt begränsad**, annars **uppåt obegränsad**.

Undre begränsning till en mängd, en **nedåt begränsad** mängd och en **nedåt obegränsad** mängd definieras på ett analogt sätt. En mängd som är uppåt begränsad och nedåt begränsad sägs vara **begränsad**, annars **obegränsad**. Ett exempel på en obegränsad mängd är intervallet $[2, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \colon 2 \leqslant x\}$ som är uppåt obegränsad och nedåt begränsad.

Ett grundläggande axiom för de reella talen är

Axiom 2.4 (Supremumaxiomet)**.** Varje uppåt begränsad delmängd av de reella talen har en minsta övre begränsning.

Definition 2.5. Ett tal m sägs vara **supremum** till en mängd A och betecknas $\sup A$ om m är den minsta övre begränsningen till A.

På samma vis definieras **infimum** av en mängd A som den största undre begränsningen till A och betecknas $\inf A$.

Supremumaxiomet säger med andra ord att om A är en mängd av reella tal som är uppåt begränsad så finns talet $\sup A$.

Exempel 2.6. Låt

$$A = \left\{ \frac{4n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Visa att $\sup A = 4$. För att se att 4 är en övre begränsning till A räcker det med att notera att för en godtycklig punkt i A gäller att

$$a_n := \frac{4n}{n+1} \leqslant \frac{4n}{n} = 4.$$

Nu måste vi visa att 4 är den minsta övre begränsningen, dvs att det inte finns någon mindre övre begränsning. Låt oss anta att $K < 4$ är en övre begränsning och försöka finna en motsägelse. Vi kan skriva om a_n enligt följande:

$$a_n = \frac{4n}{n+1} = 4 - \frac{4}{n+1}.$$

För att få en motsägelse vill vi finna ett n sådant att $a_n > K$, vilket skulle motsäga att K är en övre begränsning. Alltså, kan vi finna ett n sådant att

$$4 - \frac{4}{n+1} > K?$$

Vi noterar att

$$4 - \frac{4}{n+1} > K$$

gäller om och endast om

$$n > \frac{4}{4-K} - 1.$$

Det är klart att vi kan välja $n > 4/(4-K) - 1$ och alltså få $a_n > K$. Vi har fått en motsägelse och alltså är 4 den minsta övre begränsningen. ▲

Exempel 2.7. Ett sätt att illustrera supremumasxiomet är att visa att de rationella talen $\mathbb{Q}$ inte uppfyller denna egenskap, d.v.s. varje uppåt begränsad delmängd av $\mathbb{Q}$ har inte en minsta övre begränsning i $\mathbb{Q}$. Studera mängden $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leqslant 2\}$. Om vi godkänner reella tal så är $\sup A = \sqrt{2}$. Detta tal är dock inte ett rationellt tal (se denna länk om ni inte har sett det tidigare). Antag att vi har funnit ett rationellt tal q som är supremum till A, d.v.s. q är en övre begränsning till A och q är den minsta övre begränsningen till A.

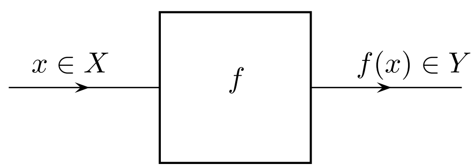
Eftersom $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ så följer att q är antingen större eller mindre än $\sqrt{2}$. Om $q < \sqrt{2}$ så följer att det finns rationella tal i intervallet $(q, \sqrt{2})$ som strider mot att q är en övre begränsning. Om $q > \sqrt{2}$ så finns det rationella tal i intervallet $(\sqrt{2}, q)$ som är mindre övre begränsningar än q. Alltså är q inte den minsta övre begränsningen till A. ▲

3 Funktioner

Innan vi gör en allmän definition av vad en funktion är kan det vara på sin plats att titta på något välbekant, nämligen en formel som $f(x) = x^2 + 1$, för $x > 0$. Formeln säger att om vi tar ett tal $x > 0$ så får vi ett nytt tal $f(x) \in \mathbb{R}$ genom att göra beräkningen $x^2 + 1$; till exempel får vi $f(2) = 2^2 + 1 = 5$. Vi säger att f är en funktion från de positiva reella talen till de reella talen, eftersom det vi stoppar in, x, är ett positivt reellt tal och det vi får ut, $f(x)$, är ett reellt tal. Vi betecknar detta med $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nu till den allmänna definitionen.

Definition 3.1. Låt X och Y vara mängder. En **funktion** $f\colon X \to Y$ är ett sätt att till varje element $x \in X$ tilldela ett välbestämt element $y \in Y$. Vi skriver $f(x) = y$. Vi säger att x **avbildas** på y och att y är **bilden** av x. Elementet x kallas **argument** till f. Mängderna X och Y kallas **definitionsmängd** respektive **målmängd**. För definitionsmängden för f används även beteckningen D_f.

Kommentar 3.2. Beteckningen $f\colon X \to Y$ utläses: f är en funktion från X till Y. Ett vanligt alternativ till ordet funktion är **avbildning**. Vi kan se funktionen som ett eget objekt som utför en handling som bilden nedan visar.



Exempel 3.3. Ett exempel på en funktion från de positiva reella talen till de reella talen är $f\colon \{x \in \mathbb{R}\colon x > 0\} \to \mathbb{R}$, sådan att $f(x) = 1 + 2 \cdot 3^x$. Definitionsmängden är $D_f = \{x \in \mathbb{R}\colon x > 0\}$ och målmängden är $\mathbb{R}$. ▲

Värdemängden till en funktion $f\colon X \to Y$ definieras som

$$V_f := \{y \in Y : y = f(x) \text{ för något } x \in X\}.$$

Exempel 3.4. Betrakta mängderna $A = \{1, 2, 3\}$ och $B = \{1, 2, \ldots, 100\}$. Ett exempel på funktion $f : A \to B$ ges av $f(n) = 2n$ för $n \in A$. Vi har alltså att $f(1) = 2$, $f(2) = 4$ och $f(3) = 6$. Per definition måste vi ha $f(x) \in B$ för alla $x \in A$, och detta gäller ju här eftersom

$$f(1) = 1 \in B, \quad f(2) = 4 \in B, \quad \text{och} \quad f(3) = 6 \in B.$$

I detta exempel definieras funktionen f av formeln $f(n) = 2n$, men det är inte alls nödvändigt att det finns en formel som beskriver hur funktionen verkar. Om vi som här har en funktion från den *ändliga* mängden $A = \{1, 2, 3\}$ kan man till exempel definera funktionen med hjälp av en tabell:

n	$f(n)$
1	2
2	4
3	6

▲

Om inget anges om definitionsmängden antas funktionen vara definierad på så stor delmängd av de reella talen som möjligt och målmängd antas alltid vara $\mathbb{R}$. Detta är en konvention mellan er som läsare och oss som skribenter.

Exempel 3.5. Låt $h(x) = 3x^2/2 - x^3$. Detta definierar en funktion h från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$. Vi har exempelvis att

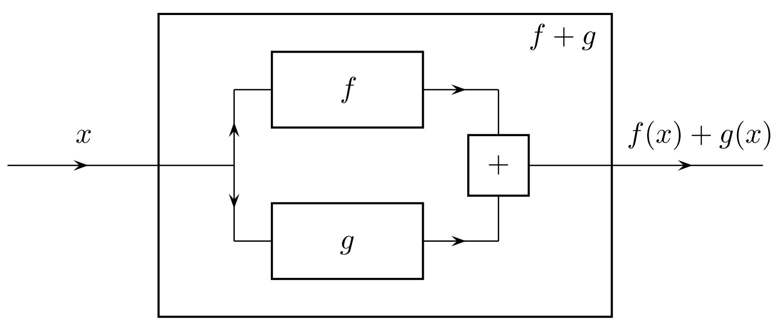
$$h(1) = \frac{1}{2} \quad \text{och} \quad h(-2) = 14.$$

▲

Vi kommer tydligt skilja på f och $f(x)$, det första är funktionen f, medan det andra är funktionens värde i punkten x. Som ett exempel på denna notation så definierar vi summan och produkten av två reellvärda funktioner f och g, sådana att $D_f = D_g \subset \mathbb{R}$ enligt

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$
$$(f \cdot g)(x) := f(x)g(x)$$

Bildmässigt kan vi se additionen som

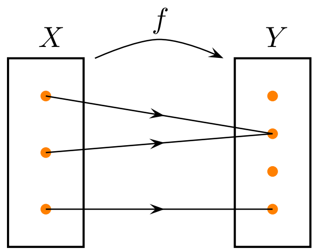


Om vi inte vill namnge den funktion som vi arbetar med eller introducerar används notationen $x \mapsto 1 + x^2$ istället för $f(x) = 1 + x^2$. För er som uppskattar programmering är det väldigt likt det sätt som anonyma klasser eller funktioner definieras i olika programspråk.

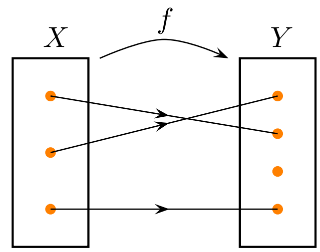
3.1 Inverser och inverterbarhet

Definition 3.6. En funktion $f\colon X \to Y$ säges vara **injektiv** om det för varje $x, y \in X$ gäller att om $f(x) = f(y)$ så är $x = y$.

Uttryckt i ord säger den här definitionen att funktionen aldrig skickar två olika element i X på samma element i Y.



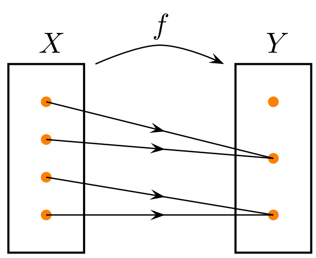
Exempel då f ej är injektiv



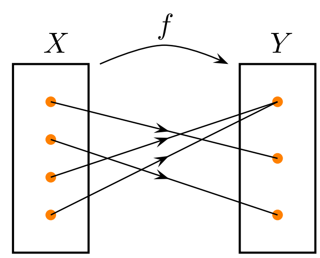
Exempel då f är injektiv

Definition 3.7. En funktion $f\colon X \to Y$ säges vara **surjektiv** om det för varje $y \in Y$ existerar ett $x \in X$ sådant att $f(x) = y$.

Varje element i Y är alltså bilden av något x under funktionen f om funktionen är surjektiv. En funktion är surjektiv om och endast om dess målmängd sammanfaller med dess värdemängd.



Exempel då f ej är surjektiv



Exempel då f är surjektiv

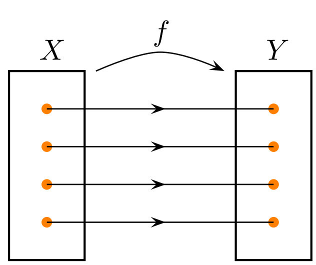
En funktion kan vara surjektiv utan att vara injektiv, och tvärtom.

Exempel 3.8. Låt $\mathbb{R}_+$ beteckna de icke-negativa reella talen. Betrakta funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ som definieras av $f(x) = x^2$. Då är f surjektiv, men inte injektiv — till exempel har vi $f(-2) = f(2) = 4$.

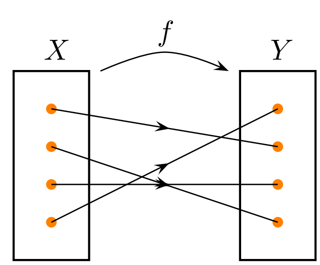
Ett exempel på en funktion som är injektiv men inte surjektiv ges av funktionen i 3.4. Det finns till exempel inget $n \in \{1, 2, 3\}$ sådant att $f(n) = 3$.

▲

Definition 3.9. En funktion $f\colon X \to Y$ som både är injektiv och surjektiv säges vara **bijektiv**, eller en **bijektion**.



Exempel då f är bijektiv



Exempel då f är bijektiv

Definition 3.10. Låt $f\colon X \to Y$ vara en bijektiv funktion. **Inversen** till f är avbildningen $f^{-1}\colon Y \to X$ som ges av $f^{-1}(y) = x$, där x är det entydiga element i X som uppfyller $f(x) = y$. En funktion som har en invers kallas **inverterbar**.

Vi ser här att både injektivitet och surjektivitet är viktigt. Om f inte är injektiv kan det finnas många $x \in X$ med $f(x) = y$. Om f inte är surjektiv kan det vara så att det inte finns något x med $f(x) = y$. För inversen gäller att $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$ för alla $y \in Y$ och $f^{-1}\left(f(x)\right) = x$ för alla $x \in X$.

Exempel 3.11. Betrakta funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som ges av $f(x) = x^3$. Denna funktion är injektiv och surjektiv, och därmed en bijektion. Inversen till f ges av funktionen $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som definieras av $f^{-1}(y) = y^{1/3}$. ▲

Exempel 3.12. Både definitionsmängden och värdemängden måste beaktas när vi undersöker om en funktion är en bijektion.

Funktionen $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ med $f(x) = x^2$ är en bijektion, med invers $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Som vi såg tidigare är detta påstående falskt om vi betraktar f definierad på hela $\mathbb{R}$. ▲

Antag att $f\colon X \to Y$ är en injektiv funktion. Då vet vi att vi kan, för varje $y \in V_f$, finna ett $x \in X$ sådant att $f(x) = y$. Men, om Y innehåller element som inte finns i V_f är funktionen f inte surjektiv och därmed inte bijektiv. I detta fall är förutsättningarna för en invers inte uppfyllda. Detta kan i många fall, men inte alla, ses som en teknikalitet. Ty, om vi bara skulle ändra på definitionen av f så att målmängden Y är exakt de element vi kan få, nämligen V_f, så skulle vi ha en bijektiv funktion och alltså en invers. Vi kan säga att varje funktion som är injektiv har en invers definierad på funktionens värdemängd V_f. Dvs, om $g\colon X \to V_g$ är injektiv så är den inverterbar.

Exempel 3.13. Låt $f(x) = x + 2$ vara en funktion definierad för $x \in [0, 3]$. Det är en enkel verifikation att se att f är injektiv. Värdemängden till f är $V_f = [2, 5]$. Alltså är f inverterbar om f ses som funktionen $f\colon [0, 3] \to [2, 5]$. I detta fall är $f^{-1}\colon [2, 5] \to [0, 3]$ och $f^{-1}(y) = y - 2$. ▲

3.2 Egenskaper för reella funktioner

Definition 3.14. Vi säger att en funktion f är **växande på ett intervall** $I \subset D_f$ om det för varje $x, y \in I$ för vilka $x < y$ ger att $f(x) \leqslant f(y)$. Om en funktion är växande på hela sin definitionsmängd kallas f **växande**.

Observera att den konstanta funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ och $f(x) = 42$ är växande. Den är däremot inte strängt växande som definieras enligt:

Definition 3.15. Vi säger att en funktion f är **strängt växande på ett intervall** $I \subset D_f$ om det för varje $x, y \in I$ för vilka $x < y$ ger att $f(x) < f(y)$. Om en funktion är strängt växande på hela sin definitionsmängd kallas f **strängt växande**.

Definition 3.16. En funktion f är **uppåt obegränsad** om dess värdemängd V_f är uppåt obegränsad och **uppåt begränsad** om dess värdemängd V_f är uppåt begränsad.

Egenskaper som **avtagande**, **strängt avtagande**, **nedåt obegränsad** och **nedåt begränsad** funktioner definieras på ett analogt sätt. Vi säger att en funktion är **monoton** eller **strängt monoton** i ett intervall om den är växande respektive strängt växande i intervallet eller avtagande respektive strängt avtagande i intervallet.

Exempel 3.17. Låt $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ vara en given positiv funktion. Visa att om $g : (0, 1) \to \mathbb{R}$ med $g(x) = xf(x)$ uppfyller att $V_g = [1, 2]$ så är f obegränsad.

Vi visar detta med hjälp av en motsägelse. Antag att f är uppåt begränsad, d.v.s. V_f är uppåt begränsad, vilket i sin tur ger att det existerar ett tal M sådant $f(x) \leqslant M$ för varje $x \in (0, 1)$ och $M > 1$. Vi observerar att $1/2M \in (0, 1)$ och att

$$g(1/2M) = \frac{1}{2M} \cdot f(1/2M) \leqslant \frac{1}{2M} \cdot M = \frac{1}{2} < 1.$$

Detta strider mot att $V_g = [1, 2]$, alltså är f obegränsad. ▲

Definition 3.18. En funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ säges vara **jämn** om $f(-x) = f(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

Några exempel på jämna funktioner är: $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^4$ och $x \mapsto |x|$.

Definition 3.19. En funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ säges vara **udda** om $f(-x) = -f(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

Några exempel på udda funktioner är: $x \mapsto x^3$ och $x \mapsto x^7$.

Observera att en funktion som inte är jämn inte behöver vara udda. Exempelvis är $x \mapsto 1 + x$ varken jämn eller udda.

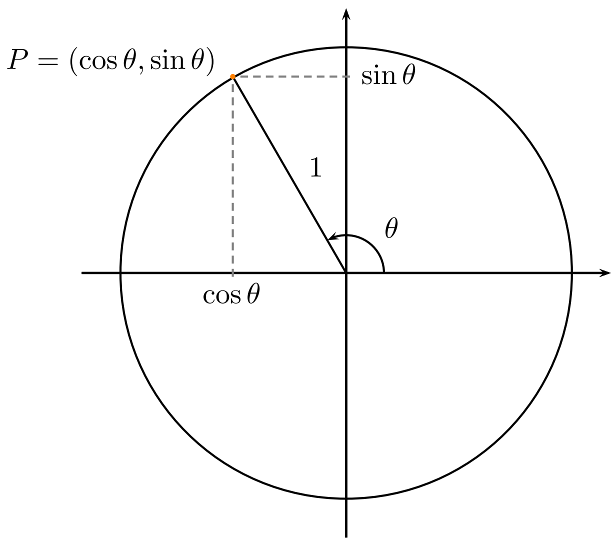
3.3 Trigonometriska funktioner

Vi ska i detta delkapitel definiera sinus och cosinus och vilka grundläggande egenskaper som de besitter.

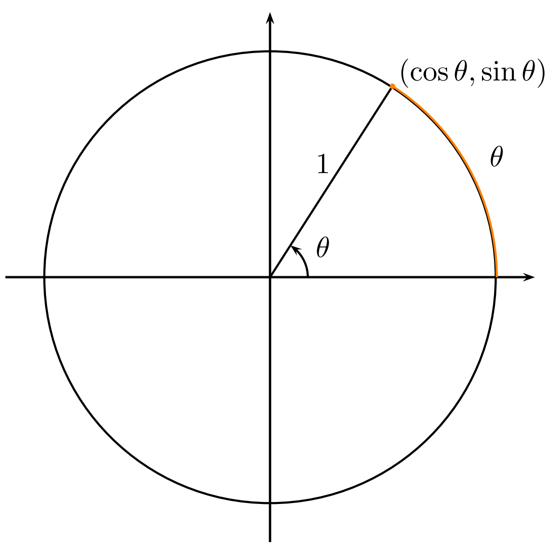
Låt oss betrakta en punkt P på enhetscirkeln vars linje in mot origo bildar vinkeln θ till x-axeln om vi använder orienteringen moturs från x-axeln. Vi kallar koordinaterna i P för $(\cos\theta, \sin\theta)$. Direkt ser vi att

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

vilket kallas för den **trigonometriska ettan**. Där $\sin^n \theta$ för $n \in \mathbb{R}$ är definierat som $(\sin \theta)^n$.



Det är viktigt att vi inför en enhet eller skala för vinkeln θ. Låt oss säga att vinkeln $\theta = 1$ om längden på den cirkelbåge som bildas har längden 1. Denna enhet kallas **radianer** och är på många sätt den naturliga skalan för vinklar. Vi kommer i detta häfte alltid förutsätta att vinklar mäts i radianer.



Vi har bildat funktionerna $\theta \mapsto \cos\theta$ och $\theta \mapsto \sin\theta$ för $\theta \in [0, 2\pi)$. Vi utvidgar dessa funktioner periodiskt till hela $\mathbb{R}$, d.v.s.

$$\cos\theta = \cos(\theta + n2\pi),$$
$$\sin\theta = \sin(\theta + n2\pi)$$

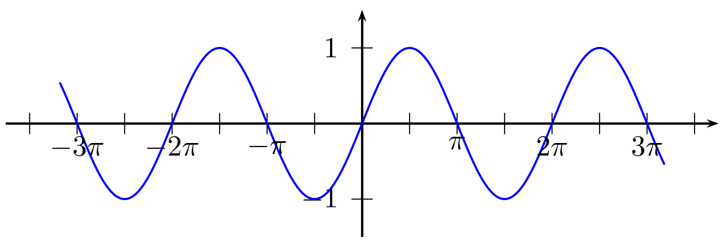
för alla $n \in \mathbb{Z}$. Funktionen $x \mapsto \sin x$ kallas **sinus** och $x \mapsto \cos x$ kallas **cosinus**.

Av symmetriskäl får vi följande relationer direkt från definitionen ovan

$$\sin\theta = \cos(\theta - \pi/2), \tag{3.1}$$
$$\cos\theta = \sin(\theta + \pi/2), \tag{3.2}$$
$$\cos(-\theta) = \cos\theta, \tag{3.3}$$
$$\sin(-\theta) = -\sin\theta, \tag{3.4}$$
$$\cos\theta = -\cos(\theta + \pi), \tag{3.5}$$
$$\sin\theta = -\sin(\theta + \pi). \tag{3.6}$$

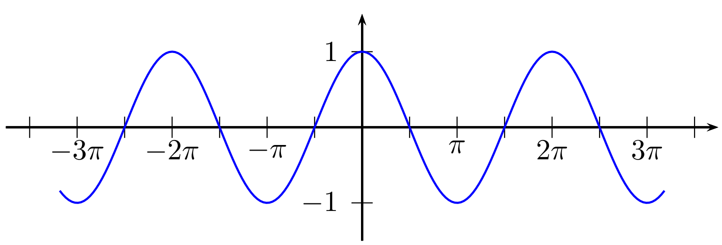
Relationerna (3.3) och (3.4) säger att cosinus och sinus är en jämn respektive udda funktion.

Grafen till funktionerna sinus och cosinus är



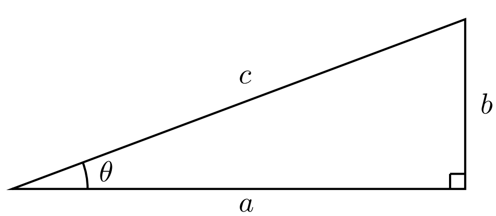
Figur 3.1: Grafen till funktionen $x \mapsto \sin x$.

respektive

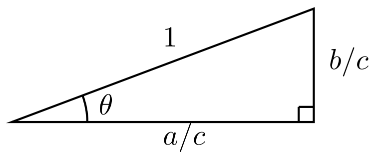


Figur 3.2: Grafen till funktionen $x \mapsto \cos x$.

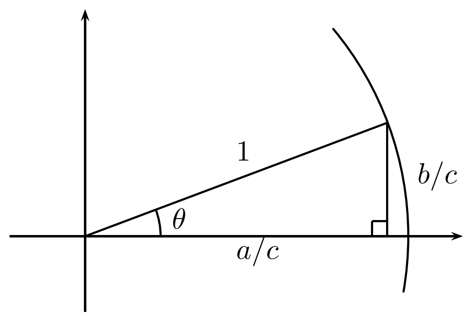
Exempel 3.20. Observera att vi kan med hjälp av sinus och cosinus relatera sidor och vinklar med varandra i rätvinkliga trianglar. Låt oss börja med den rätvinkliga triangeln med sidorna a, b och c



Om vi skalar denna triangel så att hypotenusan får längden 1 så får vi den likformiga triangeln



Om vi nu skriver in denna triangeln i enhetscirkeln så får vi de önskade relationerna



Vi ser att

$$\cos\theta = \frac{a}{c} \quad \text{och} \quad \sin\theta = \frac{b}{c}. \tag{3.7}$$

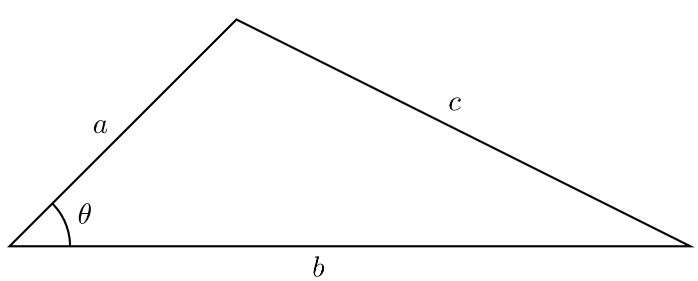
▲

Vi behöver en generalisering av Pythagoras sats som heter Cosinussatsen, nämligen

Sats 3.21 (Cosinussatsen)**.** *Låt a, b och c vara sidlängderna i en triangel. Då gäller att*

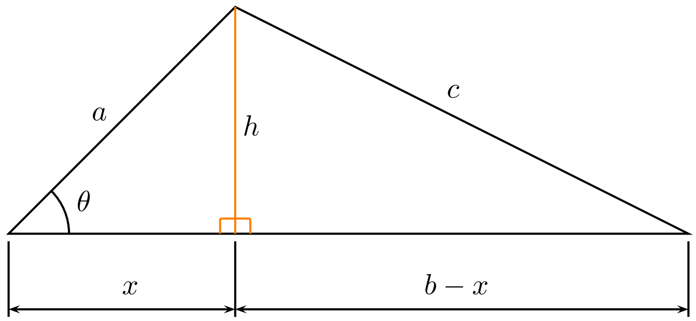
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta, \tag{3.8}$$

där θ är den vinkel i triangel där sidlängderna a och b möts.



Bevis: I fallet $\theta = \pi/2$ så återfår vi Pythagoras sats. Vi bevisar cosinussatsen för spetsiga och trubbiga vinklar var för sig.

Vi börjar med fallet då vinkeln $\theta < \pi/2$, alltså då θ är spetsig. Vi inför höjden h och låter x vara en del av sidan b som i figuren nedan



Vi använder nu Pythagoras sats i de två rätvinkliga trianglarna och får

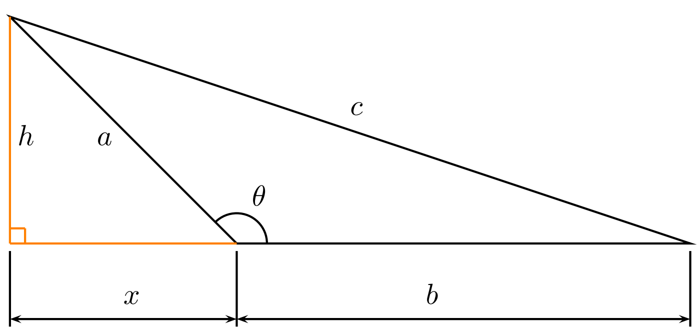
$$\begin{cases} a^2 = h^2 + x^2 \\ c^2 = h^2 + (b-x)^2 \end{cases}$$

Vi löser ut h^2 i den första ekvationen och sätter in resultatet i den andra ekvationen och får

$$c^2 = a^2 - x^2 + (b-x)^2 = a^2 + b^2 - 2bx.$$

Det återstår att konstatera att $x = a\cos\theta$ vilken följer från formel (3.7).

Det andra fallets lösning är näst intill lika. Med hjälp av en bild lämnar vi det som en övning åt läsaren.



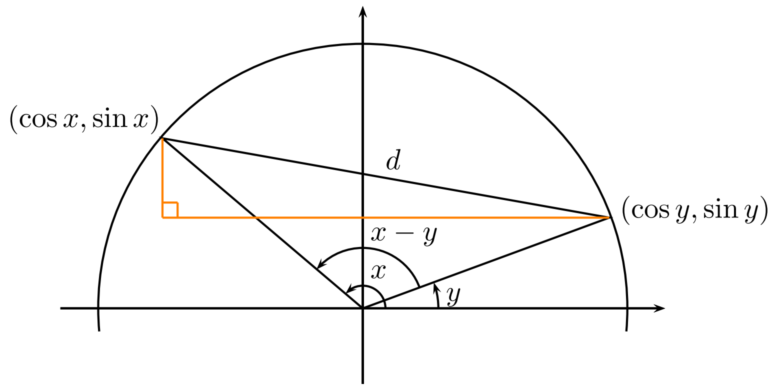
■

Sats 3.22. *Följande identitet gäller*

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \tag{3.9}$$

Bevis: Observera att vi med hjälp av Pythagoras sats får att d i figuren nedan ges av

$$d = \sqrt{(\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2}.$$



Cosinussatsen 3.21 ger att

$$(\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = 1 + 1 - 2\cos(x - y).$$

Om vi förenklar med hjälp av den trigonometriska ettan får vi

$$\begin{aligned} 2 - 2\cos x \cos y - 2\sin x \sin y &= 2 - 2\cos(x - y) \\ \cos x \cos y + \sin x \sin y &= \cos(x - y) \end{aligned}$$

vilket skulle bevisas. ■

Följdsats 3.23. *Följande identiteter gäller*

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \tag{3.10}$$
$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \tag{3.11}$$
$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y \tag{3.12}$$
$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \tag{3.13}$$
$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x \tag{3.14}$$

Bevis: Vi bevisar här (3.10). Låt $y = -z$ i (3.9). Vi får då

$$\begin{aligned} \cos(x + z) &= \cos x \cos(-z) + \sin x \sin(-z) \\ &= \cos x \cos z - \sin x \sin z \end{aligned}$$

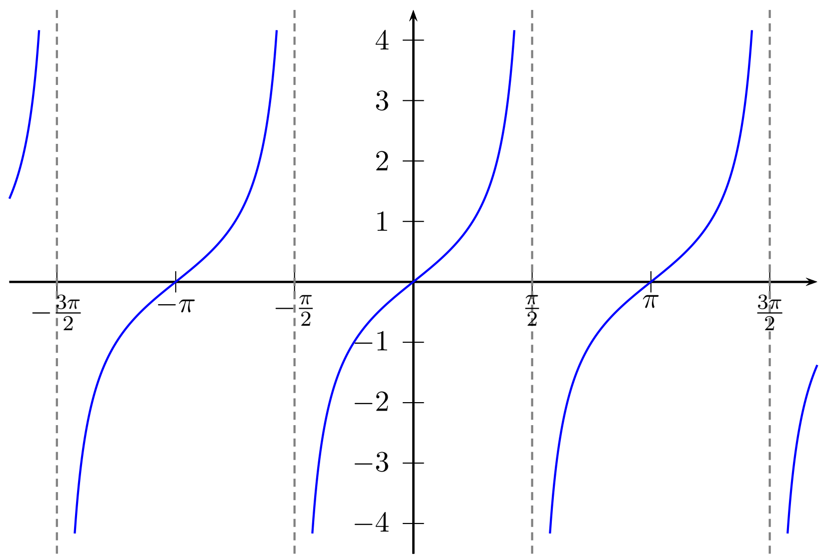
Bevisen för (3.11) – (3.14) följer på liknande vis och med hjälp av (3.1) – (3.6) och lämnas som en övning åt läsaren. ■

Definition 3.24. Funktionen $\tan\colon \{x \in \mathbb{R}\colon x \neq n\pi/2, n \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, sådan att

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \tag{3.15}$$

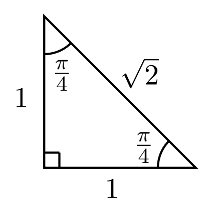
kallas **tangens**.

Grafen för tangens är



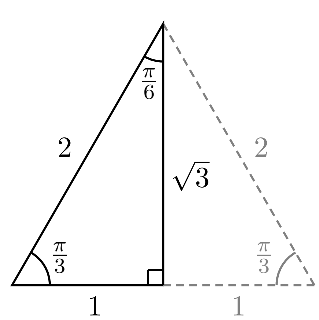
Figur 3.3: Grafen till funktionen $x \mapsto \tan x$.

Exempel 3.25. Låt oss studera två speciella trianglar som ger oss möjlighet att exakt beräkna värdet av de trigonometriska funktionerna för punkterna $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ och $\frac{\pi}{3}$. Vi börjar med en likbent och rätvinklig triangel där kateterna är av längden 1, alltså



som ger att $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ och därmed är $\tan \frac{\pi}{4} = 1$.

Nästa triangel är en liksidig triangel med sidan 2 som vi delar mitt itu.



Vi ser att $\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ och $\sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ därmed är $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ och $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. ▲

Övning 3.1. Lös följande ekvationer

a) $\sin x = \frac{1}{2}$,

b) $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Övning 3.2. Visa att

a) $\sin^2 2x = 4\tan^2 x(1 - \sin^2 x)(\cos 2x + \sin^2 x)$,

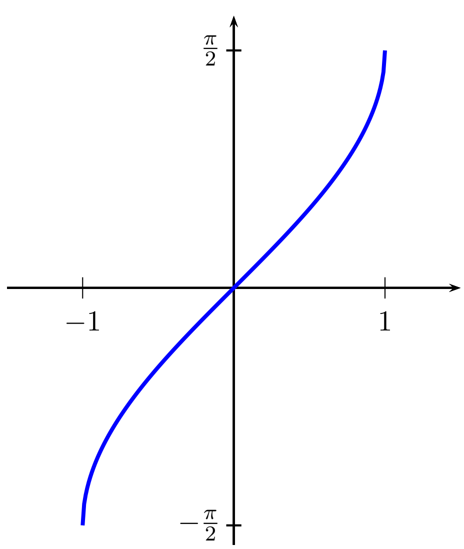
b) Beräkna $\cos(\pi/12)$ genom att använda att $\cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.4 Cyklometriska funktioner

Vi börjar med att observera att funktionen $f\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$ sådan att $f(x) = \sin x$ inte är injektiv, ty vi har t.ex. att $f(0) = f(\pi)$, och därmed inte inverterbar. Om vi däremot begränsar definitionsmängden D_f till det slutna intervallet $[-\pi/2, \pi/2]$ blir f bijektiv och har en invers. Vi gör följande definition:

Definition 3.26. Låt $f\colon [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ sådan att $f(x) = \sin x$. Inversen till f kallas **arcussinus** och betecknas $f^{-1}(y) = \arcsin y$.

Observera att den generella formeln $\sin(\arcsin y) = y$ gäller för alla $y \in [-1, 1]$ och $\arcsin(\sin x) = x$ gäller för alla $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Grafen för arcussinus är



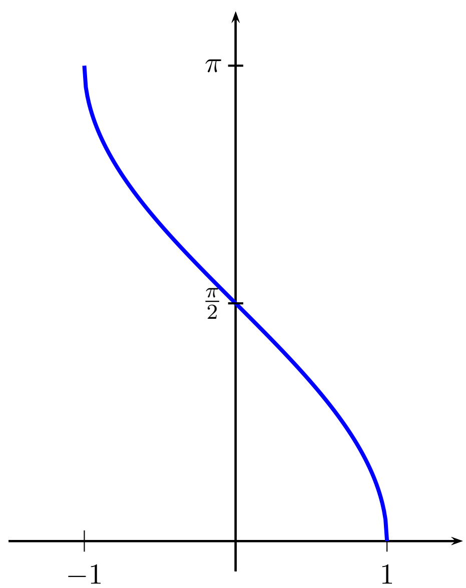
Figur 3.4: Grafen till funktionen $x \mapsto \arcsin x$.

Kommentar 3.27. Vi skulle ha kunnat välja något annat intervall än $[-\pi/2, \pi/2]$ för att få $x \mapsto \sin x$ bijektiv. Detta intervall är dock standardiserat runt om i världen, så om inget annat anges kan man med säkerhet anta att det är detta intervall man menar när man pratar om inversen till $x \mapsto \sin x$.

På liknande sätt konstaterar vi att funktionerna $x \mapsto \cos x$ och $x \mapsto \tan x$ kan göras inverterbara genom att inskränka definitionsmängden.

Definition 3.28. Låt $f\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$ sådan att $f(x) = \cos x$. Inversen till f kallas **arcuscosinus** och betecknas $f^{-1}(y) = \arccos y$.

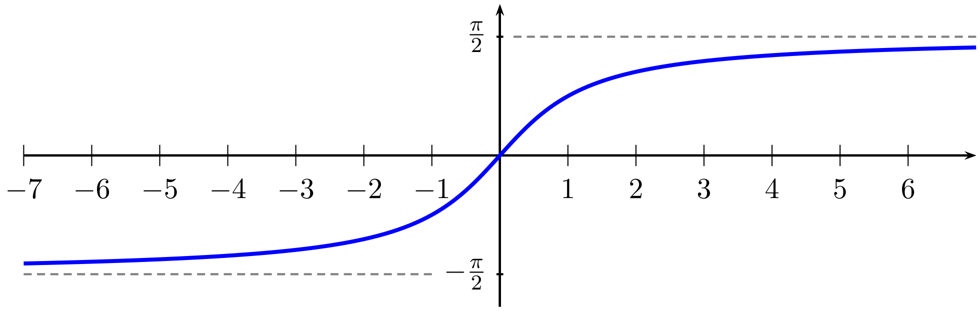
Grafen för arcuscosinus är



Figur 3.5: Grafen till funktionen $x \mapsto \arccos x$.

Definition 3.29. Låt $f\colon [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$ sådan att $f(x) = \tan x$. Inversen till f kallas **arcustangens** och betecknas $f^{-1}(y) = \arctan y$.

Grafen för arctangens är



Figur 3.6: Grafen till funktionen $x \mapsto \arctan x$.

Övning 3.3. Bestäm definitionsmängden och värdemängden till funktionerna

a) $x \mapsto \arcsin x$,

b) $x \mapsto \arccos x$,

c) $x \mapsto \arctan x$.

Övning 3.4. Lös ekvationerna

a) $\arcsin x = -\frac{5\pi}{6}$,

b) $\arctan x = \frac{\pi}{4}$.

3.5 Exponentialfunktionen

Vi kommer inte i detta häfte definiera exponentialfunktionen $x \mapsto a^x$, där $a > 1$. Istället antas att läsaren är bekväm med funktionen som en strängt växande funktion med värdemängd $(0, \infty)$ som uppfyller räknelagarna

a) $a^0 = 1$

b) $a^1 = a$

c) $a^{x+y} = a^x a^y$

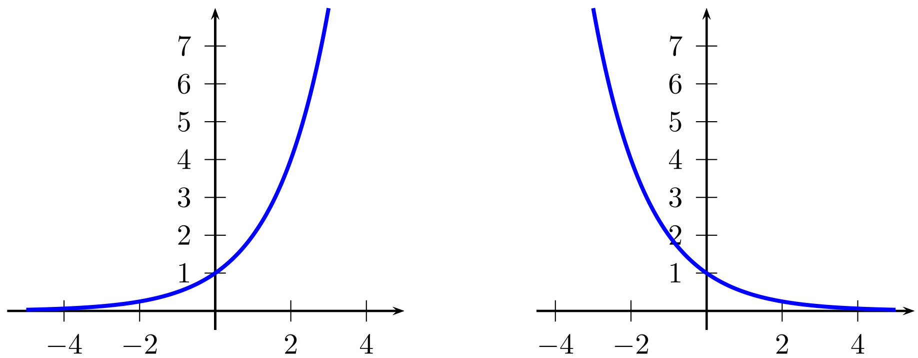
d) $a^{-x} = 1/a^x$

e) $(a^x)^y = a^{xy}$

Att introducera exponentialfunktionen på ett korrekt vis är långt ifrån en enkel sak och ligger utanför ramarna för detta häfte. Med hjälp av d) kan vi definiera exponentialfunktionen för $a < 1$. Vi har för $a < 1$ att $1/a > 1$ och

$$a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}.$$

Grafen för exponentialfunktionen är

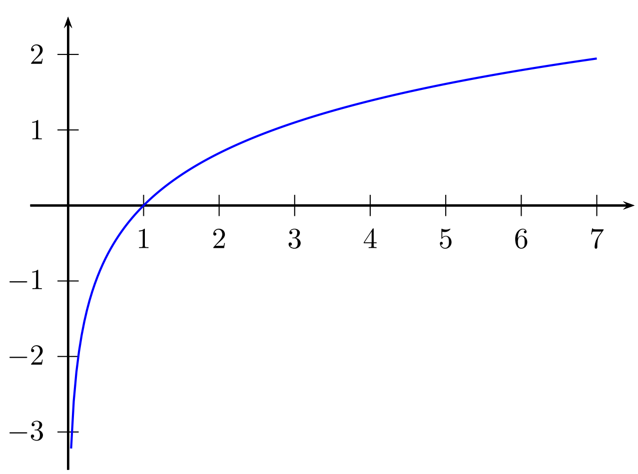


Figur 3.7: Grafen till funktionen $x \mapsto 2^x$ till vänster och $x \mapsto (1/2)^x$ till höger.

Övning 3.5.

3.6 Logaritmfunktionen

Låt $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ sådan att $f(x) = a^x$, för något $a > 1$. Då gäller att f är inverterbar. Vi definierar **logaritmfunktionen** som inversen till f och betecknar $f^{-1}(y) = \log_a y$. Alltså har vi att $D_{f^{-1}} = (0, \infty)$ och $V_{f^{-1}} = \mathbb{R}$. Grafen för logaritmfunktionen är



Figur 3.8: Grafen till funktionen $x \mapsto \log_2 x$.

Inversen uppfyller följande räknelagar:

Sats 3.30. *Låt $a > 1$, då gäller att logaritmfunktionen uppfyller*

a) $\log_a 1 = 0$

b) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \qquad x > 0, y > 0$

c) $\log_a x^y = y \log_a x, \qquad x > 0$

Bevis: Generellt gäller att vi vill överföra exponentialfunktionens räknelagar till dess inversfunktion. Vi kommer hela tiden att använda oss av att $x = y$ om och endast om $a^x = a^y$. Detta är en direkt följd av att $x \mapsto a^x$ är injektiv.

a) Vi vill visa att $\log_a 1 = 0$ eller ekvivalent att $a^{\log_a 1} = a^0$. Vänsterledet uppfyller att $a^{\log_a 1} = 1$ och högerledet att $a^0 = 1$. Alltså stämmer alla påståenden.

b) Vi vill visa att $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ eller ekvivalent att $a^{\log_a(xy)} = a^{\log_a x + \log_a y}$. För vänsterledet gäller att $a^{\log_a(xy)} = xy$ och för högerledet via exponentialfunktionens räknelagar att $a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = xy$.

c) Vi vill visa att $\log_a x^y = y \log_a x$ eller ekvivalent att $a^{\log_a x^y} = a^{y \log_a x}$. Vänsterledet är x^y och högerledet är $a^{y \log_a x} = (a^{\log_a x})^y = x^y$ och vi är klara.

■

Övning 3.6. Visa att

a) $\log_a(x^3 - xy^2) - \log_a(x + y) - \log_a x = \log_a(x - y)$,

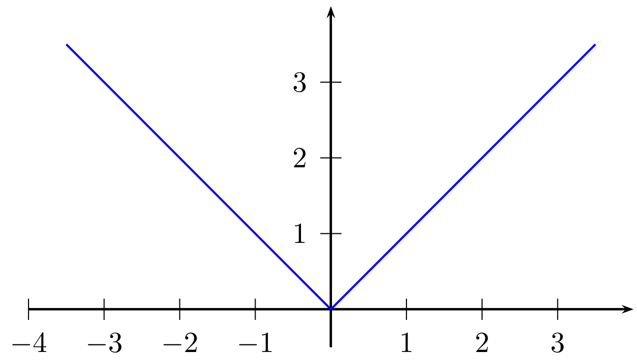
b) $((3^a)^b - 3^a)3^{-a} + 1 = 3^{ab-a}$.

3.7 Absolutbelopp

Givet ett tal $x \in \mathbb{R}$ (eller $\in \mathbb{C}$) så definieras $|x|$ som avståndet från x till origo. Funktionen $x \mapsto |x|$ kallas **absolutbeloppet** alternativt **beloppet** av x. För reella tal implicerar detta att

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases} \tag{3.16}$$

eller $|x| = \sqrt{x^2}$. Grafen har följande utseende



Figur 3.9: Grafen till funktionen $x \mapsto |x|$.

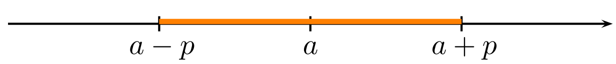
Observera att funktionen $x \mapsto |x|$ är jämn.

Exempel 3.31. Vi har enligt definitionen att $|-5| = -(-5) = 5$, $|5| = 5$, $|-\pi| = -(-\pi) = \pi$ och $|0| = 0$. Vi har här varit övertydliga med användningen av minustecken. ▲

I detta häfte kommer vi i ett flertal tillfällen att använda absolutbeloppet på formen $|x - a| = b$ som betyder att avståndet från $x - a$ till origo, eller avståndet från x till a, är b.

Exempel 3.32. Skissa mängden $A = \{x \in \mathbb{R} \colon |x - a| \leqslant p\}$, där $p > 0$.

LÖSNING:



▲

Observera att definitionen direkt ger att

$$x \leqslant |x|, \tag{3.17}$$

för varje $x \in \mathbb{R}$. Följande sats visas exempelvis med hjälp av fallindelning.

Sats 3.33. *Låt $x, y \in \mathbb{R}$, då gäller*

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \tag{3.18}$$
$$|x + y| \leqslant |x| + |y|. \tag{3.19}$$

BEVIS: Vi lämnar beviset av (3.18) till läsaren som en övning.

Beviset av (3.19) gör vi med hjälp av fallindelning.

Antag att $x \geqslant 0$ och $y \geqslant 0$. Olikheten är i detta fall en likhet, ty

$$|x+y| = x+y = |x|+|y|.$$

Antag nu att $x \geqslant 0$ och $y \leqslant 0$. Symmetriskäl gör att fallet $x \leqslant 0$ och $y \geqslant 0$ kan behandlas analogt, varför vi utelämnar det. Även här vill vi dela upp i två fall. Det ena är då $x+y \geqslant 0$ och det andra då $x+y < 0$. Vi börjar med fallet då $x+y \geqslant 0$. Vi får (kom ihåg att $y < 0$)

$$|x+y| = x+y \leqslant x-y = x+(-y) = |x|+|y|.$$

Nu till delfallet att $x+y < 0$. Vi får

$$|x+y| = -(x+y) = -x-y \leqslant x-y = x+(-y) = |x|+|y|.$$

Slutligen det sista fallet då $x < 0$ och $y < 0$. Vi får

$$|x+y| = -(x+y) = -x+(-y) = |x|+|y|$$

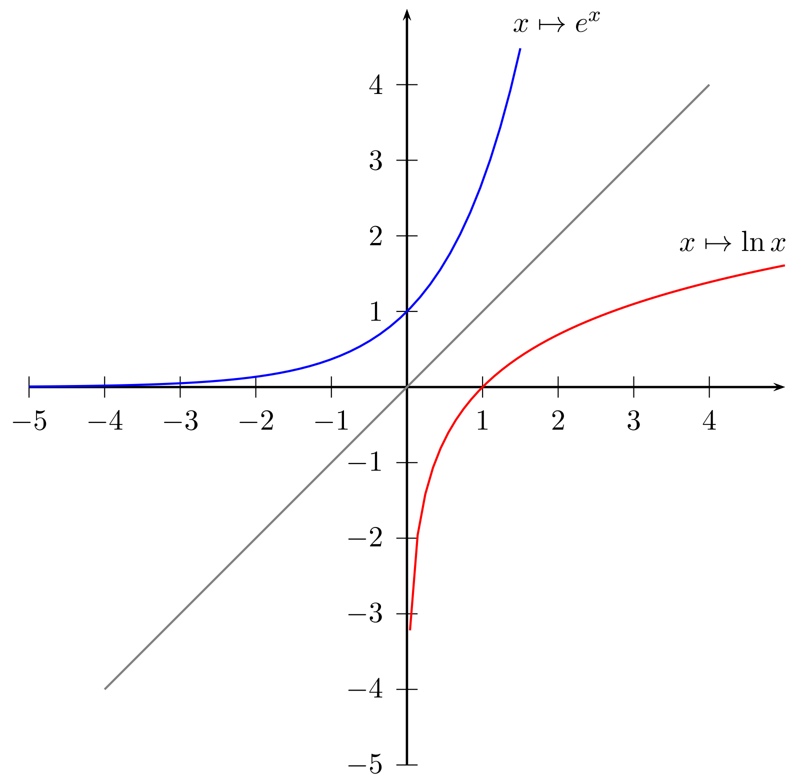
och olikheten är visad. ■

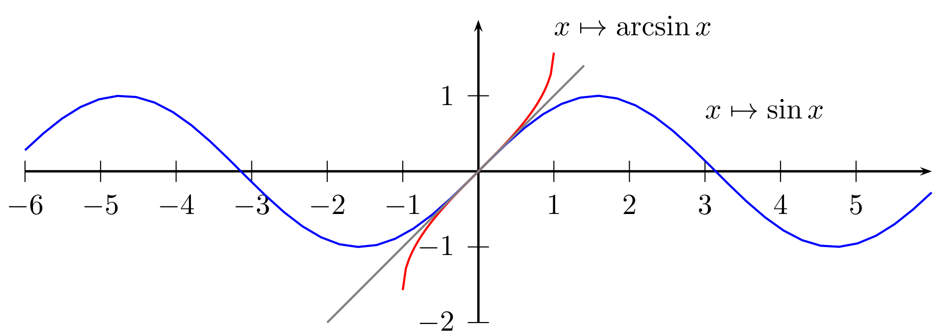
Övning 3.7. Lös olikheten $|x^2-4| < 5$.

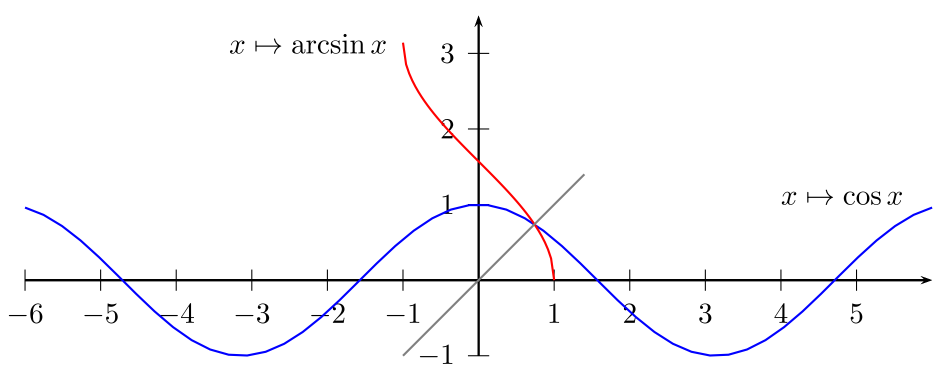
Övning 3.8. Visa att om $|x-1| < 1$ så är $|x+1| < 3$.

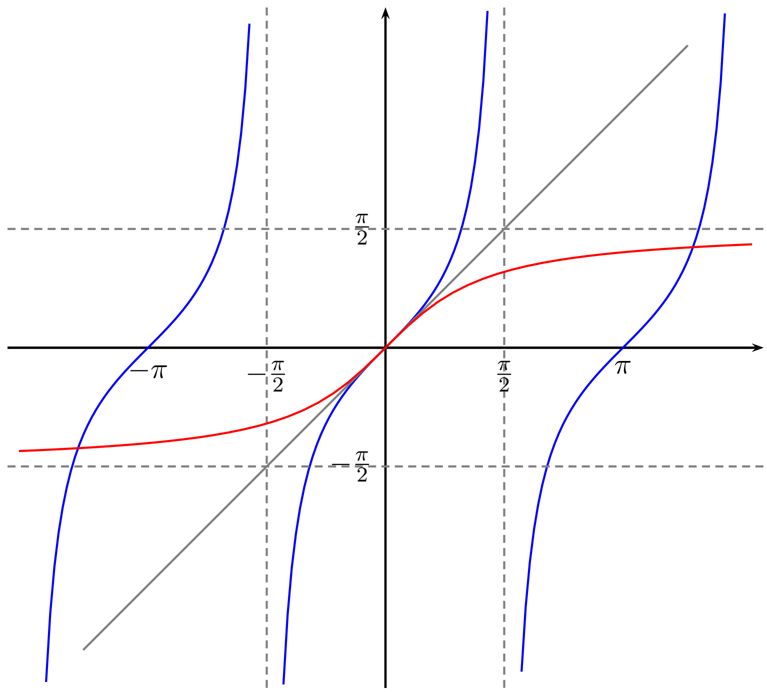
3.8 De elementära funktionernas grafer

I detta delkapitel ritas graferna ut till delar av de elementära funktionerna. Dessa grafer är lämpliga att kunna. Vi ritar funktionerna och dess inverser gemensamt för att illustrera sambanden.

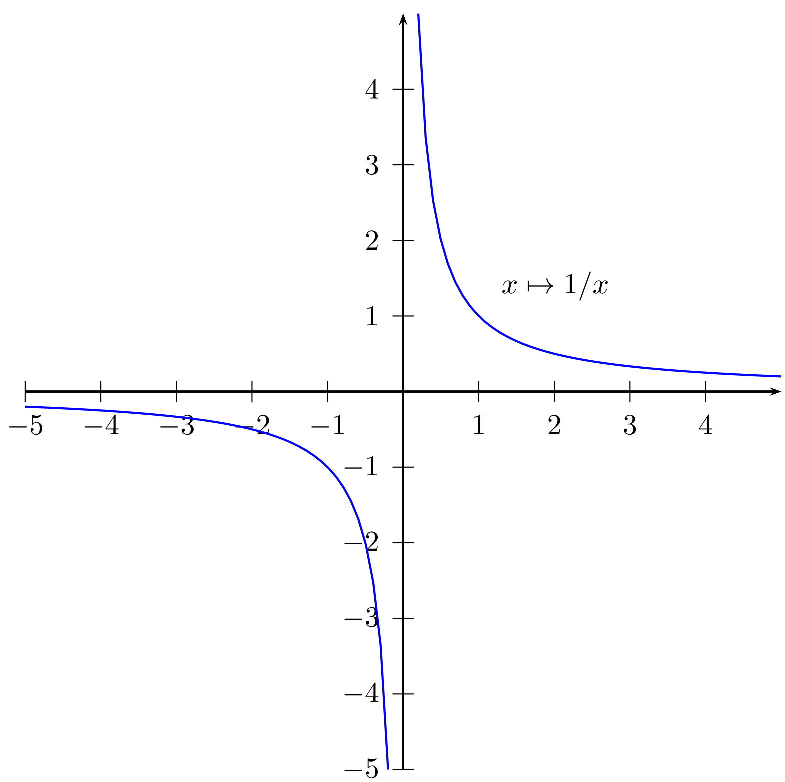

$x \mapsto e^x$
$x \mapsto \ln x$

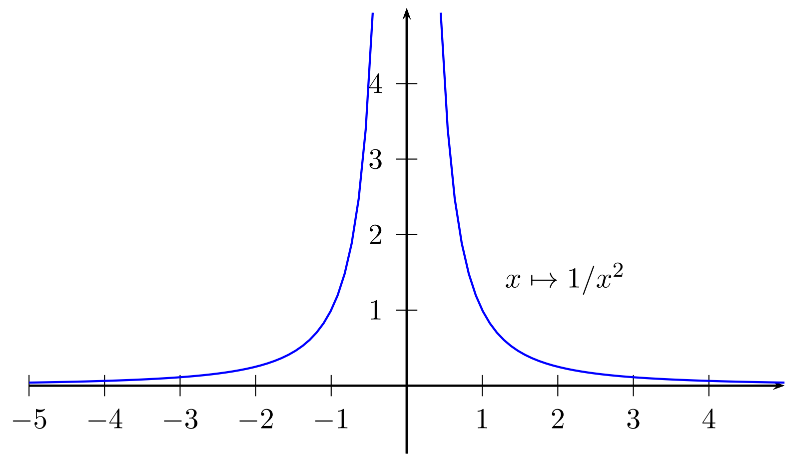

$x \mapsto \arcsin x$
$x \mapsto \sin x$


$x \mapsto \arcsin x$
$x \mapsto \cos x$



Figur 3.10: Den röda grafen är $x \mapsto \arctan x$ och den blå grafen är $x \mapsto \tan x$.





3.9 Övningar

Övning 3.9. Bestäm definitionsmängd, värdemängd och inversen för funktionerna

a) $x \mapsto \ln(\sqrt{1-x})$,

b) $x \mapsto e^{\sqrt{x-4}}$,

c) $x \mapsto x$

Övning 3.10. Visa den andra delen i beviset av cosinussatsen.

Övning 3.11. Visa (3.11) – (3.14).

Övning 3.12. Visa likhet (3.18).

Övning 3.13. Visa att

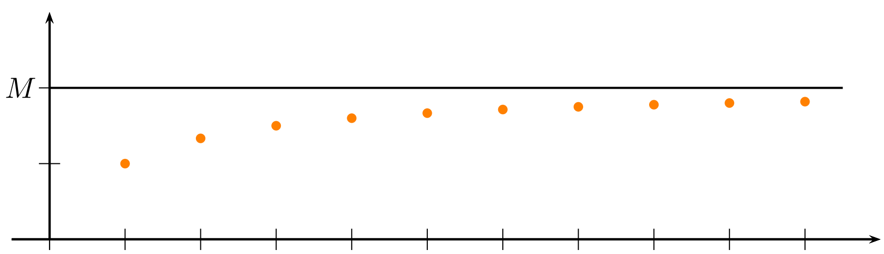
a)
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

b)
$$\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

4 Talföljder

4.1 Definitionen och konvergens

Definition 4.1. En följd av tal $a_1, a_2, a_3, \ldots$ kallas för en **talföljd** och betecknas $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Vi säger att talföljden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är **växande** om $a_{n+1} \geqslant a_n$ för varje $n \geqslant 1$ och att den är **uppåt begränsad** om det finns ett tal M sådant att $a_n \leqslant M$ för varje $n \geqslant 1$.



Figur 4.1: Exempel på en talföljd som är växande och uppåt begränsad av M.

Vi definierar på ett analogt sätt vad som menas med att en talföljd är **avtagande** och **nedåt begränsad**. En talföljd sägs vara **begränsad** om den är både uppåt och nedåt begränsad.

Exempel 4.2. Om $a_n = \frac{2n}{n+1}$ så blir $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ talföljden $2/2, 4/3, 6/4, 8/5, \ldots$. Talföljden är uppåt begränsad av talet 2 men även av talet 14, ty

$$a_n = 2 - \frac{2}{n+1} \leqslant 2.$$

Den är dessutom växande eftersom

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \geqslant 0.$$

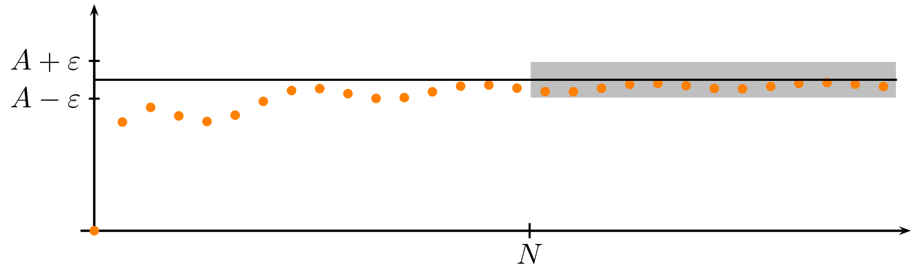
Figur 4.1 illustrerar denna talföljd. ▲

Definition 4.3. En talföljd $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sägs **konvergera mot gränsvärdet** A om det för alla $\varepsilon > 0$ finns ett N sådant att $|a_n - A| < \varepsilon$ för varje $n > N$. Vi inför beteckningen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

En talföljd med denna egenskap kallas **konvergent**, annars kallas talföljden **divergent**.

Figuren nedan illustrerar definitionen.

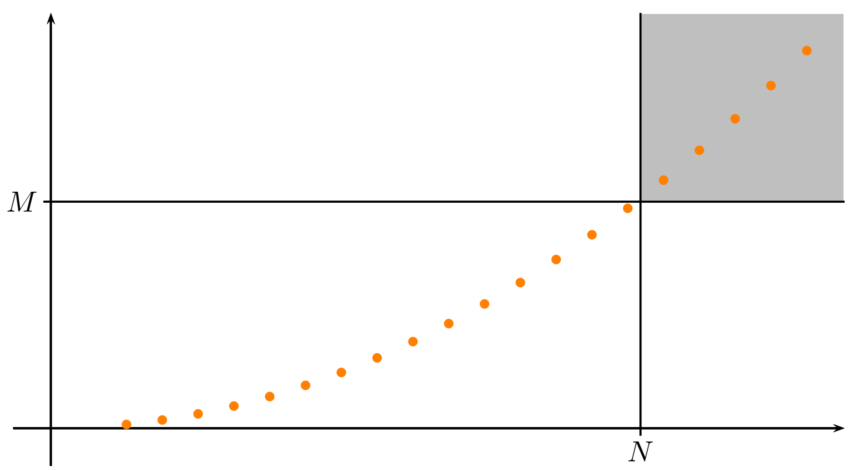


Exempel 4.4. Visa att talföljden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ där talen ges av $a_n = 2 + 3^{-n}$ konvergerar mot 2 då $n \to \infty$.

Enligt definitionen ska vi först låta ett tal $\varepsilon > 0$ vara givet. Vi vill nu finna ett N, som kommer att bero av ε, sådant att $|a_n - 2| < \varepsilon$ för varje $n > N$. Vi ser att $|a_n - 2| < \varepsilon$ är ekvivalent med $3^{-n} < \varepsilon$ och därmed även med $\frac{1}{\varepsilon} < 3^n$. Eftersom logaritmfunktionen $x \mapsto \log_3 x$ är strängt växande så följer att $\frac{1}{\varepsilon} < 3^n$ är ekvivalent med $-\log_3 \varepsilon < n$. Alltså har vi att om $n > -\log_3 \varepsilon$ så är $|a_n - 2| < \varepsilon$. Vi kan därmed välja N till något tal större än eller lika med $-\log_3 \varepsilon$, låt oss ta $N = -\log_3 \varepsilon$. ▲

Vi säger att talföljden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ har det **oegentliga gränsvärdet** ∞ om det för varje M existerar ett N sådant att $a_n > M$ för varje $n > N$. Vi betecknar detta med

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty.$$



Observera att talföljder som har oegentliga gränsvärden är divergenta. Det finns även talföljder som helt saknar gränsvärde, exempelvis $a_n := (-1)^n$, som pendlar mellan -1 och 1. Det är lämnat till läsaren att visa att en konvergent talföljd är begränsad.

Sats 4.5. *Låt $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ och $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ vara konvergenta talföljder med gränsvärdena A respektive B. Då följer att*

a) $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$ *är konvergent med gränsvärdet $A + B$,* *b)* $(a_n b_n)_{n=1}^{\infty}$ *är konvergent med gränsvärdet* AB*,*

c) *om* $B \neq 0$ *har vi att* $(a_n/b_n)_{n=1}^{\infty}$ *är konvergent med gränsvärdet* A/B*,*

d) *om* $a_n \leqslant b_n$*, för varje* n *så gäller att* $A \leqslant B$*.*

Kommentar 4.6. Den observante noterar att vi i c) måste anta att $b_n \neq 0$ för alla de n som är inkluderade i (a_n/b_n). Eftersom vi är intresserade av gränsvärdet då $n \to \infty$ kan vi exkludera tal i början av följden. Då vi vet att $B \neq 0$ så kan vi välja ett N sådant att $|b_n - B| < |B|/2$. Alltså följer att $b_n \neq 0$, då $n > N$. Vi kan nu omformulera c) som att $(a_n/b_n)_{n=N}^{\infty}$ är konvergent med gränsvärdet A/B.

Bevis: Vi använder oss av definitionen.

a) Tag $\varepsilon > 0$. Vi vill visa att det finns ett N sådant att $|a_n + b_n - A - B| < \varepsilon$ för alla $n > N$. Enligt triangelolikheten (3.19) har vi

$$|a_n + b_n - A - B| \leqslant |a_n - A| + |b_n - B|$$

Då $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar mot A och $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar mot B får vi att det finns tal N_1 och N_2 så att

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2},$$

då $n > N_1$ och

$$|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2},$$

då $n > N_2$. Detta ger att

$$|a_n + b_n - A - B| < \varepsilon,$$

då $n > \max\{N_1, N_2\}$. Alltså kan vi välja $N = \max\{N_1, N_2\}$.

b) Tag $\varepsilon > 0$. Vi vill visa att det finns ett N sådant att $|a_n b_n - AB| < \varepsilon$ för alla $n > N$. Enligt triangelolikheten (3.19) har vi

$$\begin{aligned} |a_n b_n - AB| &= |a_n b_n - a_n B + a_n B - AB| \\ &\leqslant |a_n b_n - a_n B| + |a_n B - AB| \\ &= |a_n||b_n - B| + |B||a_n - A|. \end{aligned}$$

Eftersom $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är konvergent så är den begränsad, d.v.s. det finns ett tal $K > 0$ sådant att $|a_n| < K$ för varje $n \geqslant 1$. Då $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar mot A och $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar mot B får vi att det finns tal N_1 och N_2 sådana att

$$|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2K},$$

då $n > N_1$ och

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2|B|},$$

då $n > N_2$. Detta ger att

$$|a_n b_n - AB| < \varepsilon,$$

då $n > \max\{N_1, N_2\}$. Alltså kan vi välja $N = \max\{N_1, N_2\}$.

c) Detta bevis lämnas som en övning åt läsaren.

d) Låt oss göra ett motsägelsebevis. Antag att $B < A$. Bilda talföljden $c_n = b_n - a_n$. Vi har att $c_n \geqslant 0$, för varje $n \geqslant 1$. Talföljden $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ har gränsvärdet $C := B - A < 0$. Tag $\varepsilon = -C/2 > 0$. Från definitionen existerar det ett N sådant att $C + C/2 < c_n < C/2$, för varje $n > N$. Men då $C < 0$ så får vi att $c_n < C/2 < 0$ för $n > N$. Detta strider mot att $c_n \geqslant 0$, för varje $n \geqslant 1$. Alltså är $A \geqslant B$.

■

Sats 4.7. *Om $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är en växande och uppåt begränsad talföljd så är den konvergent och*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \geqslant 1\}.$$

Bevis: Eftersom $\{a_n : n \geqslant 1\}$ är en delmängd av de reella talen som är uppåt begränsad så finns enligt supremumaxiomet 2.4 en minsta övre begränsning. Låt oss kalla denna minsta övre begränsning till $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ för K, d.v.s. $K = \sup\{a_n : n \geqslant 1\}$. Då K är den minsta övre begränsningen till talföljden så finns det element i talföljden godtyckligt nära K och i vissa fall även lika stora som K. Alltså, för varje givet $\varepsilon > 0$ finns ett N sådant att $|a_N - K| < \varepsilon$. Men då talföljden är växande kommer $|a_n - K| < \varepsilon$ för alla $n > N$. Vi är klara och har visat att gränsvärdet av talföljden är precis K, d.v.s.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = K.$$

■

På samma sätt visas att om $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är en avtagande och nedåt begränsad talföljd är så är den konvergent och

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \geqslant 1\}.$$

Satsen som följer säger att n^2, $\sqrt{n}$ och n har det oegentliga gränsvärdet ∞, då $n \to \infty$, medan n^{-1} och $n^{-1/2}$ går mot noll, då $n \to \infty$. Beviset är lämnat som en övning för läsaren.

Sats 4.8. *Följande gränsvärde gäller*

$$\lim_{n\to\infty} n^p = \begin{cases} \infty, & \textit{om } p > 0, \\ 0, & \textit{om } p < 0. \end{cases}$$

Övning 4.1. Bestäm följande gränsvärden

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n+1}{1+2n^2}$,

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{e^n+e^{-n}}{e^{2n}+e^{-2n}}$.

4.2 Binomialsatsen

Vi börjar med några exempel för att illustrera vad vi vill åstadkomma i detta delavsnitt.

Exempel 4.9. Antag att det finns fem personer och vi frågar oss följande: På hur många sätt kan dessa bilda en kö, d.v.s. en ordnad följd?

Svaret är att vi har fem möjligheter att välja den första personen, fyra möjligheter att välja den andra personen, o.s.v.. Vi får alltså $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ möjligheter. ▲

Definition 4.10. Låt $n \in \mathbb{N}$, då definieras

$$n! = \begin{cases} n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1, & n \geqslant 1, \\ 1, & n = 0. \end{cases}$$

Beteckningen kallas n-**fakultet**.

Exempel 4.11. Antag att det finns tio personer och vi vill bilda en kö bestående av fyra personer. På hur många sätt kan vi åstadkomma detta?

Svaret är att vi kan välja första personen på tio olika sätt, andra personer på nio olika sätt, tredje personen på åtta olika sätt och slutligen den fjärde personen på sju olika sätt. Alltså finns det

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \frac{10!}{6!} = \frac{10!}{(10-4)!}$$

olika sätt. Den sista identiteten är där för att illustrera hur svaret beror av parametrarna från frågeställningen. ▲

Läsaren kan själv verifiera att detta resonemang leder till att vi kan välja ut en kö på k personer från n stycken på

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

olika sätt. Här förutsätts att $k \leqslant n$.

Exempel 4.12. Antag att det finns tio personer och vi vill bilda en grupp bestående av fyra personer. Där ordningen på de utvalda inte spelar någon roll. På hur många sätt kan vi åstadkomma detta?

Vi vet från det tidigare exemplet att varje kö av fyra personer från tio kan väljas ut på $10!/(10-4)!$ olika sätt. Det betyder att om vi nu tar bort den inbördes ordningen så finns varje grupp med $4!$ gånger för mycket. Det vi vill är att dessa $4!$ olika köer är en och samma grupp. Vi måste alltså dividera med $4!$. Svaret är att vi kan välja ut fyra personer av tio till en grupp på

$$\frac{10!}{(10-4)!4!}$$

olika sätt. Det är värt att bekräfta att detta svar är symmetriskt i 4 och $10-4$. Jag menar att vi kunde lika gärna ha valt ut fyra personer genom att välja ut vilka sex personer som inte ska vara med. Att välja ut sex personer från tio till en grupp kan enligt ovan göras på

$$\frac{10!}{(10-6)!6!}$$

olika sätt. I båda fallen är svaret

$$\frac{10!}{4!6!}.$$

▲

Mer allmänt

Definition 4.13. Låt $n, k \in \mathbb{N}$ sådana att $k \leqslant n$. Vi definierar n**-över-**k som

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Vi har alltså definierat en notation och talesätt för svaret på den viktiga frågan: På hur många sätt kan vi välja ut k stycken saker från n stycken?

Vi är nu redo att beskriva satsen som delavsnittet handlar om

Sats 4.14 (Binomialsatsen)**.** *Låt $n \in \mathbb{N}$, då gäller att*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Bevis: Vänsterledet består av en multiplikation av n stycken faktorer av typen $(a+b)$. Om vi utför parentesmultiplikation så får vi termer av typen $a^k b^{n-k}$, så att den totala antalet faktorer är n. Frågan är hur många termer av denna typ vi får. Att välja ut k stycken a ur n parenteser kan göras på $\binom{n}{k}$ olika sätt. Alltså är vi klara. ■

4.3 Talet e

Exempel 4.15. Antag att vi har x kr på banken och att banken ger oss xr kr i ränta varje år. Efter ett år har vi alltså $(1+r)x$ kr. Antag vidare att banken ger oss halva räntan om vi endast har pengarna insatta halva året och analogt för andra tidsperioder av året. I vårt fall betyder det att vi har $(1+r/2)x$ kr efter ett halvår. Vi kan då utnyttja detta genom att ha x kr insatta ett halvår för att ta ut $(1+r/2)x$. Nu sätter vi in $(1+r/2)x$ samma dag och plockar vid årets slut ut $(1+r/2)$ gånger pengarna, dvs. $(1+r/2)(1+r/2)x$. Det senare kan skrivas om som

$$\left(1+\frac{r}{2}\right)\left(1+\frac{r}{2}\right)x = \left(1+\frac{r}{2}\right)^2 x = \left(1+r+\frac{r^2}{4}\right)x.$$

Vi har vunnit $r^2x/4$ på kuppen.

Om vi nu gör så här varje dag blir det

$$\left(1+\frac{r}{365}\right)^{365} x = \left(1+r+\frac{r^2}{4}+\dots\right) x.$$

Om vi gör det n gånger så blir det

$$\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n} x,$$

vad händer nu då $n \to \infty$?

Vi kommer senare i detta avsnitt att se att detta gränsvärde går mot $e^r x$, där e är ett tal. Alltså har vi $e^r x$ pengar efter ett år. Banken kan nu använda strategin att de betalar ut ränta utefter denna modell redan från början. Om en kund vill ta ut pengar efter halva året så får de $e^{r/2}$ gånger pengarna. Med denna modell så kan de inte tjäna mer genom att ta ut och sätta in pengarna vid upprepade tillfällen. För en kund som har x pengar och gör detta efter ett halvår får vi, $e^{r/2}e^{r/2}x = e^r x$. Alltså är ränta på ränta redan inkluderad. Årsräntan är $1 + r_{year} = e^r$ eller $r_{year} = e^r - 1$. ▲

Definition 4.16. Vi definierar talet

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

För att definitionen ovan skall vara av någon mening så måste vi visa att gränsvärdet existerar.

Sats 4.17. *Talföljden* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *med*

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

är konvergent.

Bevis: Vi vill verifiera att $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är växande och uppåt begränsad. Låt oss använda binomialsatsen 4.14

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^{k} 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}.$$

Vi studerar varje term i detalj.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!n^k} = \frac{1}{k!}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k} \\
&= \frac{1}{k!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} \\
&= \frac{1}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).
\end{aligned}$$

För att nu inse att talföljden är växande studerar vi a_n och a_{n+1}.

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

och analogt följer att

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right).$$

Låt oss jämföra de termer vi får för ett givet k. Vi har att

$$1 - \frac{i}{n} < 1 - \frac{i}{n+1}, \quad i = 1, 2, ..., k-1$$

vilket ger att

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right).$$

För varje k i summorna är termen från a_{n+1} större än den från a_n. Dessutom innehåller a_{n+1} en term mer än a_n som också ger ett positivt bidrag. Alltså är $a_{n+1} > a_n$ för alla $n \geqslant 1$.

Låt oss nu även verifiera att $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är uppåt begränsad. Återigen använder vi oss av framställningen

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!},$$

då varje parantes är mindre än 1.

Vi behöver olikheten $k! > 2^k$ för alla $k \geqslant 4$. Olikheten kan ekvivalent beskrivas som $k!/2^k > 1$, för alla $k \geqslant 4$. Vi har följande

$$\frac{k!}{2^k} = \frac{k(k-1)(k-2)\cdots 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2} = \frac{k}{2}\frac{k-1}{2} \cdots \frac{5}{2}\frac{4}{2}\frac{3}{2}\frac{2}{2}\frac{1}{2} > \frac{k}{2}\frac{k-1}{2} \cdots \frac{5}{2} > 1,$$

eftersom varje faktor är större än 1.

Detta passar nu perfekt för vår uppskattning.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{k!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{2^k} \\ &= 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} < 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}.\end{aligned}$$

Vi påminner oss nu om formeln för en geometrisk summa,

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

I vårt fall får vi

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) < 3.$$

Vi har nu visat att $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ både är växande och uppåt begränsad vilket ger att $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är konvergent. ■

Exempel 4.18. Vi får även talet e som gränsvärde ifall vi låter $n \to -\infty$. Nämligen,

$$\lim_{n\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

LÖSNING: Låt $m = -n$, vi får

$$\begin{aligned}\lim_{n\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{m\to\infty} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-m} \\ &= \lim_{m\to\infty} \left(\frac{m}{m-1}\right)^m = \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^m.\end{aligned}$$

Låt nu $k = m - 1$ och nyttja 4.5 b). Alltså är

$$\lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^m = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \left(1 + \frac{1}{k}\right) = e.$$

▲

Definition 4.19. Inversen till exponentialfunktionen med e som bas kallas för den **naturliga logaritmfunktionen** och betecknas $x \mapsto \ln x$.

4.4 Standardgränsvärden vid ∞

Nästa sats säger oss att exponentiell tillväxt är snabbare än polynomiell tillväxt och fakultet växer snabbare än exponentiell tillväxt.

Sats 4.20. *Låt $a > 1$ och $b \in \mathbb{R}$. Då gäller att*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^b} = \infty, \tag{4.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{b^n} = \infty. \tag{4.2}$$

BEVIS: Vi börjar med att visa (4.1). I fallet då $b \leqslant 0$ inser vi att resultatet följer. Så, antag att $b > 0$. Eftersom $a > 1$ så gäller att $a^{1/b} > 1$. Vi låter $a^{1/b} = 1 + p$, där $p > 0$. Vi har att

$$\frac{a^n}{n^b} = \left(\frac{a^{n/b}}{n}\right)^b = \left(\frac{(1+p)^n}{n}\right)^b.$$

Det räcker nu att visa att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+p)^n}{n} = \infty.$$

Med hjälp av binomialsatsen (se sats 4.14), där vi endast kommer att utnyttja en term, får vi

$$\frac{(1+p)^n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k \geqslant \frac{1}{n}\binom{n}{2}p^2 = \frac{n(n-1)p^2}{2n} = \frac{(n-1)p^2}{2} \to \infty,$$

då $n \to \infty$.

Låt oss nu visa (4.2). Bilda

$$c_n = \frac{n!}{b^n}.$$

Låt N vara sådant att $N > 2b$ och notera att

$$c_{n+1} = \frac{(n+1)!}{b^{n+1}} = \frac{(n+1)\cdot n!}{b \cdot b^n} = \frac{n+1}{b}c_n.$$

Vi har att

$$c_{N+j} = \frac{N+j}{b} \cdot \frac{N+j-1}{b} \cdots \frac{N+1}{b} c_N \geqslant 2^j c_N \to \infty,$$

då $j \to \infty$. ■

4.5 Bolzano-Weierstrass sats

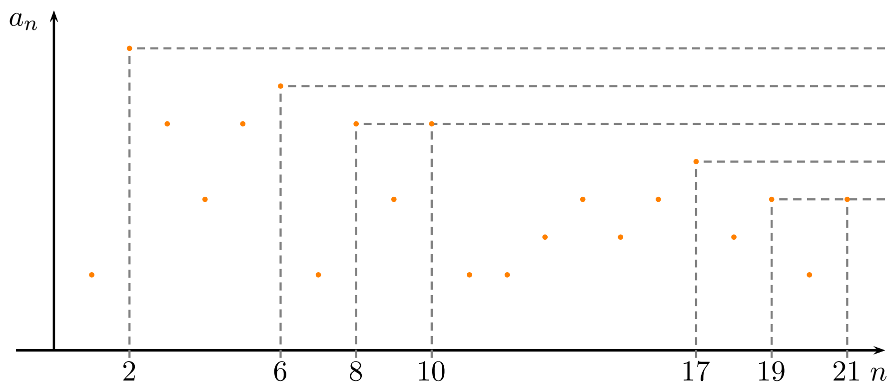
Låt $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en talföljd. Om vi endast studerar en del av talen a_n, men fortfarande oändligt många, och bildar en egen talföljd av dessa så sägs denna nya talföljd vara en **delföljd** av den ursprungliga talföljden. Den nya talföljden betecknas ofta $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, där $n_k \in \mathbb{N}$ är en strängt växande talföljd. Vi ger ett exempel för att klargöra notationen.

Exempel 4.21. Låt $a_n = 2n$. Talföljden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ges då av 2, 4, 6, 8, ... En delföljd till denna är när vi endast betraktar var femte tal, alltså 2, 12, 22, 32, ... Den nya talföljden betecknas $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, där $n_k = 5(k-1)+1$. D.v.s., för n_1 (då $k=1$) får vi $a_{n_1} = a_1 = 2$, för n_2 (då $k=2$) får vi $a_{n_2} = a_6 = 12$, o.s.v. ▲

Sats 4.22 (Bolzano-Weierstrass sats)**.** *Låt $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en begränsad talföljd. Då finns det en konvergent delföljd.*

BEVIS: Om vi lyckas visa att det finns en växande eller avtagande delföjd så vet vi från sats 4.7 att den kommer att vara konvergent.

Låt $A = \{n \colon a_n \geqslant a_m, \text{ för varje } m \geqslant n\}$. Mängen A beskriver alla index n_k av tal i $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sådana att alla resterande tal i följden är mindre eller lika med talet a_{n_k}.



I figuren ovan innehåller A indexen 2, 6, 8, 10, 17, 19, 21, $\ldots$.

Om antalet index n_k i A är oändligt många bildar $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ en avtagande delföljd. Vi är färdiga i detta fall.

Om antalet index i A är ändligt många och A inte är tomma mängden så finns det ett största index i A, låt oss kalla detta index för M. Nu kan vi välja vårt första tal i talföljden $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ till a_{M+1} eller a_1 i fallet att A var tomma mängden. Eftersom detta index är större än M så finns det större tal än a_{M+1} i talföljden $(a_n)_{n=M+1}^{\infty}$. Låt n_2 vara ett index sådant att $a_{n_2} > a_{M+1}$. Eftersom $n_2 \notin A$ så finns det ett index $n_3 > n_2$ sådant att $a_{n_3} > a_{n_2}$. Denna process leder till en växande talföljd $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ som är konvergent enligt sats 4.7.

■

Övning 4.2. Bevisa sats 4.5 c).

Övning 4.3. Visa att en konvergent talföljd är begränsad.

Övning 4.4. Bevisa sats 4.8. Ett tips är att först visa satsen för $p \geqslant 1$, därefter för $0 < p < 1$ och slutligen för $p < 0$.

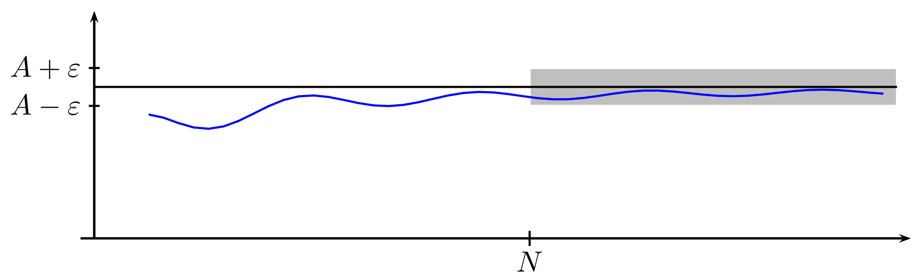
5 Gränsvärden av funktioner vid oändligheten

5.1 Definitionen och konvergens

Definition 5.1. Låt f vara en funktion definierad i (a, ∞) för något a. Vi säger att f **konvergerar** mot gränsvärdet A då x går mot ∞ om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett N sådant att $|f(x) - A| < \varepsilon$ för varje $x > N$. Vi skriver detta

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A.$$

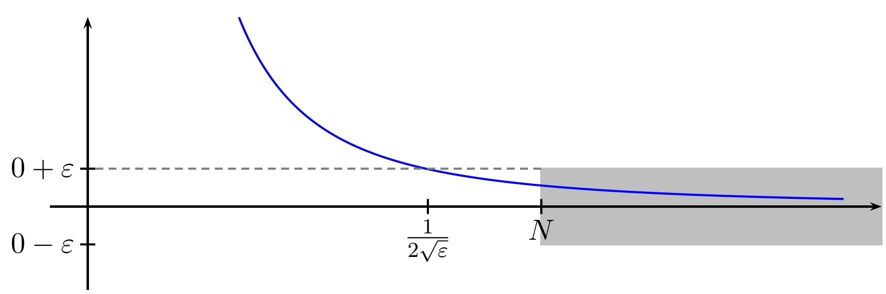
Alternativt skriver vi att $f(x) \to A$ då $x \to \infty$. Om inget sådant A existerar kallas f **divergent** då x går mot ∞.



Exempel 5.2. Visa att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{4x^2} = 0.$$

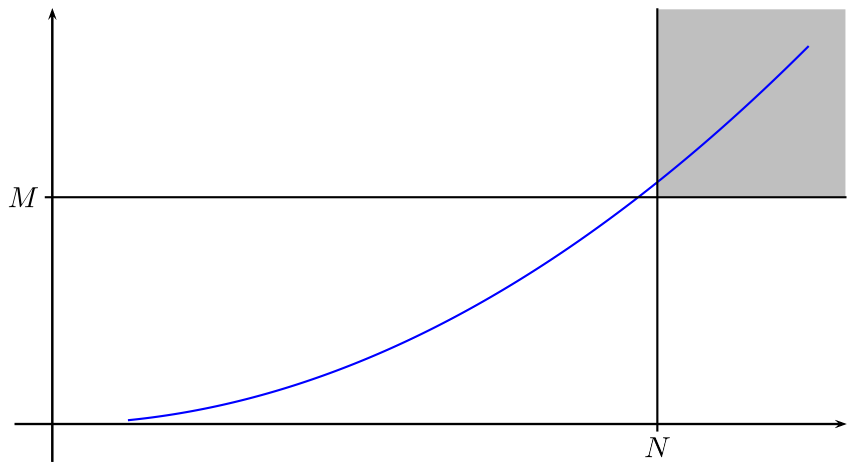
Låt $\varepsilon > 0$ vara givet. Vi vill visa att det finns ett N sådant att $|f(x) - 0| < \varepsilon$ för varje $x > N$. Vi har att $|f(x) - 0| < \varepsilon$ om och endast om $\frac{1}{4x^2} < \varepsilon$. Det senare gäller om och endast om $x > \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}$. Vi kan alltså välja N till något tal större än eller lika med $\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}$.



Observera att N är beroende av ε. Förändras ε så kan vi behöva byta värdet på N. Vi kan förtydliga detta genom att skriva $N = N(\varepsilon)$. ▲

Definition 5.3. Låt f vara en funktion definierad i (a, ∞) för något a. Vi säger att f har det **oegentliga gränsvärdet** ∞ då x går mot ∞ om det för varje M finns ett N sådant att $f(x) > M$ för varje $x > N$. Vi skriver detta

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$



På samma vis som ovan definierar vi gränsvärden och oegentliga gränsvärden mot $-\infty$.

Precis som för talföljder så gäller följande sats

Sats 5.4. *Låt f och g vara funktioner sådana att $f(x) \to A$ och $g(x) \to B$, då $x \to \infty$. Då följer att*

a) $f(x) + g(x) \to A + B$, *då* $x \to \infty$,

b) $f(x)g(x) \to AB$, *då* $x \to \infty$,

c) om $B \neq 0$ *så följer att* $f(x)/g(x) \to A/B$, *då* $x \to \infty$.

d) om $f(x) \leqslant g(x)$, *för alla* $x \in (a, \infty)$ *så gäller att* $A \leqslant B$.

Beviset för denna sats sammanfaller sånär som på notation beviset för sats 4.5. Det är lämnat till läsaren, som en övning i notation, att utföra dessa bevis. För c) gäller att a behöver väljas tillräckligt stort så att $g(x) \neq 0$, för varje $x \in (a, \infty)$.

Det är värt att notera att vi kan tillåta att $A = \infty$ och/eller $B = \infty$ med de formella räknereglerna:

$$\begin{aligned} &\infty \cdot \infty = \infty, \\ &\infty + \infty = \infty, \\ &x \cdot \infty = \infty, \quad \text{där } x > 0, \\ &x + \infty = \infty, \quad \text{där } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Observera dock att följande uttryck är odefinierade

$$\frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty.$$

5.2 Standardgränsvärden vid ∞

Sats 5.5. *Låt $a > 1$ och $b \in \mathbb{R}$ då gäller följande gränsvärden*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^b} = \infty, \tag{5.1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^b}{\log_a x} = \infty. \tag{5.2}$$

Bevis: Vi börjar med att visa (5.1) genom att överföra problemet på (4.1). Låt m vara ett heltal som uppfyller att $x - 1 < m \leqslant x$. Precis som i beviset av (4.1) så räcker det med att visa att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x} = \infty.$$

Vi har för $x \geqslant 1$ att

$$\frac{a^x}{x} \geqslant \frac{a^m}{2m} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^m}{m} \to \infty, \tag{5.3}$$

då $x \to \infty$, enligt (4.1).

För att visa (5.2) så låter vi $x = a^t$. Detta medför att $x \to \infty$ blir ekvivalent med att $t \to \infty$. Vi får alltså att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^b}{\log_a x} = \lim_{t\to\infty} \frac{a^{bt}}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{(a^b)^t}{t} = \infty, \tag{5.4}$$

enligt (5.1). ■

5.3 Övningar

Övning 5.1. Bevisa sats 5.4

Övning 5.2. Bestäm gränsvärdet av $x \mapsto x^{1/x}$, då $x \to \infty$.

6 Lokala gränsvärden

6.1 Definitionen och konvergens

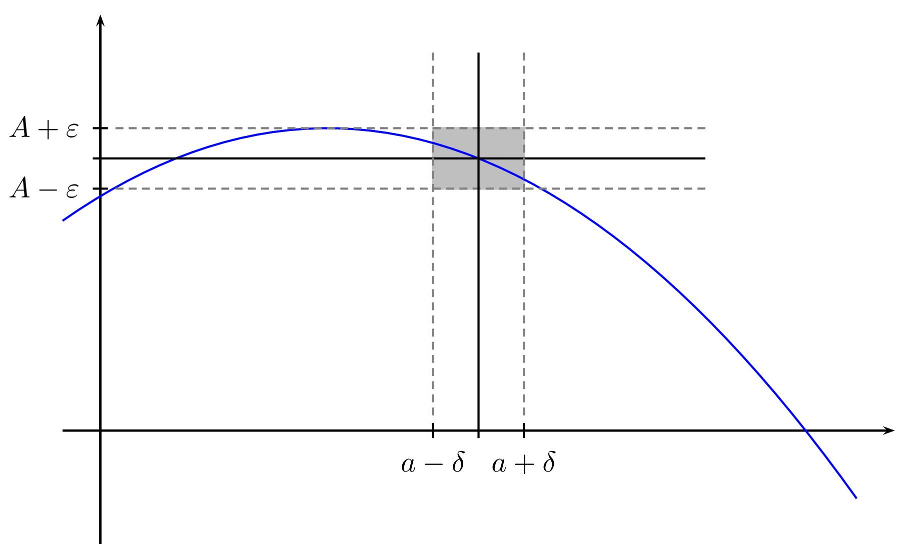
Definition 6.1. Låt f vara en funktion sådan att varje punkterad omgivning till $x = a$ innehåller punkter i D_f. Vi säger att f **konvergerar mot** A då x går mot a om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett δ sådant att $|f(x) - A| < \varepsilon$ för varje $x \in D_f$ som uppfyller att $0 < |x - a| < \delta$. Vi skriver detta

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

eller $f(x) \to A$, då $x \to a$.

Vänster- och **högergränsvärden** definieras genom att endast studera funktionsvärdena för $x < a$, respektive $x > a$. Vi använder då notationen $x \to a-$ för vänstergränsvärde och $x \to a+$ för högergränsvärde. För att ett gränsvärde ska existera måste vänster- och högergränsvärdena finnas och vara lika.

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = A$$



Exempel 6.2. Visa att

$$\lim_{x \to 3} x^2 = 9.$$

Låt $\varepsilon > 0$, vi vill finna ett δ sådant att $|x^2 - 9| < \varepsilon$, då $0 < |x - 3| < \delta$. Vi har att

$$|x^2 - 9| = |x + 3| \cdot |x - 3| \leqslant 20|x - 3| < 20\delta.$$

Vi vill att detta ska vara mindre än ε, dvs.

$$20\delta < \varepsilon,$$

vilket är ekvivalent med att

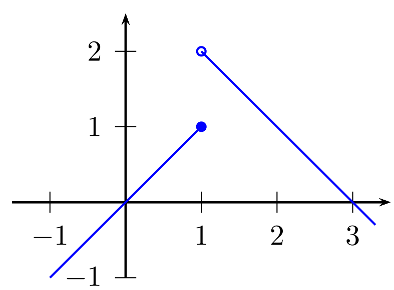
$$\delta < \frac{\varepsilon}{20}.$$

Vi väljer alltså δ till något tal mindre än $\varepsilon/20$. ▲

Exempel 6.3. Låt

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{om } x \leqslant 1 \\ 3 - x, & \text{om } x > 1 \end{cases}$$

Då $\lim_{x\to 1-} f(x) = 1$ och $\lim_{x\to 1+} f(x) = 2$ så existerar inte $\lim_{x\to 1} f(x)$. Grafen nedan illustrerar vad som händer.

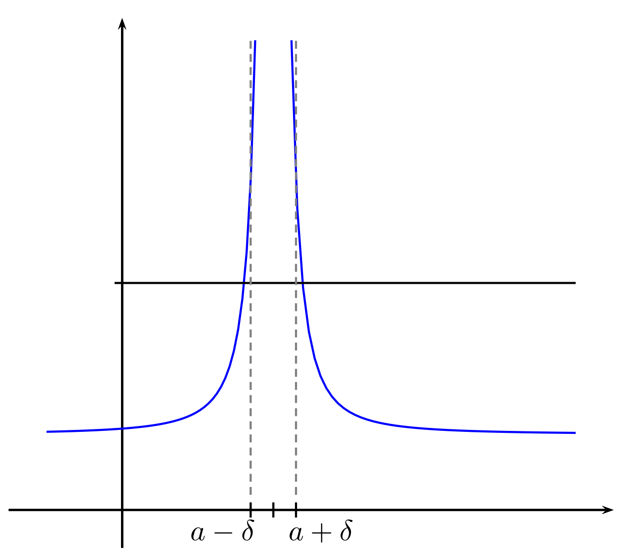


▲

Definition 6.4. Låt f vara en funktion sådan att varje punkterad omgivning till $x = a$ innehåller punkter i D_f. Vi säger att f har det **oegentliga gränsvärdet** ∞ då x går mot a om det för varje K finns ett δ sådant att $f(x) > K$ för varje $0 < |x - a| < \delta$. Vi skriver detta

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty.$$

Vi definierar oegentliga vänster- och högergränsvärden och mot $-\infty$ på ett analogt vis.



Sats 6.5. *Låt f och g vara funktioner sådana att $f(x) \to A$ och $g(x) \to B$, då $x \to a$. Då följer att*

a) $f(x) + g(x) \to A + B$, *då* $x \to a$,

b) $f(x)g(x) \to AB$, *då* $x \to a$,

c) om $B \neq 0$ *så följer att* $f(x)/g(x) \to A/B$, *då* $x \to a$,

d) om $f(x) \leqslant g(x)$ *för varje* x *i en omgivning av* a *så följer att* $A \leqslant B$.

Beviset för denna sats sammanfaller sånär som på notation beviset för sats 4.5. Det är lämnat till läsaren, som en övning i notation, att utföra dessa bevis.

Exempel 6.6. Visa att

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x}{|x|}$$

inte existerar.

Lösningen är att studera höger- respektive vänstergränsvärde separat. Vi börjar med högergränsvärdet. Vi får

$$\lim_{x \to 0+} \frac{x^2 + x}{|x|} = \lim_{x \to 0+} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \to 0+} (x + 1) = 1.$$

Vänstergränsvärdet blir

$$\lim_{x \to 0-} \frac{x^2 + x}{|x|} = \lim_{x \to 0-} \frac{x^2 + x}{-x} = \lim_{x \to 0-} (-x - 1) = -1.$$

Då höger- och vänstergränsvärdet inte sammanfaller finns inte gränsvärdet.

▲

6.2 Övningar

Övning 6.1. Bevisa sats 6.5.

Övning 6.2. Låt $a > 0$. Visa, t.ex. genom variabelbytet $x = 1/t$, att

$$\lim_{x \to 0+} x^a \ln x = 0.$$

Övning 6.3. Bestäm konstanterna a och b så att $\lim_{x \to 0} f(x) = 3$ och $\lim_{x \to \infty} f(x) = \pi$ där

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{x} + a \arctan x + b.$$

7 Kontinuitet

7.1 Definitionen och exempel

Definition 7.1. Låt f vara en funktion sådan att varje punkterad omgivning till $x = a$ innehåller punkter i D_f och att $a \in D_f$. Vi säger att f är **kontinuerlig** i a om

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Om f är kontinuerlig i alla punkter i sin definitionsmängd sägs f vara **kontinuerlig**.

Det är värt att notera att om x sätts till $a + h$ i definitionen ovan så får vi en alternativt sätt att uttrycka kontinuitetsvillkoret. Vi har då att f är kontinuerlig i a om

$$\lim_{h \to 0} f(a + h) = f(a) \tag{7.1}$$

eller f är kontinuerlig om det för varje $x \in D_f$ gäller att

$$\lim_{h \to 0} f(x + h) = f(x). \tag{7.2}$$

Att en funktion f är kontinuerlig i $a \in D_f$ betyder att vänstergränsvärdet, högergränsvärdet och funktionsvärdet i a sammanfaller. Detta visar även att det finns en omgivning till a där funktionen är begränsad, vilket vi kommer att utnyttja i sats 7.7.

Kontinuitet förknippas ofta med följande räkneregel:

Sats 7.2. *Låt f vara kontinuerlig i punkten b och låt $g(x) \to b$, då $x \to a$. Då gäller att*

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right).$$

Bevis: Högerledet kan skrivas som $f(b)$ eftersom $g(x) \to b$, då $x \to a$. Vi vill visa att vänsterledet är $f(b)$. Tag $\varepsilon > 0$. Vi vill visa att det finns ett δ sådant att $|f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon$ då $0 < |x - a| < \delta$. Då f är kontinuerlig i b så följer att det finns ett δ_1 sådant att $|f(y) - f(b)| < \varepsilon$, då $|y - b| < \delta_1$. Då $g(x) \to b$, då $x \to a$ så följer att vi kan välja ett δ så att $|g(x) - b| < \delta_1$, då $0 < |x - a| < \delta$. Vilket visar satsen.

■

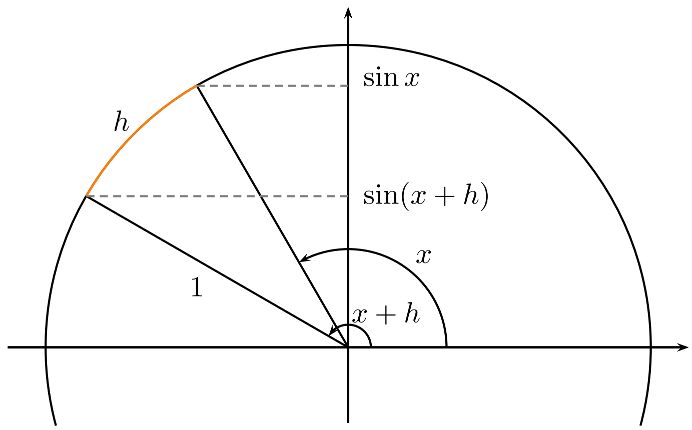
Kommentar 7.3. Vi kan även tillåta att $a = \infty$ i sats 7.2. Beviset blir då lite annorlunda och lämnas som en övning åt läsaren.

Följdsats 7.4. *Låt f och g vara kontinuerliga funktioner. Då följer att sammansättningen $x \mapsto (f \circ g)(x) = f(g(x))$ är kontinuerlig.*

Bevis: Resultatet följer direkt av sats 7.2. ■

Sats 7.5. *Funktionerna $x \mapsto \sin x$ och $x \mapsto \cos x$ är kontinuerliga.*

Bevis: Vi använder (7.2) för att visa kontinuiteten. Vi vill visa att $\sin(x+h) - \sin x \to 0$ och $\cos(x+h) - \cos x \to 0$, då $h \to 0$. Studera bilden nedan (där vi har antagit att x och h är positiva)



Vi ser att det kortaste avståndet mellan punkterna $(\cos x, \sin x)$ och $(\cos(x+h), \sin(x+h))$ är från Pythagoras sats

$$\sqrt{(\cos(x+h) - \cos x)^2 + (\sin(x+h) - \sin x)^2} \leqslant h.$$

Att det kortaste avståndet är mindre än h följer av att h är längden av den bågnade delen av enhetscirkeln mellan de aktuella punkterna. I fallet att $h < 0$ blir olikheten

$$\sqrt{(\cos(x+h) - \cos x)^2 + (\sin(x+h) - \sin x)^2} \leqslant |h|. \tag{7.3}$$

Vi har att

$$\begin{aligned}
|\sin(x+h) - \sin x| &= \sqrt{(\sin(x+h) - \sin x)^2} \\
&\leqslant \sqrt{(\cos(x+h) - \cos x)^2 + (\sin(x+h) - \sin x)^2} \\
&\leqslant |h| \to 0,
\end{aligned}$$

då $h \to 0$. Vi har visat att $x \mapsto \sin x$ är kontinuerlig. Räkningen för att visa $x \mapsto \cos x$ är kontinuerlig är analogt från (7.3). ■

7.2 Satser om kontinuerliga funktioner

Sats 7.6. *Låt $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion. Då är f begränsad.*

Bevis: Låt oss visa att f är uppåt begränsad med hjälp av ett motsägelsebevis. Antag därför att f är uppåt obegränsad. Då gäller att för varje heltal k så finns ett x_k sådant att

$$f(x_k) > k. \tag{7.4}$$

Vi har nu en talföljd $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ med $x_n \in [a,b]$, för varje n. Alltså är talföljden begränsad och enligt Bolzano-Weierstrass sats (se 4.22) så finns det en konvergent delföljd $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$. Låt oss beteckna gränsvärdet med x, alltså $x_{n_k} \to x$, då $k \to \infty$. Eftersom $x \in [a,b]$ och f är kontinuerlig i x så har vi att $f(x_{n_k}) \to f(x)$, då $k \to \infty$. Men från (7.4) gäller att

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \infty.$$

Vi har en motsägelse.

På liknande sätt kan vi visa att f är nedåt begränsad. ∎

Sats 7.7. *Summan och produkten av kontinuerliga funktioner är kontinuerlig.*

Bevis: Detta är en direkt följd av sats 6.5 a) och b). ∎

Följdsats 7.8. *Polynom är kontinuerliga funktioner.*

Bevis: Eftersom polynom är summor och produkter av räta linjer av typen $y = kx + m$ så räcker det enligt sats 7.7 att konstatera att dessa linjer är kontinuerliga. ∎

Exempel 7.9. Polynomet $f(x) = 2x^4 - x + 3 = (2x) \cdot x \cdot x \cdot x + (-x + 3)$ och kan med andra ord beskrivas som summor och produkter av de räta linjerna $2x$, x och $-x + 3$. ▲

Exempel 7.10. Låt $a \in \mathbb{R}$. Visa att funktionen $f : (0, \infty)$ sådan att $f(x) = x^a$ är kontinuerlig.

Lösning: Observera att

$$x^a = e^{\ln x^a} = e^{a \ln x}.$$

Det senare är en sammansättning av de kontinuerliga funktionerna $x \mapsto \ln x$, $x \mapsto ax$ och $x \mapsto e^x$. Alltså är x^a kontinuerlig. ▲

Exempel 7.11. Bestäm

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Lösning: Uttrycket kan skrivas om enligt följande

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n/x}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{1}{n/x}\right)^{n/x}\right)^x.$$

Eftersom funktionen $t \mapsto t^x$ enligt exempel 7.10 är kontinuerlig har vi identiteten

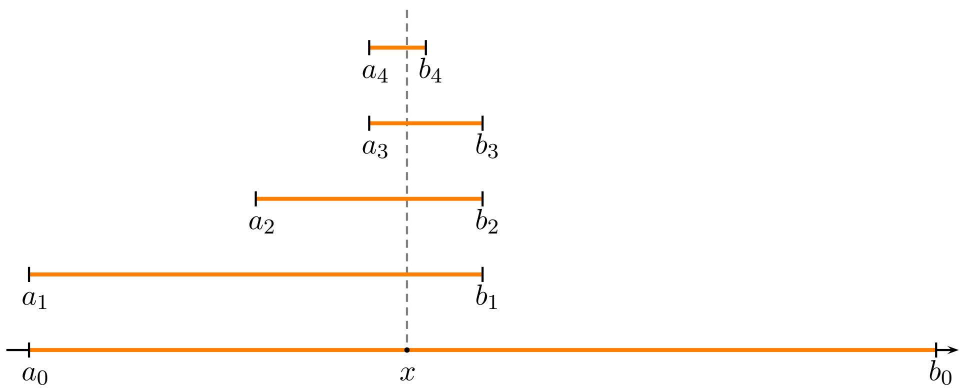
$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n/x}\right)^{n/x}\right)^x = \left(\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n/x}\right)^{n/x}\right)^x.$$

Med hjälp av variabelbytet $m = n/x$ och definition 4.16 eller exempel 4.18 får vi att

$$\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n/x}\right)^{n/x}\right)^x = \left(\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right)^x = e^x.$$

▲

Lemma 7.12 (Intervallhalvering)**.** *Låt $[a_j, b_j]$ vara intervall, för varje $j \in \mathbb{N}$, med egenskapen att givet $[a_j, b_j]$ så väljer vi $[a_{j+1}, b_{j+1}]$ genom att låta $a_{j+1} = a_j$ och b_{j+1} vara mittpunkten på $[a_j, b_j]$ eller genom att låta a_{j+1} vara mittpunkten på $[a_j, b_j]$ och $b_{j+1} = b_j$. Då gäller att det finns ett unikt element x sådant att $x \in [a_j, b_j]$, för varje $j \in \mathbb{N}$.*



Bevis: Talföljden $(a_j)_{j=0}^{\infty}$ är växande och uppåt begränsad av b_0. Enligt sats 4.7 konvergerar $(a_j)_{j=0}^{\infty}$, då $j \to \infty$. Även $(b_j)_{j=0}^{\infty}$ konvergerar eftersom den är avtagande och nedåt begränsad. Låt $a_j \to x_a$ och $b_j \to x_b$, då $j \to \infty$. Vi vill visa att $x_a = x_b$.

Låt oss utföra ett motsägelsebevis. Antag därför att $x_a \neq x_b$ och låt $d = |x_a - x_b|$ beskriva avståndet mellan de båda gränsvärdena. Vi vet att

$$b_j - a_j = \frac{b_0 - a_0}{2^j} \to 0,$$

då $j \to \infty$. Låt $\varepsilon = d/4$, då finns det ett N sådant att $|a_j - x_a| < \varepsilon$, $|b_j - x_b| < \varepsilon$ och $|b_j - a_j| < \varepsilon$, för varje $j > N$. Triangelolikheten 3.19 ger nu att för $j > N$ har vi

$$\begin{aligned}|x_b - x_a| &= |x_b - b_j + b_j - a_j + a_j - x_a| \\ &\leqslant |x_b - b_j| + |b_j - a_j| + |a_j - x_a| \\ &< 3\varepsilon < d.\end{aligned}$$

Detta motsäger att $d = |x_a - x_b|$. Alltså måste $x_a = x_b$. ■

Lemma 7.13. *Låt f vara kontinuerlig i punkten a och $f(a) > \mu$, för något $\mu \in \mathbb{R}$. Då finns en omgivning I kring a sådant att $f(x) > \mu$ för alla $x \in I$.*

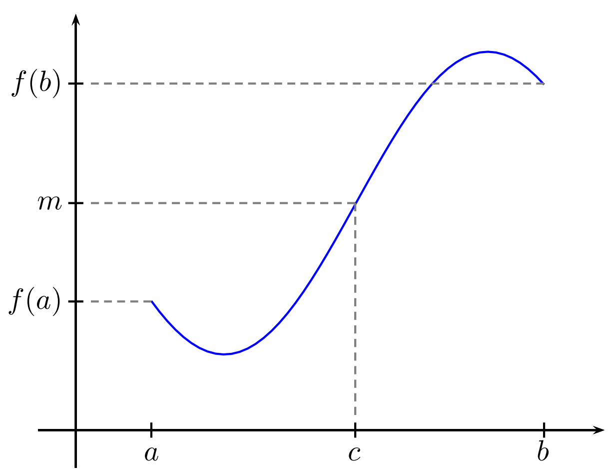
BEVIS: Tag $\varepsilon > 0$ sådant att $f(a) - \mu > \varepsilon$, vilket är ekvivalent med att $f(a) - \varepsilon > \mu$. Då f är kontinuerlig i a gäller att

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

som i sin tur betyder att vi kan finna ett $\delta > 0$ sådant att $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ då $|x - a| < \delta$. Att $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ betyder att $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$, vilket ger att $\mu < f(a) - \varepsilon < f(x)$ för alla $x \in I := \{x\colon |x - a| < \delta\}$. ■

Sats 7.14 (Satsen om mellanliggande värde)**.** *Låt f vara kontinuerlig och låt $[a, b] \subseteq D_f$. Då antar f alla värden mellan $f(a)$ och $f(b)$.*

Kommentar 7.15. Satsen säger att om $f(a) \leqslant m \leqslant f(b)$ (eller $f(b) \leqslant m \leqslant f(a)$) så finns det ett $c \in [a, b]$ sådant att $f(c) = m$. Observera att beviset för denna sats beskriver en algoritm som enkelt kan implementeras i något programspråk. Det teoretiska existensresonemanget måste i verkliga situationer verifieras innan algoritmen körs eftersom algoritmen kan svara med värden även i fallet då det saknas lösning.



BEVIS: Antag att $f(a) < m < f(b)$. Vi vill visa att det finns ett $x \in [a, b]$ sådant att $f(x) = m$. Låt oss nyttja intervallhalveringsmetoden, alltså lemma 7.12. Låt $a_0 = a$, $b_0 = b$ och c vara mittpunkten på intervallet $[a_0, b_0]$. Alltså,

$$c = a_0 + \frac{b_0 - a_0}{2}.$$

Om $f(c) > m$, så väljer vi $a_1 = a_0$ och $b_1 = c$, annars väljer vi $a_1 = c$ och $b_1 = b_0$. Vi upprepar nu denna algoritm och konstaterar från lemma 7.12 att det finns ett unikt element x som har egenskapen att $x \in [a_j, b_j]$, för varje $j \in \mathbb{N}$. Vi har att

$$f(a_j) \leqslant m \leqslant f(b_j),$$

för varje $j \in \mathbb{N}$. Om vi låter $j \to \infty$ och använder oss av 6.5 d) så får vi relationen $f(x) \leqslant m \leqslant f(x)$. Alltså är $f(x) = m$ och vi är klara. ■

Exempel 7.16. Har ekvationen $x^3 - 5x + 3 = 0$ någon lösning i intervallet $[-1, 1]$?

LÖSNING: Bilda funktionen $f(x) = x^3 - 5x + 3$. Eftersom f är kontinuerlig och $f(-1) = 7$ och $f(1) = -1$ så finns det enligt satsen om mellanliggande värde (se sats 7.14) ett $x_0 \in (-1, 1)$ sådant att $f(x_0) = 0$. Alltså har ekvationen någon lösning i intervallet $[-1, 1]$. ▲

Sats 7.17. *Låt $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion. Då har f ett max- och minvärde.*

Kommentar 7.18. Satsen säger att det finns en punkt $x_0 \in [a, b]$ sådan att $f(x) \leqslant f(x_0)$, för alla $x \in [a, b]$ och analogt för minvärdet.

BEVIS: Låt oss visa att f antar sitt maxvärde. Fallet med minvärde är analogt. Eftersom f är kontinuerlig är f från sats 7.6 begränsad. Alltså är värdemängden till f en delmängd av $[A_0, B_0]$ för något A_0 och B_0. Vi ska nu använda intervallhalveringsmetoden i vårt resonemang. Låt oss dela intervallet mitt itu, så vi får $[A_0, C]$ och $[C, B_0]$, där C är mittpunkten i intervallet $[A_0, B_0]$. Om $f(x) \geqslant C$, för något $x \in [a, b]$, så väljer vi som $[A_1, B_1]$ intervallet $[M, B_0]$, annars $[A_0, M]$. Vi återupprepar denna algoritm och får att det finns ett $x_j \in [a, b]$ sådant att $A_j \leqslant f(x_j) \leqslant B_j$. Enligt lemma 7.12 så finns det även ett element V sådant att $V \in [A_j, B_j]$, för varje $j \in \mathbb{N}$. För varje j. Vi får alltså att

$$\lim_{j \to \infty} f(x_j) = V.$$

Det återstår att visa att det finns ett $x \in [a, b]$ sådant att $f(x) = V$, d.v.s. att den övre begränsningen antas. Eftersom $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ är en begränsad talföljd så finns det från Bolzano-Weierstrass sats (se 4.22) en konvergent delföljd $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ med gränsvärde x. Vi har då f är kontinuerlig

$$f(x) = f\left(\lim_{k \to \infty} x_{n_k}\right) = \lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = V.$$

■

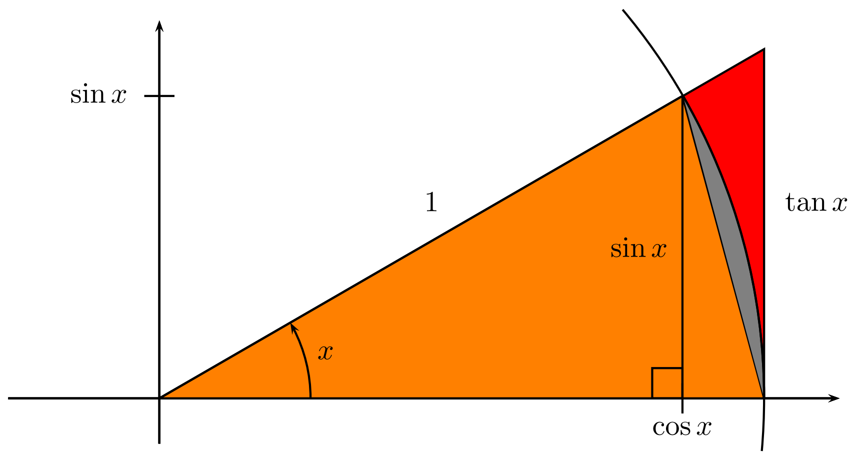
7.3 Lokala standardgränsvärden

Hjälpsats 7.19. *Olikheten*

$$|\sin x| \leqslant |x| \leqslant |\tan x|, \tag{7.5}$$

gäller för alla $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

BEVIS: Antag först att $x \in [0, \pi/2)$. Vi vill då visa att $\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$. Låt oss studera tre areor enligt figuren



Den minsta arean är den vi får från triangeln som har höjden $\sin x$ och bredden ett. Den mittersta arean får vi från cirkelsektorn med vinkeln x och den största arean får vi från den triangel som har höjden $\tan x$ och bredden ett. Areornas relationer är

$$\frac{\sin x}{2} \leqslant \frac{x}{2\pi}\pi \leqslant \frac{\tan x}{2}$$

eller enklare

$$\sin x \leqslant x \leqslant \tan x.$$

Antag nu att $x \in (-\pi/2, 0)$. Då är $-x \in (0, \pi/2)$ och från den bevisade delen av satsen har vi att

$$\sin(-x) \leqslant -x \leqslant \tan(-x),$$

eller

$$-\sin x \leqslant -x \leqslant -\tan x.$$

Då $x \in (-\pi/2, 0)$ är $-\sin x = |\sin x|$, $-x = |x|$ och $-\tan x = |\tan x|$. Därmed följer att

$$|\sin x| \leqslant |x| \leqslant |\tan x|$$

även gäller då $x \in (-\pi/2, 0)$. ■

Sats 7.20 (Lokala standardgränsvärden)**.** *Följande gränsvärden gäller*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \tag{7.6}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \tag{7.7}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{7.8}$$

Bevis:

Bevis av (7.6): Vi börjar med att skriva om uttrycket enligt

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{x}\ln(1+x) = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Låt oss utföra variabelbytet $s = 1/x$. Gränsvärdet $x \to 0$ kommer att sammanfalla med $s \to \pm\infty$ (obs två gränsvärden!). Då vi vet att logaritmfunktionen är kontinuerlig, får vi att

$$\lim_{s\to\pm\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{s}\right)^s\right) = \ln\left(\lim_{s\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{s}\right)^s\right) = \ln e = 1.$$

Bevis av (7.7): Låt oss direkt utföra variabelbytet $e^x - 1 = s$, vilket ger $x = \ln(1+s)$

$$\frac{e^x-1}{x} = \frac{s}{\ln(1+s)} \to 1, \text{ då } s \to 0 \text{ (vilket är detsamma som } x \to 0).$$

Bevis av (7.8): Enligt sats 7.19 har vi relationen

$$|\sin x| \leqslant |x| \leqslant |\tan x|, \tag{7.9}$$

för alla x i en liten omgivning av 0. Låt oss dividera med $|x|$. Vi får att

$$\frac{|\sin x|}{|x|} \leqslant 1 \leqslant \frac{|\sin x|}{|x|}\frac{1}{\cos x}. \tag{7.10}$$

Sats 6.5 d) ger att relationen kvarstår efter att vi låtit $x \to \infty$. Alltså

$$\lim_{x\to 0}\frac{|\sin x|}{|x|} \leqslant 1 \leqslant \lim_{x\to 0}\frac{|\sin x|}{|x|}\frac{1}{\cos x}. \tag{7.11}$$

I den sista identiteten kan vi använda sats 6.5 b) som ger

$$\lim_{x\to 0}\frac{|\sin x|}{|x|} \leqslant 1 \leqslant \lim_{x\to 0}\frac{|\sin x|}{|x|}. \tag{7.12}$$

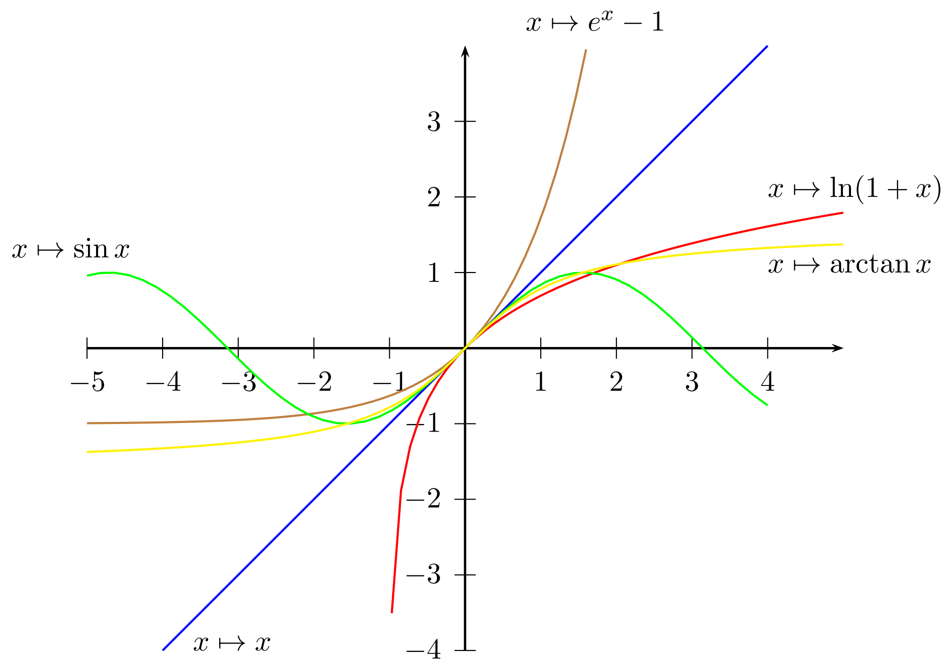
Alltså har vi

$$\lim_{x\to 0}\frac{|\sin x|}{|x|} = 1. \tag{7.13}$$

Observera till sist att

$$\frac{\sin x}{x} > 0,$$

för alla $x \neq 0$ sådana att $|x| < \pi/2$. Detta ger önskad likhet. ■



Figur 7.1: De lokala standardgränsvärdena säger att kvoten av två av dessa funktioner går mot ett då x går mot noll.

Exempel 7.21. Bestäm

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{\tan 5x}.$$

Lösningen är att utnyttja standardgränsvärden. Vi får

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{\tan 5x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{\ln(1+2x)}{2x} \cdot \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \cos 5x \right).$$

Den andra och den tredje faktorn är standardgränsvärden och går båda mot ett enligt sats 7.20. Vi utnyttjar nu sats 6.5 b) för kunna utföra dessa gränsvärden var för sig. Vi får att

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{\ln(1+2x)}{2x} \cdot \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \cos 5x \right) = \frac{2}{5} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{2}{5}.$$

▲

7.4 Övningar

Övning 7.1. Visa att sats 7.2 gäller även för $a = \infty$, d.v.s. låt $f(x)$ vara kontinuerlig i punkten b och låt $g(x) \to b$, då $x \to \infty$. Då gäller att

$$\lim_{x\to\infty} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to\infty} g(x) \right).$$

Visa med hjälp av denna sats att

$$\lim_{x\to\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x} = 2.$$

Övning 7.2. Bestäm konstanten k så att funktionen

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+kx)}{x}, & x \neq 0 \\ 3, & x = 0 \end{cases}$$

blir kontinuerlig i origo.

Övning 7.3. En parkeringsmätare tar betalt enligt följande: den första påbörjade timmen kostar 4 kronor och därefter kostar det 2 kronor för varje ytterligare påbörjad timme, upp till det maximala dygnsbeloppet 10 kronor. Låt $h(t)$ vara parkeringskostnaden som funktion av tiden t timmar. Skissa funktionsgrafen $y = h(t)$ för $0 \leq t \leq 24$. Är h en kontinuerlig funktion?

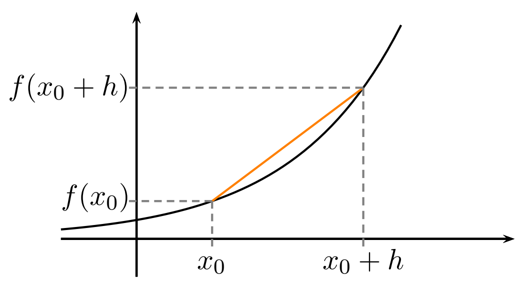
8 Derivata

8.1 Definitionen

Definition 8.1. Låt f vara en funktion definierad i en omgivning av x_0. Vi säger att f är **deriverbar** i punkten x_0 om

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \tag{8.1}$$

existerar. Värdet $f'(x_0)$ kallas **derivatan** av f i punkten x_0. Om f är deriverbar i varje punkt i sin definitionsmängd så kallas f **deriverbar** och funktionen f' med definitionsmängden $D_{f'} = D_f$ kallas för **derivatan** av f. Notationen f' kan även skrivas som $\frac{d}{dx}f$ eller $\frac{df}{dx}$.



Det är värt att notera att vi endast kan derivera en funktion i en punkt om funktionen är definierad i en omgivning av punkten. Alltså kan vi inte derivera funktioner i ändpunkter av intervall.

8.2 Derivatan av elementära funktioner

Exempel 8.2. Derivera funktionen $f(x) = e^x$.

LÖSNING: Enligt definitionen och (7.7) är

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} = e^x \left(\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} \right) = e^x.$$

Alltså är f deriverbar med derivatan $f'(x) = e^x$. ▲

Exempel 8.3. Derivera funktionen $f\colon \{x \in \mathbb{R}\colon x \neq 0\} \to \mathbb{R}$ sådan att $f(x) = \ln|x|$.

LÖSNING: Låt först $x > 0$. Vi får enligt definitionen och (7.6) att

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1 + h/x)}{h} = \frac{1}{x} \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h/x)}{h/x} = \frac{1}{x}.$$

Låt nu $x < 0$. Vi får för tillräckligt små h, sådana att $x + h < 0$ att

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(-(x+h)) - \ln(-x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h/x)}{h} = \frac{1}{x}.$$

Alltså är f deriverbar med derivatan $f'(x) = 1/x$. ▲

Exempel 8.4. Derivera funktionen $f(x) = \sin x$.

LÖSNING: Enligt definitionen och (7.8) är

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \sin x \left(\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x \left(\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \right) \\ &= \sin x \left(\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x. \end{aligned}$$

Låt oss närmare studera uttrycket

$$\frac{\cos h - 1}{h} = \frac{1 - \sin^2(h/2) - 1}{h} = -\frac{\sin^2(h/2)}{h} = -\frac{1}{2} \frac{\sin(h/2)}{h/2} \sin(h/2) \to 0,$$

då $h \to 0$, ty

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} = 1$$

och

$$\lim_{h\to 0} \sin(h/2) = 0.$$

Alltså är f deriverbar med derivatan $f'(x) = \cos x$. ▲

Läsaren kan själv verifiera att $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$.

Sats 8.5. *Låt funktionen f vara deriverbar i intervallet (a, b). Då är f kontinuerlig i (a, b).*

BEVIS: Antag att f är deriverbar i punkten $x \in (a, b)$, d.v.s. gränsvärdet

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existerar. Vi vill visa att f är kontinuerlig i x, d.v.s. att $f(x+h) - f(x) \to 0$, då $h \to 0$. Vi har att

$$\lim_{h\to 0} (f(x+h) - f(x)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot h = f'(x) \cdot \lim_{h\to 0} h = 0.$$

Vi är klara. ■

8.3 Derivationsregler

Sats 8.6. *Låt f och g vara deriverbara funktioner i punkten x. Då följer att $f + g$ och fg är deriverbara i punkten x. Derivatorna har följande samband*

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) \tag{8.2}$$

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{8.3}$$

Om dessutom $g(x) \neq 0$ så följer att f/g är deriverbar i punkten x och

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \tag{8.4}$$

Bevis: Om vi visar sambanden (8.2), (8.3) och (8.4) så följer att $f + g$, fg och f/g är deriverbara i punkten x, (eftersom högerleden existerar från förutsättningarna i satsen).

Låt oss visa att $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$. Vi har

$$\begin{aligned}
\frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} &= \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} \\
&= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&\to f'(x) + g'(x),
\end{aligned}$$

då $h \to 0$.

Låt oss visa produktregeln (8.3).

$$\begin{aligned}
&\frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} \\
&\quad = \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&\quad = \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\
&\quad = \frac{f(x+h)(g(x+h) - g(x))}{h} + \frac{(f(x+h) - f(x))g(x)}{h} \\
&\quad = f(x+h)\frac{(g(x+h) - g(x))}{h} + \frac{(f(x+h) - f(x))}{h}g(x) \\
&\quad \to f(x)g'(x) + f'(x)g(x),
\end{aligned}$$

då $h \to 0$. Det sista steget följer av sats 6.5 a) och b).

För att visa (8.4) skriver vi f/g som $f \cdot 1/g$. Om vi vet hur vi deriverar $1/g$ så kommer resultatet att följa från produktregeln (8.3).

Låt oss derivera $1/g$. Antag att $g(x) \neq 0$. Eftersom g är deriverbar i punkten x är g enligt sats 8.5 kontinuerlig i punkten x och därmed är g enligt lemma 7.13 skild från noll i någon omgivning av punkten x. Antag att $|h|$ är så litet i räkningen nedan så att $x + h$ tillhör denna omgivning och därmed är $g(x+h) \neq 0$. Vi har

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} &= \frac{g(x) - g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} \\
&= -\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot \frac{1}{g(x+h)g(x)} \\
&\to -\frac{g'(x)}{g(x)^2},
\end{aligned}$$

då $h \to 0$. Det sista steget följer av sats 6.5 b). Alltså har vi att

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{g(x)}\right) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}.$$

Från produktregeln (8.3) får vi

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right) &= f(x)\left(-\frac{g'(x)}{g(x)^2}\right) + f'(x)\frac{1}{g(x)}\\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.\end{aligned}$$

Vi är klara.

■

Exempel 8.7. Derivera funktionen $h(x) = e^x \ln x$.

Lösning: Vi använder (8.2) med $f(x) = e^x$ och $g(x) = \ln x$ och får att

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = e^x \ln x + e^x \frac{1}{x}$$

▲

Exempel 8.8. Derivera funktionen $h(x) = \tan x$.

Lösning: Enligt (8.4)

$$h'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Alltså är $h'(x) = 1/\cos^2 x$. ▲

Sats 8.9 (Kedjeregeln)**.** *Antag att f är deriverbar i punkten y, g deriverbar i punkten x och $y = g(x)$. Då är $f \circ g$ deriverbar i punkten x med derivatan*

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x). \tag{8.5}$$

Bevis: Eftersom f är deriverbar så vet vi att funktionen ρ definierad som

$$\rho(k) = \frac{f(y+k) - f(y)}{k} - f'(y), \tag{8.6}$$

uppfyller att $\rho(k) \to 0$, då $k \to 0$. Vi kommer att använda formeln

$$f(y+k) - f(y) = k(f'(y) + \rho(k)). \tag{8.7}$$

Låt $k(h) = g(x+h) - g(x)$ och studera förändringskvoten

$$\begin{aligned}\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} &= \frac{f(g(x) + g(x+h) - g(x)) - f(g(x))}{h} \\ &= \frac{f(g(x) + k(h)) - f(g(x))}{h} \\ &= \frac{(f'(g(x)) + \rho(k))k(h)}{h} \\ &= (f'(g(x)) + \rho(k))\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &\to f'(g(x))g'(x),\end{aligned}$$

då $h \to 0$ och därmed även $k = g(x+h) - g(x) \to 0$. ■

Exempel 8.10. Derivera funktionen $h(x) = \ln(\cos x)$.

LÖSNING: Funktionen h är en sammansättning av funktionerna $f(x) = \ln x$ och $g(x) = \cos x$, nämligen $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$. Kedjeregeln ger att

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) = \frac{1}{\cos x}(-\sin x) = -\tan x.$$

▲

Exempel 8.11. Derivera funktionen $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ sådan att $f(x) = x^a$, där $a \in \mathbb{R}$ och $a \neq 0$.

LÖSNING: Vi utför först omskrivningen

$$f(x) = x^a = e^{\ln x^a} = e^{a \ln x}$$

och använder oss av kedjeregeln och får att

$$f'(x) = e^{a \ln x} a \frac{1}{x} = a x^a \frac{1}{x} = a x^{a-1}.$$

Om $a \in \mathbb{Z}$ så kan f även definieras för negativa tal. För $x \in (-\infty, 0)$ så gäller att

$$f(x) = x^a = (-1)^a (-x)^a = (-1)^a e^{a \ln(-x)}$$

och därmed är

$$f'(x) = (-1)^a e^{a \ln(-x)} a \frac{1}{-x}(-1) = x^a a \frac{1}{x} = a x^{a-1}.$$

Slutligen har vi att om $a \geqslant 1$ är ett heltal är f även deriverbar i punkten 0. Vi har från definitionen att

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} h^{a-1} = \begin{cases} 0, & a \geqslant 2 \\ 1, & a = 1 \end{cases}$$

Vi observerar att även i detta fall kan vi beskriva derivatan med formeln

$$f'(x) = a x^{a-1}.$$

▲

Exempel 8.12. Derivera funktionen $h(x) = \sin^3 x^4$.

LÖSNING: Funktionen h är en sammansättning av de tre funktionerna $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = \sin x$ och $f_3(x) = x^4$. Vi har att $h(x) = (f_1 \circ f_2 \circ f_3)(x) = f_1(f_2(f_3(x)))$. Kedjeregeln kan nu appliceras på detta uttryck. Låt oss först skriva $g = f_2 \circ f_3$ och använda kedjeregeln i två omgångar. Vi får att

$$\begin{aligned} h'(x) &= f_1'(g(x))g'(x) = f_1'(f_2(f_3(x)))f_2'(f_3(x))f_3'(x) \\ &= 3(\sin(x^4))^2 \cos(x^4) 4x^3 = 12x^3 \sin^2(x^4) \cos(x^4). \end{aligned}$$

▲

Övning 8.1. Derivera följande funktioner

a) $x \mapsto \sin x \cos x^2$

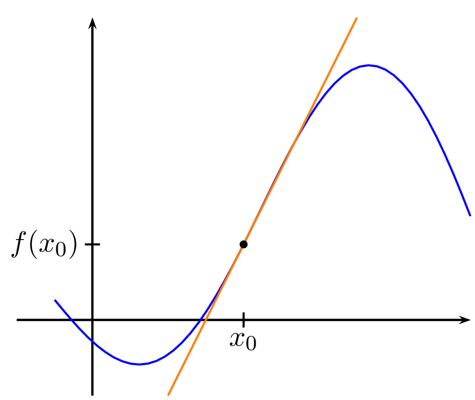
b) $x \mapsto e^{x \sin x}$

c) $x \mapsto x \ln x^2 + 4ax$, där $a \in \mathbb{R}$

d) $x \mapsto \cos x(\sin x)^{-1}$

8.4 Linjär approximation

Antag att vi vill studera en funktion f i en omgivning av en punkt x_0 och att vi vet värdena av $f(x_0)$ och $f'(x_0)$. Då kan vi approximera f i en omgivning av x_0 med hjälp av tangenten för f i punkten x_0.



Figur 8.1: Linjär approximation av f i punkten x_0.

Tangenten är en linje vars funktion är $T(x) = f'(x_0)x+m$. Eftersom $(x_0, f(x_0)$ är en punkt på linjen så är $f(x_0) = f'(x_0)x_0 + m$. Alltså blir tangentens funktion

$$T(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Exempel 8.13. Använd linjär approximation för att beräkna $\sqrt{4.01}\sin(0.01)$.

Lösning: Låt $f(x) = \sqrt{4+x}\sin x$. Enligt produktregeln (8.3) får vi

$$f'(x) = \frac{\sin x}{2\sqrt{4+x}} + \sqrt{4+x}\cdot\cos x.$$

Tangentlinjen för f i punkten $x = 0$ ges av

$$T(x) = f'(0)x + f(0) = 2x.$$

En approximation för $f(0.01)$ med hjälp av tangenten är alltså $T(0.01) = 0.02$.

▲

8.5 Derivatan av inversa funktioner

Exempel 8.14. Visa att

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Lösning: Eftersom arctan är inversen av tan så har vi identiteten

$$\tan(\arctan x) = x, \tag{8.8}$$

för alla $x \in \mathbb{R}$. För att beräkna derivatan av arctan så deriverar vi vänster- och högerledet. Vänsterledets derivata är från exempel 8.8 och sats 8.9 uttrycket

$$\frac{d}{dx}\left(\tan(\arctan x)\right) = \frac{1}{\cos^2(\arctan x)}\cdot\frac{d}{dx}(\arctan x) \tag{8.9}$$

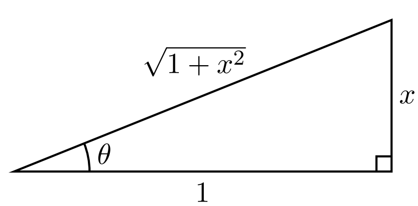
och högerledets derivata är 1. Eftersom vänster- och högerledet är en identitet så har de samma beroende av x. Alltså sammanfaller derivatorna, vi får

$$\frac{1}{\cos^2(\arctan x)}\cdot\frac{d}{dx}(\arctan x) = 1 \tag{8.10}$$

eller

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \cos^2(\arctan x). \tag{8.11}$$

Låt $\theta = \arctan x$. Talen θ och x har de samband som triangeln nedan visar



Hypotenusan har vi beräknat med hjälp av Pythagoras sats. Med hjälp av triangeln ser vi att

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Vi har alltså att

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \cos^2(\arctan x) = \cos^2\theta = \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2 = \frac{1}{1+x^2}.$$

Vi har visat att derivatan av $x \mapsto \arctan x$ är $x \mapsto 1/(1+x^2)$. ▲

Exempel 8.15. På liknande sätt som exempel 8.14 så kan man visa att

$$\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{8.12}$$

$$\frac{d}{dx}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{8.13}$$

Det är lämnat som en övning för läsaren att verifiera dessa derivator. ▲

Exempel 8.14 och 8.15 kan generaliseras till

Sats 8.16. *Låt f vara en deriverbar och inverterbar funktion. Då gäller att inversen f^{-1} är deriverbar i alla punkter $y = f(x)$, där $f'(x) \neq 0$, med derivatan*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}. \tag{8.14}$$

Bevis: Vi vill visa att

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)}{h} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Låt $x = f^{-1}(y)$ och k vara sådant att $x+k = f^{-1}(y+h)$. Alltså är $f(x+k) = y+h = f(x)+h$ och $h \to 0$ implicerar att $k \to 0$. Vi får

$$\frac{f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)}{h} = \frac{k}{f(x+k) - f(x)} \to \frac{1}{f'(x)},$$

då $k \to 0$. ■

Kommentar 8.17. Om vi visste att f^{-1} var deriverbar så kunde vi utgå ifrån identiteten $f(f^{-1}(y)) = y$, som gäller för varje $y \in D_{f^{-1}}$. Derivation med avseende på variabeln y ger enligt sats 8.9 att

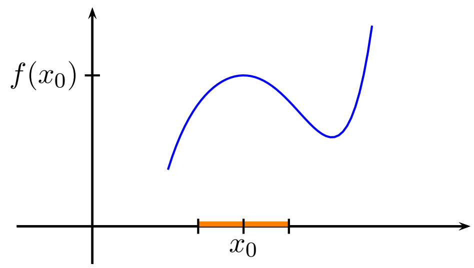
$$f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y) = 1. \tag{8.15}$$

Alltså har vi att

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(x)}. \tag{8.16}$$

8.6 Definitioner av lokala max- och minpunkter

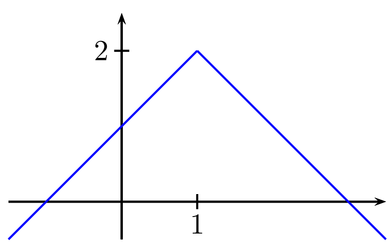
Definition 8.18. En funktion f sägs ha ett **lokalt maximum** i punkten $x_0 \in D_f$ om det finns en omgivning $I \subset D_f$ till x_0 sådan att $f(x) \leqslant f(x_0)$, för varje $x \in I$.



Figur 8.2: Exempelbild på ett lokalt minimum i x_0. Omgivningen I är här orangemarkerad.

Läsaren kan själv förverkliga en definition av hur ett **lokalt minimum** för en funktion definieras. En funktion som har ett lokalt maximum eller lokalt minimum i en punkt x_0 sägs ha en **lokal extrempunkt** i x_0.

Exempel 8.19. Låt $f(x) = 2 - |x-1|$. Då gäller att f har ett lokalt maximum i punkten 1. Ty, $f(1) = 2$ och $f(x) = 2 - |x-1| \leqslant 2$, för varje $x \in \mathbb{R}$. I detta fall kunde alltså omgivningen i definition 8.18 väljas till $\mathbb{R}$.



▲

Sats 8.20. *Låt f vara deriverbar i punkten x_0 och ha en lokal extrempunkt i x_0. Då gäller att $f'(x_0) = 0$.*

Bevis: Vi börjar med fallet att f har ett lokalt maximum i punkten x_0.

Eftersom f är deriverbar i punkten x_0 så är f definierad i en omgivning av x_0. Enligt definitionen av derivata vill vi studera gränsvärdet av

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

då $h \to 0$. Täljaren i detta uttryck är för små h alltid icke-positiv eftersom f har ett lokalt maximum i punkten x_0. Nämnaren kommer uppenbarligen vara positiv för positiva h och negativ för negativa h. Alltså har vi att

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geqslant 0,$$

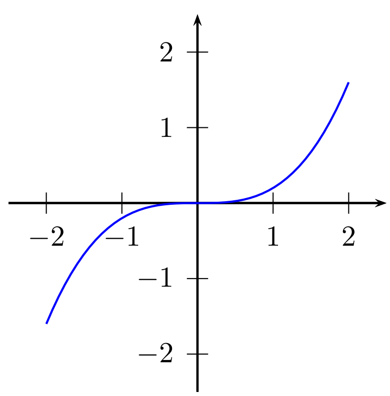
då $h < 0$ och

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leqslant 0,$$

då $h > 0$. Eftersom f är deriverbar i punkten x_0 så vet vi att detta gränsvärde existerar. Alltså måste $f'(x_0) = 0$.

Beviset i fallet att f har ett lokalt minimum i punkten x_0 är analogt och lämnas till läsaren att kontrollera. ■

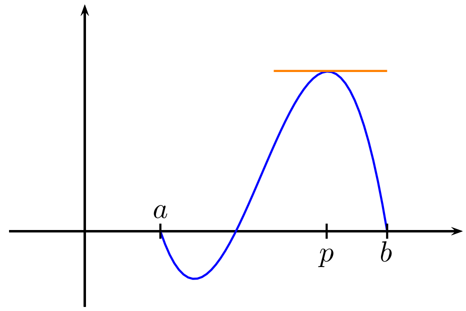
Vi kallar en punkt $x_0 \in D_f$ för en **stationär punkt** om $f'(x_0) = 0$. Omvändningen av sats 8.20 gäller inte, d.v.s. om x_0 är en stationär punkt till en funktion f, så har f nödvändigtvis inte ett lokalt extremvärde i punkten x_0. Funktionen $x \mapsto x^3$ har en stationär punkt i 0, men inte ett lokalt extremvärde i punkten 0.



Figur 8.3: Funktionen $x \mapsto x^3/5$ kring 0.

8.7 Medelvärdessatsen

Sats 8.21 (Rolles sats)**.** *Låt $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion som är deriverbar på (a,b) och låt $f(a) = f(b)$. Då gäller att det existerar ett punkt $p \in (a,b)$ sådan att $f'(p) = 0$.*



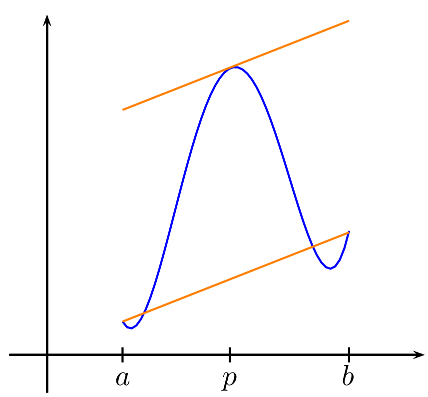
Bevis: Vi börjar med att inse att om $f(x) = 0$, för varje $x \in [a, b]$ så gäller att $f'(x) = 0$, för varje $x \in (a, b)$. Detta gör att punkten p kan väljas godtyckligt inom (a, b).

Antag nu att $f(x) > 0$, för något $x \in (a, b)$. Eftersom f är kontinuerlig på det slutna intervallet $[a, b]$ så antar f sitt maxvärde (se sats 7.17). Då $f(a) = f(b) = 0$ så gäller att maxvärdet antas i en inre punkt $q \in (a, b)$. Eftersom f är deriverbar i den punkt som ger maxvärdet så gäller enligt sats 8.20 att $f'(q) = 0$. Alltså kan p väljas till detta q.

Fallet då $f(x) < 0$ behandlas på ett analogt sätt. ∎

Sats 8.22 (Medelvärdessatsen)**.** *Låt f vara en deriverbar funktion. För varje intervall $[a, b] \subset D_f$ gäller att det existerar ett punkt $p \in (a, b)$ sådan att*

$$f'(p)(b - a) = f(b) - f(a). \tag{8.17}$$



Bevis: Låt oss skriva om problemet så att vi kan använda Rolles sats. Funktionen f går genom punkterna $(a, f(a))$ och $(b, f(b))$. Låt g vara den räta linjen som går genom dessa punkter. En enkel beräkning ger att g ges av

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + \frac{bf(a) - af(b))}{b - a}.$$

Om vi nu låter h vara differensen mellan f och g så är förutsättningarna för Rolles sats uppfyllda. Alltså, om $h(x) = f(x) - g(x)$ så gäller att $h(a) = h(b) = 0$ och h är deriverbar i intervallet (a, b) samt kontinuerlig i $[a, b]$. Alltså finns det en punkt $p \in (a,b)$ sådan att $h'(p) = 0$. För denna punkten gäller att $f'(p) - g'(p) = 0$. Alltså är

$$f'(p) = g'(p) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Vilket bevisar satsen. ■

Följdsats 8.23. *Låt f vara en deriverbar funktion på ett intervall $(a,b) \subseteq D_f$. Då gäller att*

a) $f'(x) = 0$, för varje $x \in (a,b)$ om och endast om f konstant på (a,b).

b) $f'(x) \geqslant 0$, för varje $x \in (a,b)$ om och endast om f är växande på (a,b).

c) $f'(x) > 0$, för varje $x \in (a,b)$ om och endast om f är strängt växande på (a,b).

d) $f'(x) \leqslant 0$, för varje $x \in (a,b)$ om och endast om f är avtagande på (a,b).

e) $f'(x) < 0$, för varje $x \in (a,b)$ om och endast om f är strängt avtagande på (a,b).

Bevis: Låt x_0 och x_1 vara två godtyckliga punkter i (a,b) sådana att $x_0 < x_1$.

Vi börjar med att visa a).

Antag först att $f'(x) = 0$, för varje $x \in (a,b)$. Vi vill visa att funktionsvärdena sammanfaller i dessa punkter, d.v.s. att $f(x_0) = f(x_1)$. Vi använder oss av medelvärdessatsen 8.22. Alltså finns det ett $c \in (x_0, x_1)$ sådant att

$$f(x_1) - f(x_0) = f'(c)(x_1 - x_0) = 0,$$

ty $f'(c) = 0$.

Antag nu att f är konstant. Vi vill visa att $f'(x) = 0$, för varje $x \in (a,b)$. Detta följer direkt från definitionen.

Låt oss nu visa b).

Antag först att $f'(x) \geqslant 0$, för varje $x \in (a,b)$. Vi vill visa att f är växande, d.v.s. att $f(x_0) \leqslant f(x_1)$. Vi använder oss av medelvärdessatsen 8.22. Alltså finns det ett $c \in (x_0, x_1)$ sådant att

$$f(x_1) - f(x_0) = f'(c)(x_1 - x_0) \geqslant 0,$$

ty $f'(c) \geqslant 0$ och $x_1 - x_0 > 0$ enligt antagande.

Antag nu det omvända, att f är växande på (a,b). Vi vill visa att $f'(x) \geqslant 0$, för varje $x \in (a,b)$. Från definitionen har vi att

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geqslant 0, \tag{8.18}$$

ty om $h > 0$ är $f(x+h) - f(x) \geqslant 0$ och om $h < 0$ är $f(x+h) - f(x) \leqslant 0$.

Bevisen av c) – e) följer på ett analogt vis. ■

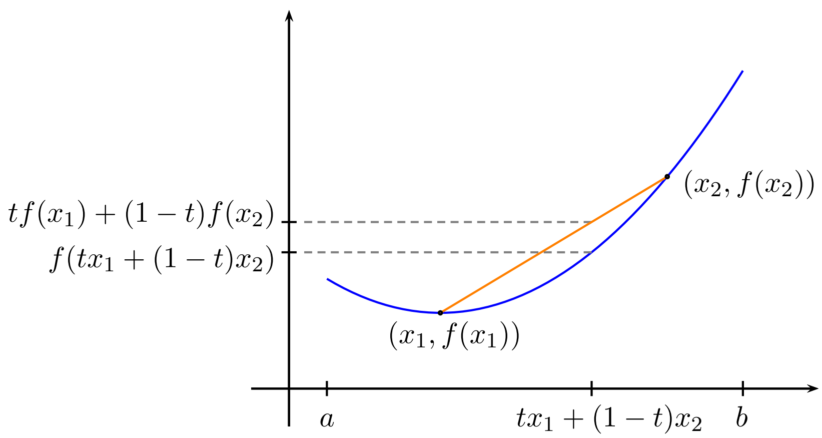
8.8 Konvexitet och konkavitet

Definition 8.24. En funktion f sägs vara **konvex** i intervallet $[a, b] \subseteq D_f$ om det för varje $x_1, x_2 \in [a, b]$ gäller att

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \tag{8.19}$$

för alla t sådana att $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Kommentar 8.25. En funktion f som är konvex på $[a, b]$ uppfyller att varje sekant från $(x_1, f(x_1))$ till $(x_2, f(x_2))$, med $x_1, x_2 \in [a, b]$, ligger ovanför eller sammanfaller med f.



Figur 8.4: En sekant är aldrig under en konvex funktion.

För att visa detta så tar vi fram den orangefärgade linjens funktion. Eftersom linjen passerar punkterna $(x_1, f(x_1))$ och $(x_2, f(x_2))$ så blir funktionen

$$L(x) = \frac{(f(x_2) - f(x_1))x + x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_2 - x_1}.$$

Om vi nu beräknar värdet i $x = tx_1 + (1-t)x_2$ får vi

$$L(tx_1 + (1-t)x_2) = tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

Alltså är sekanten ej under f i intervallet (x_1, x_2).

Exempel 8.26. Visa att funktionen $f(x) = 1 - |x|$ inte är konvex i intervallet $[-2, 2]$.

LÖSNING: Funktionen f är ej konvex ty för $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ och $t = 1/2$ får vi att vänsterledet är $f(0) = 1$ medan högerledet är

$$\frac{f(-1)}{2} + \frac{f(1)}{2} = 0.$$

▲

Exempel 8.27. Visa att funktionen $g(x) = x^2$ är konvex.

LÖSNING: Låt $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ och $0 \leqslant t \leqslant 1$. Vi vill visa att högerledet minus vänsterledet i (8.19) är icke-negativt. Alltså

$$\begin{aligned} tx_1^2 + (1-t)x_2^2 - &(tx_1 + (1-t)x_2)^2 \\ &= t(1-t)x_1^2 + t(1-t)x_2^2 - 2t(1-t)x_1x_2 \\ &= t(1-t)(x_1 - x_2)^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Detta ger att g är en konvex funktion. ▲

Sats 8.28. *Låt f vara deriverbar i intervallet $(a, b) \in D_f$. Då gäller att f är konvex i (a, b) om och endast om f' är växande i (a, b).*

BEVIS: Antag först att f' är växande i (a, b). Vi vill visa att f är konvex, d.v.s. att för varje $x_1, x_2 \in (a, b)$ gäller att

$$tf(x_1) + (1-t)f(x_2) - f(tx_1 + (1-t)x_2) \geqslant 0, \tag{8.20}$$

för varje $t \in [0, 1]$. Låt $c = tx_1 + (1-t)x_2$. Vi har att

$$\begin{aligned} tf(x_1) + (1-t)f(x_2) - f(c) &= tf(x_1) + (1-t)f(x_2) - (t + 1 - t)f(c) \\ &= t(f(x_1) - f(c)) + (1-t)(f(x_2) - f(c)) \end{aligned}$$

och från medelvärdessatsen 8.22 att

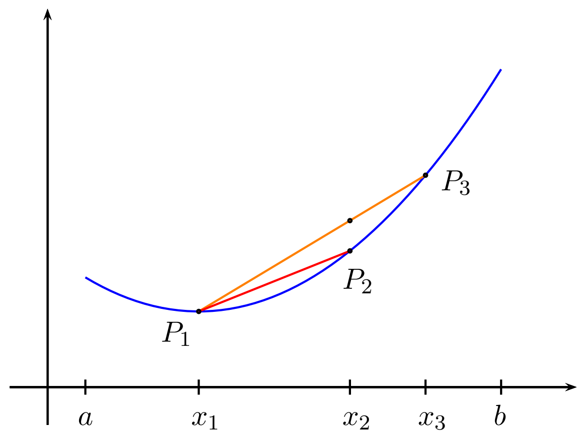
$$\begin{aligned} t(f(x_1) - f(c)) &+ (1-t)(f(x_2) - f(c)) \\ &= tf'(d_1)(x_1 - c) + (1-t)f'(d_2)(x_2 - c), \end{aligned}$$

där $d_1 \in (x_1, c)$ och $d_2 \in (c, x_2)$. Om vi nu använder oss av $c = tx_1 + (1-t)x_2$, så får vi att

$$\begin{aligned} tf'(d_1)(x_1 - c) + &(1-t)f'(d_2)(x_2 - c) \\ &= t(1-t)(f'(d_2) - f'(d_1))(x_2 - x_1) \geqslant 0, \end{aligned}$$

eftersom alla faktorerna är icke-negativa.

Antag nu att f är konvex. Vi vill visa att f' är växande, d.v.s. om $x_1 < x_2$ är $f'(x_1) \leqslant f'(x_2)$. Låt oss börja med att visa att för konvexa funktioner är sekanternas lutning växande. Vi illustrerar med en bild.



Figur 8.5: Relationen mellan olika sekanters lutning

Låt L_{12} och L_{13} vara räta linjer mellan punkterna P_1 och P_2 respektive P_1 och P_3. Antag att $x_1 < x_2 < x_3$. I kommentar 8.25 så visades att $f(x_2)$ är mindre än eller sammanfaller med $L_{13}(x_2)$. Alltså är lutningen på L_{12} mindre än lutningen på L_{13}. Om f dessutom är deriverbar och vi låter $x_2 \to x_1$ så får vi från sats 6.5 d) att

$$f'(x_1) \leqslant L'_{13}(x) = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}, \tag{8.21}$$

för varje $x \in (x_1, b)$. På samma vis kan vi visa att

$$L'_{13}(x) = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leqslant f'(x_3), \tag{8.22}$$

för varje $x \in (a, x_3)$. Alltså är $f'(x_1) \leqslant f'(x_3)$ och vi är klara. ■

Följdsats 8.29. *Låt f vara två gånger deriverbar i intervallet $(a, b) \in D_f$. Då gäller att $f''(x) \geqslant 0$, för varje $x \in (a, b)$ om och endast om f är konvex.*

Bevis: Från sats 8.23 b) har vi att $f''(x) \geqslant 0$, för varje $x \in [a, b]$ om och endast om f' är växande. Från sats 8.28 har vi att f' är växande om och endast om f är konvex. ■

Definition 8.30. En funktion f sägs vara **konkav** i $[a, b] \subseteq D_f$ om $-f$ är konvex i $[a, b]$.

Definition 8.31. Låt f vara en funktion definierad på ett intervall I. En punkt $x_0 \in I$ sägs vara en **inflexionspunkt** till f om det finns ett $\delta > 0$ sådant att f är konvex i ett av intervallen $[x_0 - \delta, x_0]$ och $[x_0, x_0 + \delta]$, och konkav i det andra.

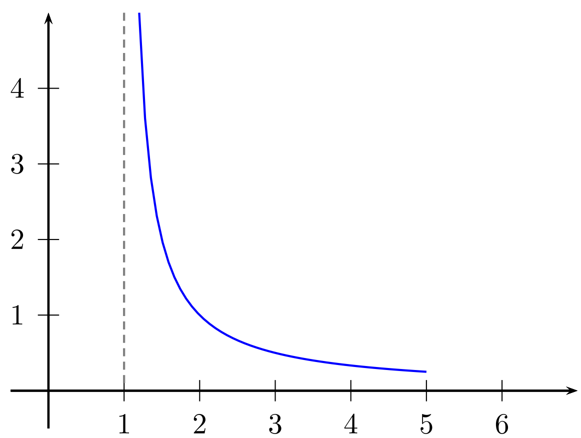
Sats 8.32. *Låt f vara två gånger deriverbar och låt f'' vara kontinuerlig. Om f har en inflexionspunkt i x_0 så är $f''(x_0) = 0$.*

BEVIS: Antag att f har en inflexionspunkt i x_0. Vi kan anta att det finns då ett $\delta > 0$ sådant att f är konvex i $[x_0 - \delta, x_0]$ och konkav i $[x_0, x_0 + \delta]$. Enligt sats 8.29 så är $f''(x) \geqslant 0$, för varje $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ och enligt övning 8.6 så är $f''(x) \leqslant 0$, för varje $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Eftersom f'' är kontinuerlig i x_0 så måste $f''(x_0) = 0$. ■

8.9 Asymptoter

Definition 8.33. En linje $x = a$ sägs vara en **lodrät asymptot** till en funktion f om $f(x)$ går mot $+\infty$ eller $-\infty$ då $x \to a+$ eller då $x \to a-$.

Exempel 8.34. Funktionen $f(x) = 1/(x-1)$, definierad för $x > 1$ har den lodräta asymptoten $x = 1$. Ty, $f(x) \to +\infty$, då $x \to 1+$.



Figur 8.6: Den streckade linjen är asymptoten $x = 1$.

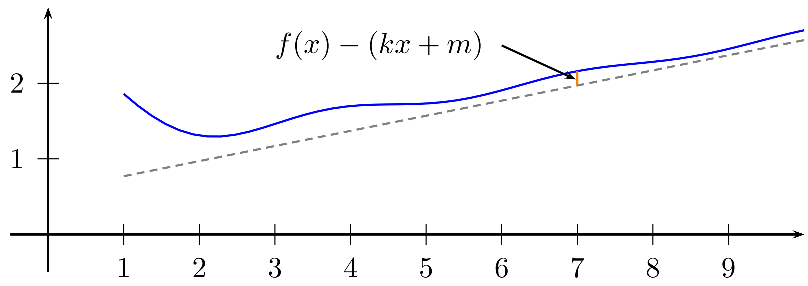
▲

Definition 8.35. En linje $y = kx + m$ är en **sned asymptot** till en funktion f om

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - (kx + m)) = 0 \tag{8.23}$$

eller

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - (kx + m)) = 0. \tag{8.24}$$



Om en funktion f har en sned asymptot då $x \to \infty$ så kan vi beräkna k och m. Vi observerar först att från (8.23) får vi att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - (kx + m)}{x} = 0. \tag{8.25}$$

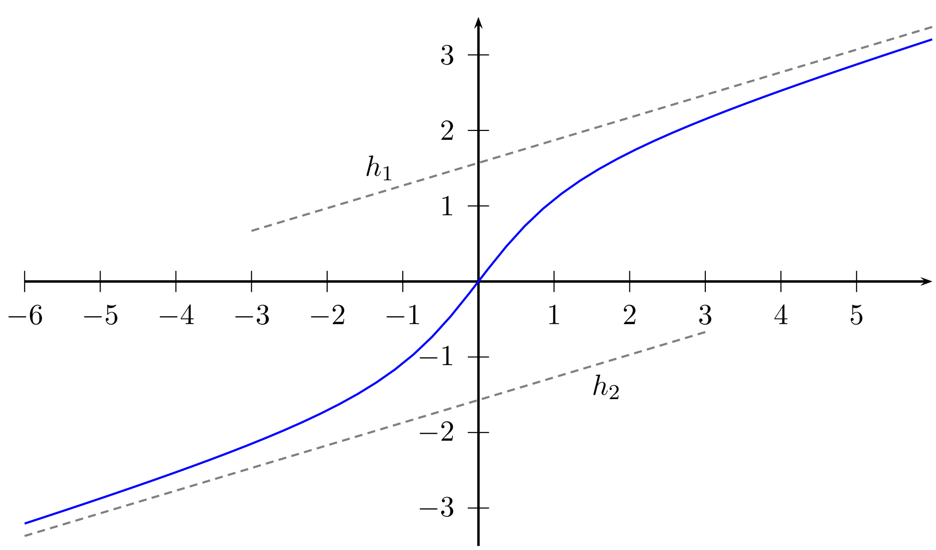
Eftersom $m/x \to 0$, då $x \to \infty$ så gäller att

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}. \tag{8.26}$$

Från (8.23) har vi även att

$$m = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx). \tag{8.27}$$

Exempel 8.36. Funktionen $f(x) = 3x/10 + \arctan x$ har de sneda asymptoterna $h_1(x) = 3x/10 + \pi/2$ och $h_2(x) = 3x/10 - \pi/2$.



▲

8.10 Grafritning

Exempel 8.37. Rita kurvan till $f(x) = xe^{-x}$, definierad för $x \geqslant 0$, med hjälp av att

a) bestäm stationära punkter och avgör, med hjälp av ett teckenschema av f', var f är strängt avtagande och strängt växande.

b) bestäm inflextionspunkter och avgör, med hjälp av ett teckenschema av f'', var f är konvex och konkav.

c) beräkna eventuella asymptoter.

LÖSNING:

a) Låt oss derivera f. Vi får att

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x},$$

definierad för alla $x \in (0, \infty)$. I detta fall har vi endast en stationär punkt i $x = 1$. Vi gör ett teckenschema enligt följande, där symbolen $\star$ betyder att funktionen i fråga inte är definierad

x	0		1	
$f'(x)$	$\star$	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$

b) Vi deriverar f' och får att

$$f''(x) = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}.$$

Vi får att f har en inflextionspunkt i $x = 2$. Vi gör ett teckenschema enligt följande

x	0		2	
$f''(x)$	$\star$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$\frown$	$2e^{-2}$	$\smile$

c) Eftersom funktionen är kontinuerlig på ett slutet intervall så finns det inga lodräta asymptoter. Om $y = kx + m$ är en sned asymptot så får vi k genom

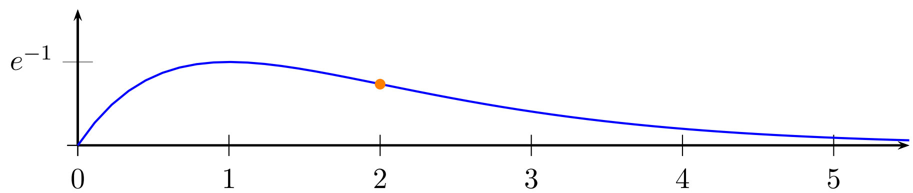
$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$$

och m genom

$$m = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$$

Alltså är $y = 0$ en sned asymptot.

Grafen får följande utseende



Figur 8.7: Grafen till $f(x) = xe^{-x}$.

Notera att funktionen är konkav före den orangefärgade pricken och konvex därefter. ▲

Exempel 8.38 (Tentamen 2011-10-18, 35%)**.** Visa att $e^x \geqslant 1+\sin x$, för varje $x \geqslant 0$.

LÖSNING: Om vi sätter $f(x) = e^x - 1 - \sin x$ så blir uppgiften att visa att $f(x) \geqslant 0$ för varje $x \geqslant 0$. Eftersom $e^x > 1$ och $\cos x \leqslant 1$ då $x > 0$ så ser vi att $f'(x) = e^x - \cos x > 0$ då $x > 0$. Eftersom derivatan $f'(x)$ är positiv då $x > 0$ (och $f(x)$ kontinuerlig då $x \geqslant 0$) följer att funktionen $f(x)$ är strängt växande då $x \geqslant 0$. Eftersom $f(0) = 0$ så följer det nu att $f(x) \geqslant 0$ för alla $x \geqslant 0$. ▲

8.11 Optimering

Exempel 8.39. Ett företag vill minimera materialåtgången vid tillverkningen av cylinderformade konservburkar av en viss volym. Vilket förhållande ska då råda mellan burkens höjd och radie?

LÖSNING: Låt h och r vara höjden respektive radien av burken. Vi har att volymen är

$$V = \pi r^2 h.$$

Arean består av två ytor av storleken πr^2 samt sidan som har höjden h och bredden $2\pi r$. Alltså är arean

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\frac{V}{r}.$$

Eftersom volymen V är konstant vill vi nu minimera funktionen A, då $r > 0$.

Vi ser direkt att

$$\lim_{r\to 0+} A(r) = \infty \quad \text{och} \quad \lim_{r\to\infty} A(r) = \infty.$$

Då A är deriverbar måste minvärdet finnas i någon stationär punkt. Låt oss derivera,

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}.$$

De stationära punkterna uppfyller att $A'(r) = 0$, alltså

$$4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0.$$

Vi löser ut r och får att arean är minimerad då

$$r_{\min} = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/3}.$$

Förhållandet mellan höjden och radien ska alltså vara

$$\frac{h}{r_{\min}} = \frac{V}{\pi r_{\min}^3} = 2.$$

▲

Exempel 8.40 (Tentamen 2011-10-18, 53%)**.** Låt $x \geqslant 0$ och $y \geqslant 0$ vara två tal vars summa är 6. Ange det minimala värdet som uttrycket $2x^2 + y^2$ kan anta.

LÖSNING: Eftersom vi vet att $x + y = 6$ kan vi skriva $y = 6 - x$. Problemet är alltså att hitta minimum av funktionen $f(x) = 2x^2 + (6 - x)^2$ på intervallet $[0, 6]$. Genom att kvadratkomplettera ser vi att

$$\begin{aligned} f(x) =& 2x^2 + (6^2 + x^2 - 12x) = 3x^2 - 12x + 36 = 3(x^2 - 4x + 12) \\ =& 3((x-2)^2 + 8). \end{aligned}$$

Det minsta värde som f kan anta (på hela reella axeln) är $3 \cdot 8 = 24$, som antas då $x = 2$. Eftersom $x = 2$ ligger i intervallet $[0, 6]$ följer att f:s minsta värde på detta intervall är 24.

▲

8.12 Sammanfattning av derivator av elementära funktioner

I tidigare delkapitel har vi bland annat visat följande samband

$$\frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x \tag{8.28}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\ln|x|\right) = \frac{1}{x} \tag{8.29}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^a\right) = ax^{a-1},\ a \neq 0 \tag{8.30}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sin x\right) = \cos x \tag{8.31}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\cos x\right) = -\sin x \tag{8.32}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\tan x\right) = \frac{1}{\cos^2 x} \tag{8.33}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\arctan x\right) = \frac{1}{1+x^2} \tag{8.34}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\arcsin x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{8.35}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\arccos x\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{8.36}$$

8.13 Övningar

Övning 8.2. Visa att derivatan av $x \mapsto \cos x$ är $x \mapsto -\sin x$.

Övning 8.3. Bevisa (8.3).

Övning 8.4. Visa (8.12) och (8.13).

Övning 8.5. Låt f vara deriverbar i intervallet (a, b). Visa att f är konkav om och endast om f' är avtagande i (a, b).

Övning 8.6. Låt f vara två gånger deriverbar i intervallet (a, b). Visa att f är konkav om och endast om $f''(x) \leqslant 0$, för varje $x \in (a, b)$.

Övning 8.7 (Tentamen 2011-10-18, 37%)**.** En stillastående bil startar från ett trafikljus och ökar farten med konstant acceleration upp tills farten är 25 m/s. Därefter fortsätter bilen med den konstanta hastigheten 25 m/s. Efter 23 s har bilen tillryggalagt sträckan 500 m. Hur lång tid efter starten nådde bilen farten 25 m/s?

Övning 8.8. Låt $f(x) = x \ln x$.

a) Vad är definitionsmängden för f?

b) Är f begränsad?

c) Är f strängt växande?

d) Finns det något intervall där f är strängt avtagande?

e) Är f inverterbar?

f) Är det sant att $f(x) > -1/3$ för alla positiva tal x?

Övning 8.9. Studera ekvationen $x^5 - 6x + 1 = 0$.

a) Visa att det finns minst en lösning i intervallet $[-1, 1]$.

b) Bestäm det exakta antalet lösningar i intervallet $[-1, 1]$.

Övning 8.10. Låt $g(t) = te^{-t^2/2}$. Bestäm alla lokala extrempunkter och alla eventuella asymptoter, skissa kurvan $y = g(t)$ och bestäm värdemängden till funktionen.

Övning 8.11. Låt $g(t) = \ln(1 + t^2) - \arctan t$. Bestäm alla lokala extrempunkter och alla eventuella asymptoter, skissa kurvan $y = g(t)$ och bestäm värdemängden till funktionen.

Övning 8.12. Låt $h(x) = (x^2 - 1)e^{2x-4}$.

a) Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y = h(x)$ i den punkt på kurvan som har x-koordinat 2.

b) Använd linjär approximation i $x = 2$, dvs tangentlinjen, för att uppskatta funktionsvärdet $h(2.1)$.

Övning 8.13. Vid laseroptimering försöker man minimera laserfläckens storlek på målet genom att variera strålen ut från lasern på lämpligt sätt. Man använder formeln

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi \omega_0^2}\right)^2}$$

där ω är radien av laserfläcken på målet, ω_0 är radien ut från lasern, λ är våglängden (fix) och z är avståndet till målet. Om våglängden är 500 nm, hur liten laserfläck kan man få om lasern riktas mot ett mål på månen?

9 Taylors formel

9.1 Formulering av satsen

I detta delkapitel är det nödvändigt att derivera funktioner många gånger. Vi inför därför notationen $f^{(n)}(x)$ som den n:te derivatan av f. Exempelvis är alltså $f^{(0)}(x) = f(x)$, $f^{(1)}(x) = f'(x)$ och $f^{(2)}(x) = f''(x)$.

Sats 9.1 (Taylors formel)**.** *Låt f vara en n gånger deriverbar funktion definierad i en omgivning av 0, sådan att $f^{(n)}$ är kontinuerlig. Då följer att*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n)}(\alpha) x^n}{n!}, \tag{9.1}$$

för något α mellan 0 och x.

Bevis: Vi noterar först att (9.1) stämmer för $x = 0$. Låt

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \tag{9.2}$$

och definiera för fixerat $x \neq 0$ konstanten

$$C = \frac{f(x) - p(x)}{x^n}. \tag{9.3}$$

Identitet (9.1) är ekvivalent med att visa identiteten

$$Cn! = f^{(n)}(\alpha). \tag{9.4}$$

Notera att definitionen av p medför att

$$f(0) = p(0),\ f'(0) = p'(0),\ \ldots,\ f^{(n-1)}(0) = p^{(n-1)}(0). \tag{9.5}$$

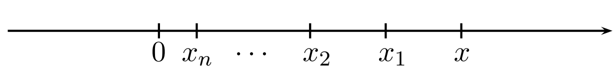
Bilda

$$g(t) = f(t) - p(t) - Ct^n.$$

Från (9.5) följer att

$$g(0) = g'(0) = \ldots = g^{(n-1)}(0) = 0. \tag{9.6}$$

Eftersom även $g(x) = 0$ från definitionen av C så följer att medelvärdessatsen 8.22 att det finns ett x_1 mellan 0 och x sådant att $g'(x_1) = 0$. Nu följer igen av medelvärdessatsen att det finns ett x_2 mellan 0 och x_1 sådant att $g''(x_2) = 0$. Denna procedur tar slut efter n steg.



Det sista steget säger att det finns ett $\alpha = x_n$ mellan 0 och x_{n-1} sådant att $g^{(n)}(x_n) = 0$. Alltså har vi

$$0 = g^{(n)}(x_n) = f^{(n)}(x_n) - Cn!,$$

vilket ger (9.4). Alltså är satsen visad. ■

Definition 9.2. Låt f vara n gånger deriverbar. Polynomet

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \tag{9.7}$$

kallas **Taylorpolynomet** till f kring a av gradtal n.

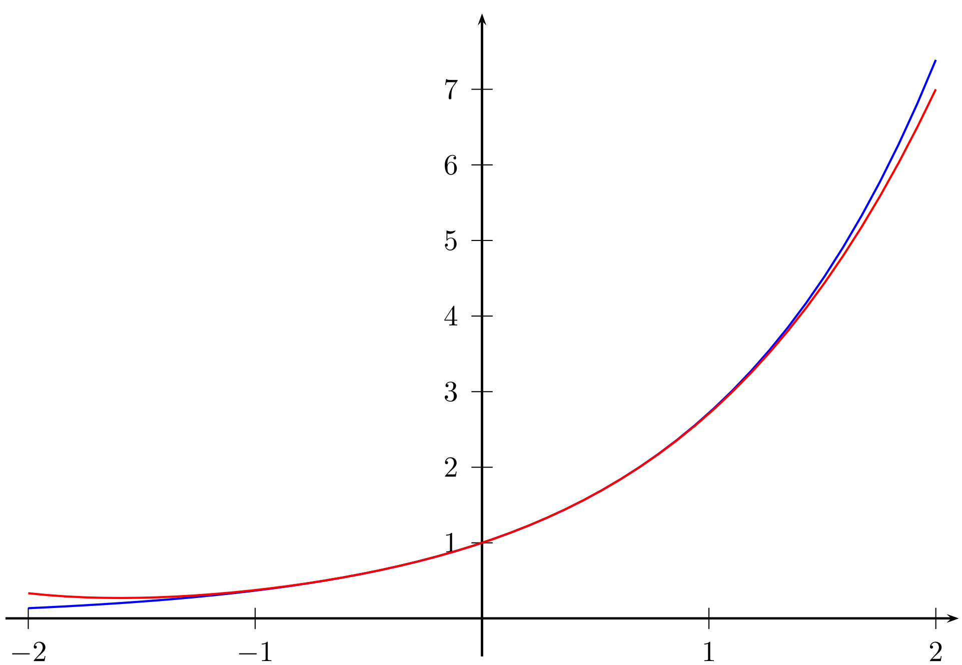
Exempel 9.3. Bestäm Taylorpolynomet av grad fyra kring 0 till $f(x) = e^x$.

Lösning: Det som efterfrågas är

$$\begin{aligned} p_4(x) &= \sum_{k=0}^{5} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(0)x^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(0)x^4}{4!} \end{aligned}$$

Vi har att $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(4)}(0) = 1$. Alltså blir polynomet

$$p_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}.$$



Figur 9.1: Den blå grafen är f och den röda är p_4.

▲

Exempel 9.4 (Tentamen 2011-10-18, 52%)**.**

a) Bestäm Taylorpolynomet av ordning 1 i punkten $x = 0$ till funktionen

$$f(x) = (1 + x)^{3/2}.$$

b) Visa att om vi använder detta Taylorpolynom $P(x)$ för att approximera värdet $(1 + a)^{3/2}$ för tal a i intervallet $[-1/2, 1/2]$, kan vi då vara säkra på att felet, d.v.s. $\left|P(a) - (1 + a)^{3/2}\right|$, alltid blir mindre än $1/5$?

LÖSNING:

a) Eftersom $f(x) = (1+x)^{3/2}$ har vi $f'(x) = \frac{3}{2}(1+x)^{1/2}$ och $f''(x) = \frac{3}{4\sqrt{1+x}}$. Taylorpolynomet av ordning 1 till f kring $x = 0$ ges av

$$P(x) = f(0) + f'(0)x = 1 + \frac{3x}{2}.$$

b) Enligt Taylors formel har vi för varje $-1 < x < 1$ att

$$f(x) = P(x) + \frac{f''(\xi)}{2}x^2,$$

där talet ξ ligger mellan 0 och x. Låt $a \in [-1/2, 1/2]$. Då har vi enligt formeln ovan att

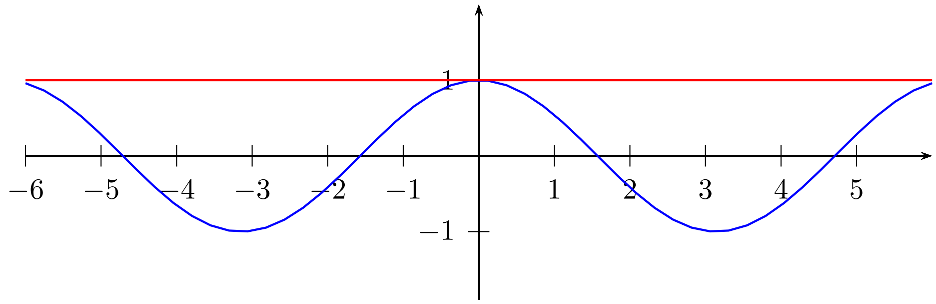
$$\begin{aligned} |f(a) - P(a)| = \left|\frac{f''(\xi)}{2}a^2\right| = \left|\frac{3}{8\sqrt{1+\xi}}a^2\right| \leqslant \frac{3}{8\sqrt{1-1/2}} \cdot \frac{1}{4} = \\ = \frac{3\sqrt{2}}{32} < \frac{6}{32} < \frac{1}{5}, \end{aligned}$$

eftersom ξ ligger mellan 0 och a, d.v.s. vi vet att $\xi \in [-1/2, 1/2]$. Alltså har vi sett att felet blir mindre än $1/5$.

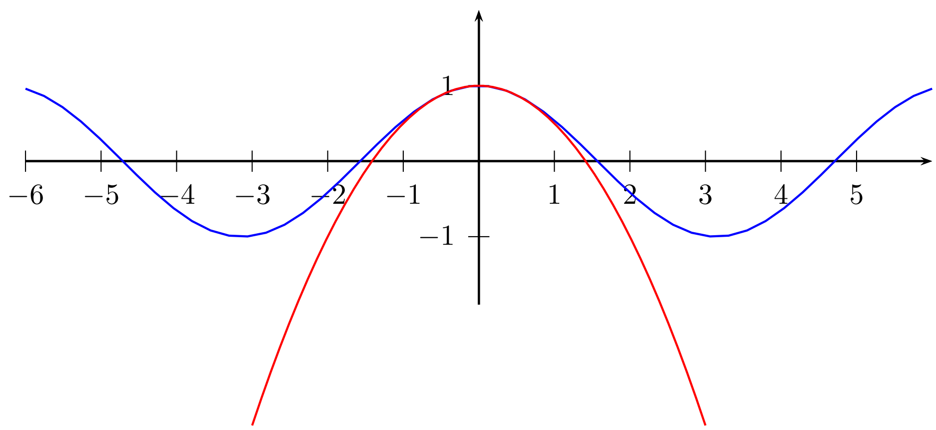
▲

Exempel 9.5. Det är intressant att se hur Taylorpolynomen till en given funktion blir bättre och bättre ju fler termer som vi inkluderar. Studera $f(x) = \cos x$. Eftersom $f^{(2i)}(0) = (-1)^i$ och $f^{(2i+1)}(0) = 0$, för $i \in \mathbb{N}$, så har vi att Taylorpolynomet p_{2n} till f ges av

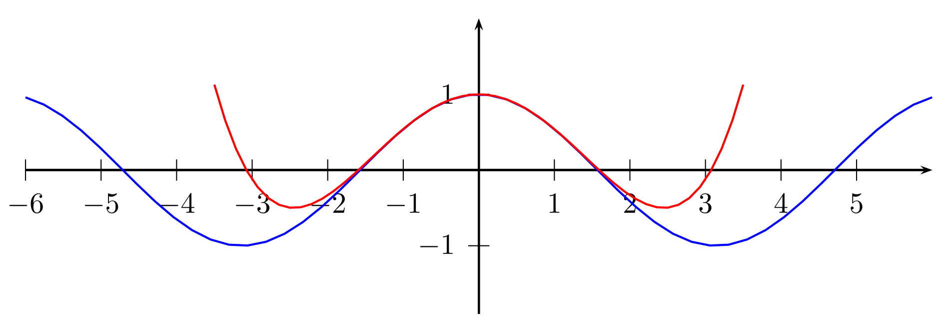
$$p_{2n}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$



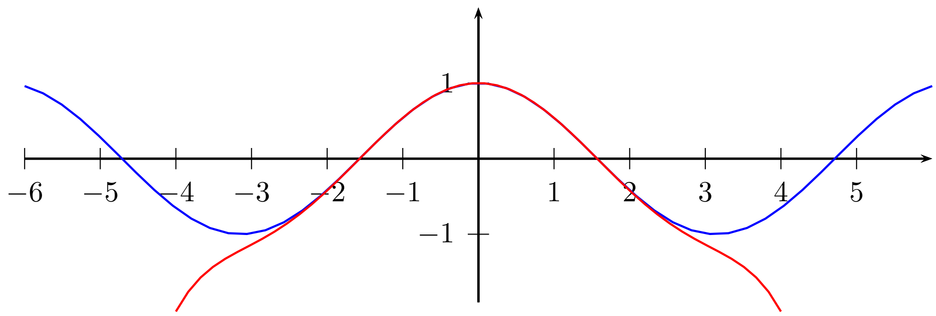
Figur 9.2: Den blå grafen är $x \mapsto \cos x$ och den röda är $p_0(x) = 1$.



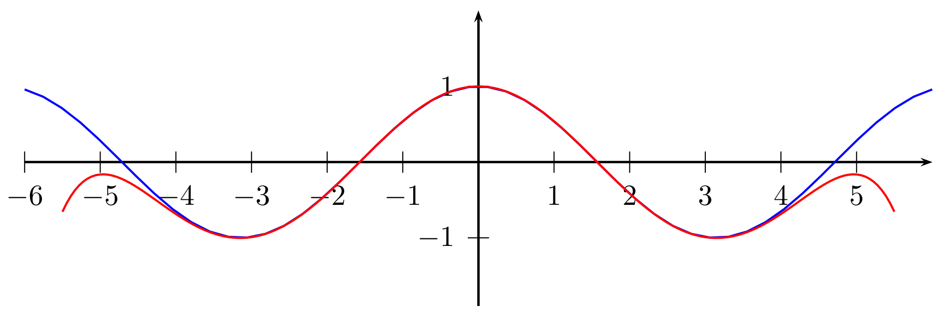
Figur 9.3: Den blå grafen är $x \mapsto \cos x$ och den röda är $p_2(x) = 1 - x^2/2!$.



Figur 9.4: Den blå grafen är $x \mapsto \cos x$ och den röda är $p_4(x) = 1 - x^2/2! + x^4/4!$.



Figur 9.5: Den blå grafen är $x \mapsto \cos x$ och den röda är $p_6(x) = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6!$.



Figur 9.6: Den blå grafen är $x \mapsto \cos x$ och den röda är p_{10}.

▲

Följdsats 9.6 (Taylors formel kring godtycklig punkt)**.** *Låt f vara en n gånger deriverbar funktion definierad i en omgivning av a, sådan att $f^{(n)}$ är kontinuerlig. Då följer att*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(\alpha)(x-a)^n}{n!}, \tag{9.8}$$

för något α mellan a och x.

Bevis: Bilda funktionen $g(t) = f(t+a)$. Då gäller att g uppfyller förutsättningarna för sats 9.1. Vi får att det finns ett α_0 mellan 0 och t sådant att

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}t^k + \frac{g^{(n)}(\alpha_0)t^n}{n!}. \tag{9.9}$$

Uttryckt i f blir det

$$f(t+a) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}t^k + \frac{f^{(n)}(a+\alpha_0)t^n}{n!}, \tag{9.10}$$

eftersom $g^{(k)}(t) = f^{(k)}(t+a)$, för varje $k \geqslant 0$. Låt nu $t = x - a$, vi får att

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(a+\alpha_0)(x-a)^n}{n!}. \tag{9.11}$$

Det räcker med att observera att $\alpha = a + \alpha_0$ är ett tal mellan a och x.

■

Övning 9.1. Bestäm Taylorpolynomet i punkten π av ordning 3 till funktionen $f(x) = \sin x$.

LÖSNING: Det sökta polynomet p_3 är

$$p_3(x) = f(\pi) + f'(\pi)(x-\pi) + \frac{f''(\pi)(x-\pi)^2}{2} + \frac{f'''(\pi)(x-\pi)^3}{6}.$$

Vi deriverar därför f och får att

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad \text{och} \quad f'''(x) = -\cos x.$$

Sätter vi in de sökta värdena får vi

$$p_3(x) = -(x-\pi) + \frac{(x-\pi)^3}{6}.$$

Man kan utveckla parenteserna om man vill, men själv tycker jag att ovanstående uttryck är den bästa formen att presentera svaret på. Med formen

$$p_3(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{\pi x^2}{2} + \frac{(\pi^2-2)x}{2} - \frac{\pi^3 - 6\pi}{6}$$

är det till och med svårt att direkt se att $p_3(\pi) = 0$.

9.2 Stora ordonotationen

Definition 9.7. Låt f och g vara funktioner definierade i (a, ∞), för något a. Vi säger att f tillhör mängden **stora ordo** av funktionen $g(x)$ då $x \to \infty$, och skriver $\mathcal{O}(g(x))$ om det finns tal M och x_0 sådana att

$$|f(x)| \leqslant M|g(x)|,$$

för varje $x > x_0$.

Exempel 9.8. Funktionen $x \mapsto x \ln x$ tillhör $\mathcal{O}(x^3)$ då $x \to \infty$, ty standardgränsvärden (se sats 5.5) ger

$$|x \ln x| \leqslant \left|x^3\right|,$$

för varje $x > 1$. I detta fallet är M och x_0 från definitionen båda 1. ▲

Definition 9.9. Låt f och g vara funktioner definierade i en omgivning till a. Vi säger att f tillhör mängden **stora ordo** av funktionen $g(x)$ kring a, och skriver $\mathcal{O}(g(x))$ om det finns tal M och $\delta > 0$ sådana att

$$|f(x)| \leqslant M|g(x)|,$$

för varje $x \in (a-\delta, a+\delta)$.

Exempel 9.10. Funktionen $x \mapsto 4x^4$ tillhör $\mathcal{O}\big(x^2\big)$ kring 0, ty för $M = 4$ och $\delta = 1$ i definitionen får vi

$$\left|4x^4\right| \leqslant 4\left|x^2\right|,$$

för varje $x \in (-1, 1)$. ▲

Vi kommer i givna situationer, då det klart framgår, att utelämna informationen om $\mathcal{O}(g(x))$ betraktas kring en punkt eller vid oändligheten.

I många sammanhang är det praktiskt att införa konventionen

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)),$$

där f och g är givna funktioner. Det vi menar är att f är någon funktion i mängden $\mathcal{O}(g(x))$. Med denna notation kan vi formulera räknereglerna

Sats 9.11. *Låt f och g vara funktioner sådana att $\mathcal{O}(f(x))$ och $\mathcal{O}(g(x))$ är definierade kring en punkt eller vid ∞, då gäller att*

$$\mathcal{O}(f(x))\,\mathcal{O}(g(x)) = \mathcal{O}(f(x)g(x)), \tag{9.12}$$

$$\mathcal{O}(f(x)) + \mathcal{O}(g(x)) = \mathcal{O}(|f(x)| + |g(x)|). \tag{9.13}$$

Bevis: Låt oss visa dessa identiteter i fallet att stora ordo är kring 0. En mängdidentitet kan erhållas genom att visa att vänsterledet är en delmängd av högerledet och tvärt om.

Vi börjar med (9.12). Låt oss visa att $\mathcal{O}(f(x))\,\mathcal{O}(g(x)) \subseteq \mathcal{O}(f(x)g(x))$. Tag $h \in \mathcal{O}(f(x))\,\mathcal{O}(g(x))$, då finns enligt konventionen en funktion $h_f \in \mathcal{O}(f(x))$ och $h_g \in \mathcal{O}(g(x))$ sådana att $h = h_f \cdot h_g$. Vi vill visa att $h \in \mathcal{O}(f(x)g(x))$. Då $h_f \in \mathcal{O}(f(x))$, så finns det M_f och $\delta_f > 0$ sådana att

$$|h_f(x)| \leqslant M_f|f(x)|,$$

för varje $x \in (-\delta_f, \delta_f)$. Liknande gäller för h_g med konstanterna M_g och δ_g. Vi har att

$$|h| = |h_f| \cdot |h_g| \leqslant M_f M_g |f(x)g(x)|,$$

för varje $x \in (-\delta, \delta)$, där $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Alltså är $\mathcal{O}(f(x))\,\mathcal{O}(g(x)) \subseteq \mathcal{O}(f(x)g(x))$.

Låt oss nu visa det omvända, att $\mathcal{O}(f(x)g(x)) \subseteq \mathcal{O}(f(x))\,\mathcal{O}(g(x))$. Tag $h \in \mathcal{O}(f(x)g(x))$, d.v.s. det finns tal M och $\delta > 0$ sådana att

$$|h(x)| \leqslant M|f(x)g(x)|, \tag{9.14}$$

för varje $x \in (-\delta, \delta)$. Antag att $g(x) \neq 0$ i en omgivning av $x = 0$. Låt oss bilda $h_1(x) = h(x)/g(x)$ och $h_2(x) = g(x)$, då gäller att $h = h_1 \cdot h_2$, där $h_1 \in \mathcal{O}(f(x))$ och $h_2 \in \mathcal{O}(g(x))$. Alltså är $\mathcal{O}(f(x)g(x)) \subseteq \mathcal{O}(f(x))\,\mathcal{O}(g(x))$.

Om $g(x) = 0$ i någon punkt så måste även $h(x) = 0$ för att (9.14) ska gälla. I dessa punkter kan vi definiera både $h_1(x) = h_2(x) = 0$.

Vi lämnar beviset av (9.13) som en övning till läsaren. ■

Exempel 9.12. Sats 9.11 säger exempelvis att $x^2\mathcal{O}\big(x^3\big) = \mathcal{O}\big(x^5\big)$ och att

$$\frac{\mathcal{O}\big(x^4\big)}{x} = \mathcal{O}\big(x^3\big).$$

▲

Sats 9.13. *Låt f vara n gånger deriverbar och $f^{(n)}$ vara kontinuerlig i en omgivning av 0. Då gäller att*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \mathcal{O}(x^n), \tag{9.15}$$

kring 0.

Bevis: Vi måste visa att resttermen från sats 9.1

$$R_n(x) := \frac{f^{(n)}(\alpha)x^n}{n!},$$

där α är ett tal mellan 0 och x, tillhör $\mathcal{O}(x^n)$ kring 0. Eftersom $f^{(n)}$ är kontinuerlig i en omgivning av 0 så är den begränsad där, d.v.s. det finns ett tal K och $\delta > 0$ sådant att

$$f^{(n)}(x) \leqslant K,$$

för varje $x \in (-\delta, \delta)$. Alltså gäller att

$$\frac{f^{(n)}(\alpha)x^n}{n!} \leqslant \frac{K}{n!}x^n,$$

för varje $x \in (-\delta, \delta)$, vilket betyder att $R_n \in \mathcal{O}(x^n)$ kring 0. ■

Exempel 9.14. Visa att

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{3x^3} = \frac{1}{9}.$$

Lösning: Låt oss Taylorutveckla $\ln(1+x)$ kring 0. Vi får

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}\big(x^4\big).$$

Alltså gäller att

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{3x^3} &= \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}\big(x^4\big) - x + \frac{x^2}{2}}{3x^3} \\ &= \frac{\frac{x^3}{3} + \mathcal{O}\big(x^4\big)}{3x^3} = \frac{\frac{1}{3} + \mathcal{O}(x)}{3} = \frac{1}{9} + \mathcal{O}(x) \to \frac{1}{9},\end{aligned}$$

då $x \to 0$. ▲

9.3 Övningar

Övning 9.2. Använd Taylorpolynomet av grad 2 kring $x = 0$ till $f(x) = \sqrt{100 + x}$ för att beräkna ett närmevärde till $\sqrt{104}$. Skriv upp feltermen och avgör om felet i ditt närmevärde är till beloppet mindre än 0.01.

10 Serier

10.1 Definitionen

Definition 10.1. Låt $(a_j)_{j=0}^{\infty}$ vara en talföljd och låt $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ vara talföljden där

$$s_n = \sum_{j=0}^{n} a_j. \tag{10.1}$$

Vi definierar **serien** $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ som

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j = \lim_{n\to\infty} s_n. \tag{10.2}$$

Talen s_n kallas för seriens **delsummor**. Om gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} s_n$ existerar sägs serien vara konvergent och gränsvärdet kallas för **seriens summa**, i annat fall divergent. En serie sägs vara **positiv** om $a_j \geqslant 0$, för varje $j \in \mathbb{N}$.

Observera att det inte spelar någon roll var serien ovan börjar på för index, detta är endast en namngivning. Det går alltid att döpa om termerna så att serien börjar med index noll.

Läsaren kan själv verifiera att sats 4.5 ger att om $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ och $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ är konvergerat serier så uppfyller de linjära egenskaperna

$$\sum_{j=0}^{\infty}(a_j + b_j) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j + \sum_{j=0}^{\infty} b_j, \tag{10.3}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} ca_j = c\sum_{j=0}^{\infty} a_j, \tag{10.4}$$

där $c \in \mathbb{R}$.

Sats 10.2. *Om serien $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ är konvergent så gäller att $a_j \to 0$, då $j \to \infty$.*

Bevis: Låt s_n beteckna delsummorna för serien och låt S vara seriens summa. Nu följer satsen från (10.3) eftersom

$$a_n = s_n - s_{n-1} \to S - S = 0,$$

då $j \to \infty$. ∎

10.2 Geometrisk serie

En **geometrisk serie** $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ är en serie vars termer $(a_j)_{j=0}^{\infty}$ bildar en geometrisk talföljd, d.v.s. $a_j = x^j$, för något $x \in \mathbb{R}$. Detta är en av få serier som vi faktiskt kan beräkna, givet att x uppfyller att $|x| < 1$.

Sats 10.3. *Om $|x| < 1$ så gäller att*

$$\sum_{j=0}^{\infty} x^j = \frac{1}{1-x}. \tag{10.5}$$

Bevis: Låt s_n beteckna delsummorna till serien. Delsummorna är då geometriska summor och därav har vi att

$$s_n = \sum_{j=0}^{n} x^j = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Om $|x| < 1$ följer att

$$s_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \to \frac{1}{1-x},$$

då $n \to \infty$. ■

10.3 Jämförelsesatser

Sats 10.4. *Låt $0 \leqslant a_j \leqslant b_j$, för varje $j \in \mathbb{N}$. Då gäller att om $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ är konvergent så är även $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ konvergent.*

Bevis: Antag att $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ är konvergent med summan B och att $0 \leqslant a_j \leqslant b_j$, för varje $j \in \mathbb{N}$. Vi vill visa att $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ är konvergent, vilket per definition betyder att

$$s_n := \sum_{j=0}^{n} a_j$$

är konvergent då $n \to \infty$. Enligt sats 4.7 följer detta om vi visar att $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ är växande och uppåt begränsad. Talföljden $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ är växande eftersom $a_j \geqslant 0$, för varje $j \geqslant 0$. Den är även uppåt begränsad av B eftersom

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \leqslant \sum_{j=1}^{n} b_j \to B,$$

då $n \to \infty$. Vi är klara. ■

Negationen av ovanstående sats formuleras nedan, det är lämnat till lämnat läsaren, som en övning i negering av implikation, att bevisa den.

Följdsats 10.5. *Låt $0 \leqslant a_j \leqslant b_j$, för varje $j \in \mathbb{N}$. Då gäller att om $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ är divergent så är även $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ divergent.*

Nästa exempel visar att en serie nödvändigtvis inte konvergerar bara för att termerna går mot noll. Tyvärr är detta en vanlig missuppfattning för den som inte tagit till sig teorin om serier på ett tillräcklig vis.

Exempel 10.6. Visa att serien

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$$

är divergent.

LÖSNING: Låt s_n beteckna delsummorna för serien och låt m vara det största heltal sådant att $n \geqslant 2^m$. Då gäller att

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} \geqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2^m} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2^3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^m}\right) \\ &\geqslant 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^m} + \cdots + \frac{1}{2^m}\right). \end{aligned}$$

Detta ger att

$$s_n \geqslant 1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + 2^2\frac{1}{2^3} + 2^3\frac{1}{2^4} \cdots + 2^{m-1}\frac{1}{2^m} = 1 + \frac{m}{2} \to \infty,$$

då $n \to \infty$ och därmed även $m \to \infty$. ▲

Sats 10.7. *Serien*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j^p} \tag{10.6}$$

är konvergent om och endast om $p > 1$.

BEVIS: Vi är klara om vi lyckas visa att serien divergerar då $p \leqslant 1$ och att den konvergerar då $p > 1$.

Låt oss börja med att visa att serien divergerar då $p \leqslant 1$. Detta följer direkt från exempel 10.6, ty olikheten $j^p \leqslant j$ ger

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j^p} \geqslant \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j} = \infty.$$

Det återstår att visa att serien konvergerar då $p > 1$. Vi använder liknande metoder som i exempel 10.6, d.v.s. gruppera termerna på ett effektivt sätt. Låt s_n beteckna delsummorna för serien och låt m vara det minsta heltal sådant att $n \leqslant 2^m - 1$. Då gäller att

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \leqslant 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{(2^m-1)^p} \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{2^{2p}} + \cdots + \frac{1}{7^p}\right) + \cdots \\ &\qquad\qquad + \left(\frac{1}{2^{(m-1)p}} + \cdots + \frac{1}{(2^m-1)^p}\right) \\ &\leqslant 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}\right) + \left(\frac{1}{2^{2p}} + \cdots + \frac{1}{2^{2p}}\right) + \cdots \\ &\qquad\qquad + \left(\frac{1}{2^{(m-1)p}} + \cdots + \frac{1}{2^{(m-1)p}}\right). \end{aligned}$$

Alltså har vi

$$\begin{aligned} s_n &\leqslant 1 + 2\frac{1}{2^p} + 2^2\frac{1}{2^{2p}} + \cdots + 2^{m-1}\frac{1}{2^{(m-1)p}} \\ &= 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{m-1}. \end{aligned}$$

Detta är en geometrisk serie och därmed får vi

$$s_n \leqslant \frac{1 - \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^m}{1 - \frac{1}{2^{p-1}}} \to \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{p-1}}},$$

då $n \to \infty$ eftersom konstruktionen av m ger att $m \geqslant \log_2(1+n) \to \infty$, då $n \to \infty$. ∎

Sats 10.8. *Låt $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ och $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ vara två positiva serier vars termer uppfyller att*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{a_j}{b_j} = K, \tag{10.7}$$

för något $K \neq 0$. Då gäller att $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ konvergerar om och endast om $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ konvergerar.

Bevis: Antag att $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ är konvergent med summan B. Vi vill visa att $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ är konvergent genom att använda sats 4.7. Det är klart att $\sum_{j=1}^{n} a_j$ är växande eftersom $a_j \geqslant 0$ och alltså kvarstår det att visa att delsummorna är uppåt begränsade.

Från (10.7) vet vi att det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett N sådant att

$$K - \varepsilon < \frac{a_j}{b_j} < K + \varepsilon,$$

för varje $j > N$. Alternativt,

$$b_j(K - \varepsilon) < a_j < b_j(K + \varepsilon),$$

för varje $j > N$. Vi får att

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{N} a_j + \sum_{j=N+1}^{n} a_j \leqslant \sum_{j=1}^{N} a_j + (K+\varepsilon) \sum_{j=N+1}^{n} b_j \leqslant \sum_{j=1}^{N} a_j + (K+\varepsilon)B$$

och alltså är $\sum_{j=1}^{n} a_j$ uppåt begränsad och därmed även konvergent.

Det omvända resultat följer av symmetriskäl eftersom

$$\lim_{j\to\infty} \frac{b_j}{a_j} = \frac{1}{K} \neq 0.$$

■

Exempel 10.9. Är serien

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sin\left(\frac{1}{j}\right) - \frac{1}{j} \right)$$

konvergent?

LÖSNING: Låt $a_j := \sin(1/j) - 1/j$ och $b_j = 1/j^3$. Låt oss Taylorutveckla $\sin(1/j)$ kring 0. Vi har att

$$\frac{a_j}{b_j} = \frac{\sin\left(\frac{1}{j}\right) - \frac{1}{j}}{\frac{1}{j^3}} = \frac{\left(\frac{1}{j} - \frac{1}{3!j^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{j^5}\right)\right) - \frac{1}{j}}{\frac{1}{j^3}} \to \frac{1}{6},$$

då $j \to \infty$. Från sats 10.8 har vi att eftersom $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ är konvergent så är $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konvergent. ▲

10.4 Taylorserier

Låt f vara en oändligt gånger deriverbar funktion. Differensen mellan f och det $(n-1)$:te Taylorpolynomet ges av resttermen $R_n(x)$. Enligt (9.1) är

$$R_n(x) = f(x) - p_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(\alpha)x^n}{n!}. \tag{10.8}$$

Låt oss fixera $x \in \mathbb{R}$ och konstatera att om $R_n(x) \to 0$, då $n \to \infty$, så har vi för detta x identiteten

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}.$$

Det största talet r för vilket serien ovan konvergerar för varje $|x| < r$ kallas Taylorseriens **konvergensradie**.

Exempel 10.10. Visa att

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

för alla $x \in \mathbb{R}$.

LÖSNING: Låt oss först visa att termerna i Taylorutvecklingen av $f(x) := \sin x$ överensstämmer med de i serien. Därefter visar vi att för varje givet x går resttermen mot noll.

Låt oss Taylorutveckla f kring $x = 0$. Vi får för $i \in \mathbb{N}$ att $f^{(4i)}(0) = 0, f^{(4i+1)}(0) = 1, f^{(4i+2)}(0) = 0$ och $f^{(4i+3)}(0) = -1$. Alltså är Taylorpolynomet av grad $2n-1$, för $n \geqslant 1$, följande

$$p_{2n-1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

och resttermen uppfyller att

$$\left| \frac{f^{(2n)}(\alpha) x^{2n}}{(2n)!} \right| \leqslant \left| \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right| \to 0,$$

då $n \to \infty$. Gränsvärdet är en direkt följd av (4.2). ▲

Exempel 10.11. Konvergensradien för $x \mapsto \ln(1+x)$ är 1. Läsaren kan själv verifiera att $f'(x) = (1+x)^{-1}$, $f''(x) = -(1+x)^{-2}$, $f^{(3)}(x) = 2(1+x)^{-3}$ och allmänt gäller att

$$f^{(j)}(x) = (-1)^{j+1}(j-1)!(1+x)^{-j}.$$

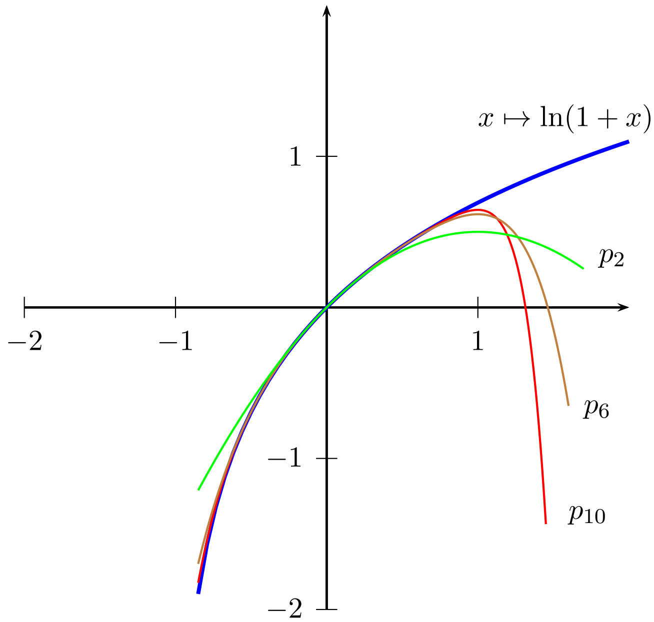
Enligt Taylors formel får vi

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + R_n(x), \tag{10.9}$$

där

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\alpha) x^n}{n!} = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n(1+\alpha)^n}.$$

Om $x > 1$ så gäller att termerna i summan i (10.9) inte går mot noll. Därför kan serien inte konvergera för $x > 1$. Däremot om $-1 < x \leqslant 1$ så går $R_n(x) \to 0$, då $n \to \infty$. Konvergensradien är därmed 1.



Figur 10.1: Här skissas funktionen tillsammans med Taylorpolynomen p_2, p_6 och p_{10}.

▲

10.5 Övningar

Övning 10.1 (Utmaning)**.** Visa D'Alemberts kvotkriterium från år 1768. Detta kriterium säger att om $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ är en positiv serie som uppfyller att

$$\lim_{j\to\infty} \frac{a_{j+1}}{a_j} = H < 1$$

så är serien konvergent.

Övning 10.2 (Utmaning)**.** Visa Cauchys rotkriterium, d.v.s. om $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ är en positiv serie som uppfyller att

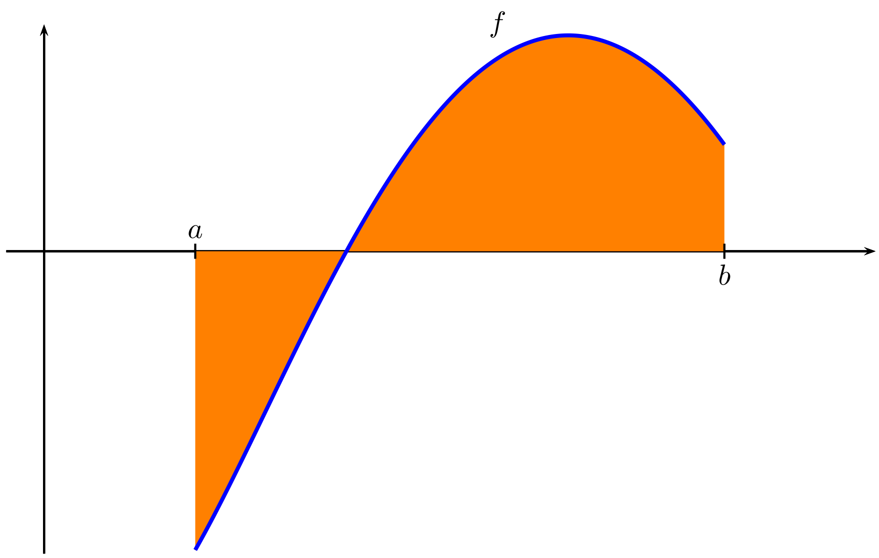
$$\lim_{j\to\infty} a_j^{1/j} = H < 1$$

så är serien konvergent.

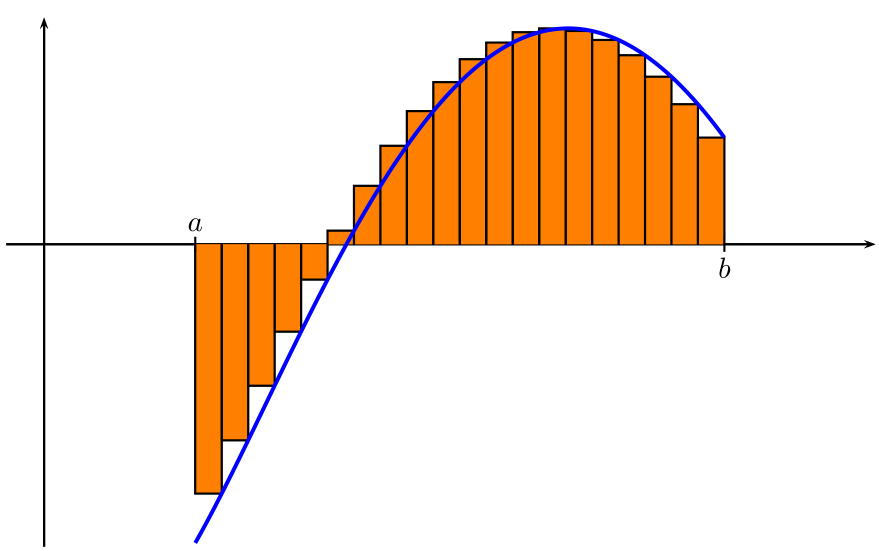
11 Integralen

11.1 Introduktion

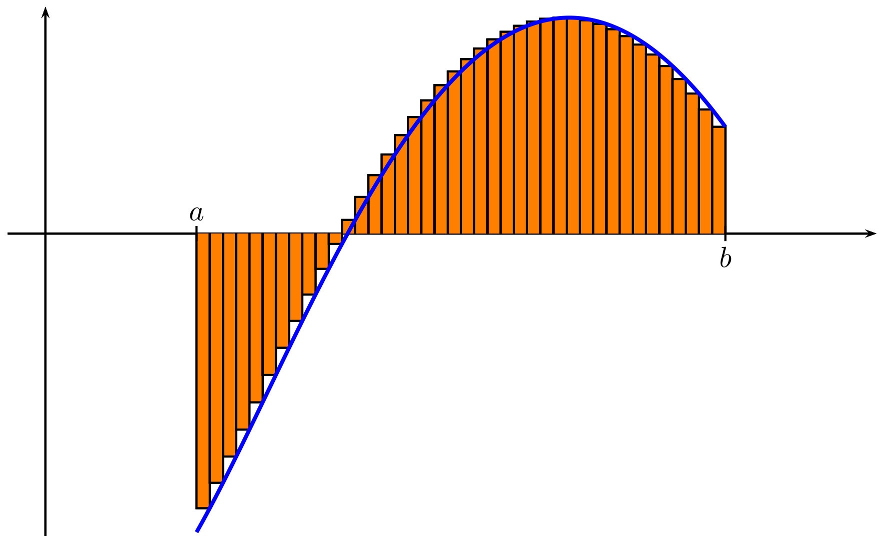
Ett skäl till att införa integraler är att vi vill beräkna arean mellan x-axeln och grafen till en funktion f i intervallet $[a, b]$. Den del av arean som är ovanför x-axeln kommer vi att definiera som positiv och den del som är under x-axeln som negativ.



Idén är att approximera arean genom att beräkna arean av en antal rektanglar, som är inskrivna mellan grafen och x-axeln



Till rektangelns höjd tar man, som i bilden, något funktionsvärde i stapelns intervall. Vi kan tänka oss att om vi minskar bredden, d.v.s. väljer fler och fler staplar med mindre och mindre bredd, så kommer vi att få en bättre och bättre approximation till den riktiga arean.



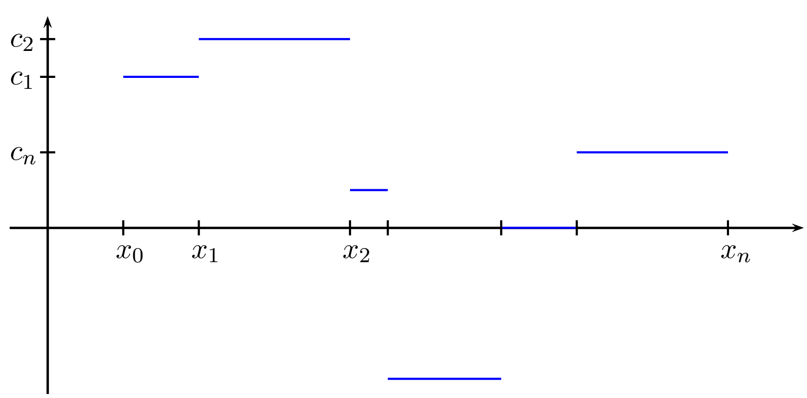
Vi ska beräkna arean genom att låta bredden av staplarna gå mot 0 och därmed antalet mot oändligheten.

11.2 Integraler av trappfunktioner på slutna intervall

En **trappfunktion** Ψ på det slutna intervallet $[a, b]$ är en funktion av typen

$$\Psi(x) = \begin{cases} c_1 & , x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \\ c_2 & , x_1 < x \leqslant x_2, \\ \vdots & \\ c_n & , x_{n-1} < x \leqslant x_n, \end{cases} \tag{11.1}$$

där $c_1, c_2, \ldots, c_n$ är reella konstanter och $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Låt oss illustrera definitionen med en graf

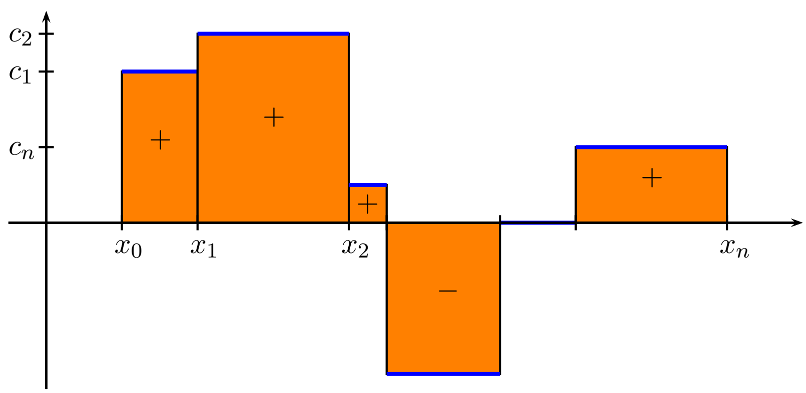


Mängden $P_n = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ kallas en **uppdelning** av intervallet $[a, b]$ och intervallen $[x_{i-1}, x_i]$ kallas ett delintervall av uppdelningen.

Integralen av en trappfunktion $\Psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ vill vi ska vara arean mellan x-axeln och grafen till Ψ. Därför väljer vi att definiera integralen av Ψ över $[a, b]$ som

$$\int_a^b \Psi(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} c_j(x_j - x_{j-1}),$$

vilket är arean av n stycken rektanglar med höjden c_j och bredden $x_j - x_{j-1}$. Vänsterledet i ovanstående definition anger även vår beteckning på integralen av Ψ över det slutna intervallet $[a, b]$. Vi illustrar definitionen med en figur.

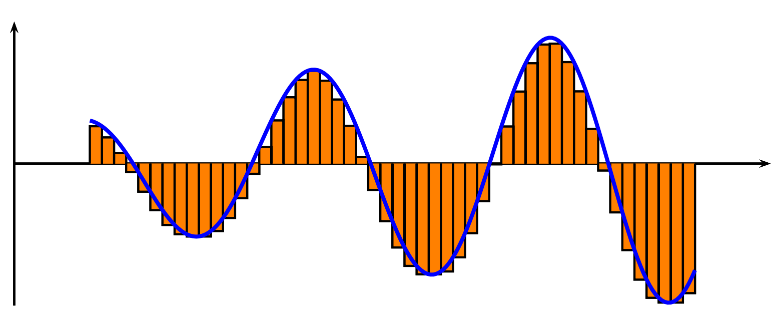


11.3 Integraler av begränsade funktioner på slutna intervall

Låt $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vara en begränsad funktion. Eftersom f är begränsad finns det trappfunktioner Φ och Ψ sådana att

$$\Phi(x) \leqslant f(x) \leqslant \Psi(x),$$

för varje $x \in [a, b]$. Funktionerna Φ och Ψ som uppfyller ovanstående kallas **undertrappa** respektive **övertrappa** till f och deras integraler kallas **undersumma** respektive **översumma** till f.



Figur 11.1: Här är ett exempel på en undertrappa och dess integral

Vi ser från figur 11.1 att integralen av undertrappan är en nedre begränsning av arean mellan x-axeln och grafen för f. På samma vis är integralen av övertrapporna övre begränsningar av arean. Låt $L(f)$ vara mängden av alla undersummor till f och $U(f)$ vara mängden av alla översummor till f, d.v.s.

$$L(f) = \left\{ \int_a^b \Phi(x)\,dx : \Phi \text{ är en undertrappa till } f \right\}, \tag{11.2}$$

$$U(f) = \left\{ \int_a^b \Psi(x)\,dx : \Psi \text{ är en övertrappa till } f \right\}. \tag{11.3}$$

Observera att mängderna $L(f)$ och $U(f)$ är delmängder av reella tal sådana att $L(f)$ är uppåt begränsad av varje tal i $U(f)$ och tvärt om. Supremumaxiomet 2.4 säger att $\sup L(f)$ och $\inf U(f)$ existerar. A priori gäller att $\sup L(f) \leqslant \inf U(f)$. Vi gör följande definition

Definition 11.1. Låt $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ vara en begränsad funktion. Om

$$\sup L(f) = \inf U(f)$$

så sägs f vara **integrerbar** och **integralen** av f över $[a,b]$ är

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup L(f) = \inf U(f).$$

Exempel 11.2. Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definierad som

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Uppfyller att $\sup L(f) = 0$ och supremum antas för undertrappan $\Phi(x) = 0$, medan $\inf U(f) = 1$ och antas för övertrappan $\Psi(x) = 1$. Eftersom $\sup L(f) \neq \inf U(f)$ så är f inte integrerbar. ▲

Sats 11.3. *Låt $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ vara en begränsad funktion. Då är f integrerbar om och endast om det för varje $\varepsilon > 0$ finns en undertrappa Φ och en övertrappa Ψ till f sådana att*

$$\int_a^b \Psi(x)\,dx - \int_a^b \Phi(x)\,dx < \varepsilon. \tag{11.4}$$

Bevis: Antag först att f är integrerbar, d.v.s. $I := \sup L(f) = \inf U(f)$. Låt $\varepsilon > 0$. Eftersom $I = \sup L(f)$ så finns det en undersumma Φ som uppfyller att

$$I - \int_a^b \Phi(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2} \tag{11.5}$$

och eftersom $I = \inf U(f)$ så finns det en översumma Ψ som uppfyller att

$$\int_a^b \Psi(x)\,dx - I < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{11.6}$$

Kombinerar vi (11.5) och (11.6) så får vi (11.4).

Antag nu att det för varje $\varepsilon > 0$ finns en undertrappa Φ och en övertrappa Ψ till f sådana att (11.4) gäller. Vi gör ett motsägelsebevis. Antag att $\sup L(f) = I_L < I_U = \inf U(f)$, då får vi motsägelser av vårt antagande för varje ε som uppfyller att

$$\varepsilon < (I_U - I_L)/2.$$

$\blacksquare$

11.4 Integrerbarhet av kontinuerliga funktioner

Låt f vara en kontinuerlig funktion på intervallet $[a, b]$ och låt $P_n = \{x_i\}_{i=0}^n$ vara en uppdelning av $[a, b]$. Låt

$$\Delta_i = x_i - x_{i-1}, \quad M_i = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad \text{och} \quad \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

Vi vill i detta delkapitel visa satsen

Sats 11.4. *Låt f vara en kontinuerlig funktion på intervallet $[a, b]$. Då är f integrerbar på $[a, b]$. Dessutom gäller att*

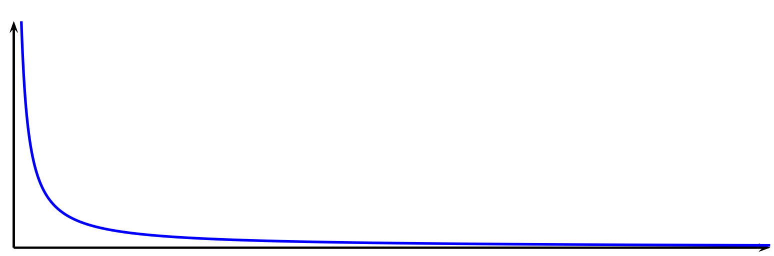
$$\sum_{i=1}^n M_i \Delta_i \to \int_a^b f(x)\,dx, \tag{11.7}$$

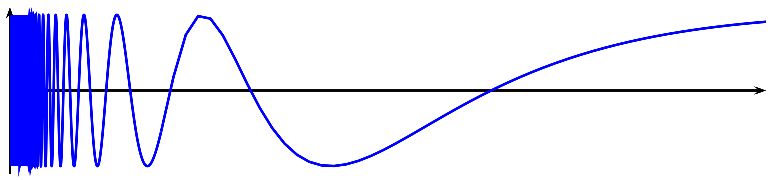
och

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta_i \to \int_a^b f(x)\,dx, \tag{11.8}$$

då $\max \Delta_i \to 0$.

Att intervallet i satsen är slutet gör att funktionen lite slarvigt uttryckt inte kan variera okontrollbart. Se figurerna nedan på funktionerna $x \mapsto 1/x$ och $x \mapsto \sin(1/x)$ kring 0. De är båda kontinuerliga på det öppna intervallet $(0, 1)$.





Definition 11.5. En funktion f sägs vara **likformigt kontinuerlig** på intervallet $[a, b]$ om det för varje $\varepsilon > 0$ existerar ett $\delta > 0$ sådant att $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$ för varje $x, y \in [a, b]$ som uppfyller att $|x - y| < \delta$.

Det som skiljer kontinuitet och likformig kontinuitet är att för likformigt kontinuerliga funktioner kan δ i definitionen kan väljas oberoende av inparametrarna till funktionen.

Sats 11.6. *Låt f vara kontinuerlig på intervall $[a, b]$. Då är f likformigt kontinuerlig på $[a, b]$.*

Bevis: Låt oss göra ett motsägelsebevis. Antag att f är kontinuerlig men inte likformigt kontinuerlig på $[a, b]$.

Tag $\varepsilon > 0$. För varje $\delta_k > 0$ finns det $x_k, y_k \in [a, b]$, sådana att $|x_k - y_k| < \delta_k$ och $|f(x_k) - f(y_k)| \geqslant \varepsilon$. Låt oss nu välja $\delta_k = 1/k$. Då gäller att $|x_k - y_k| \to 0$, då $k \to \infty$. Eftersom $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ är en begränsad talföljd, så ger Bolzano-Weierstrass sats, se sats 4.22, att det finns en konvergent delföljd, säg ${x_{k_i}}_{i=1}^{\infty}$, som konvergerar mot ett tal $p \in [a, b]$. Vi har även att

$$|y_{k_i} - p| \leqslant |y_{k_i} - x_{k_i}| + |x_{k_i} - p| < 1/k_i + |x_{k_i} - p| \to 0,$$

då $i \to \infty$.

Då f är kontinuerlig i p gäller att $f(x_{k_i}) \to f(p)$ och $f(x_{k_i}) \to f(p)$ då $i \to \infty$. Triangelolikheten ger nu att

$$\varepsilon \leqslant |f(x_{k_i}) - f(y_{k_i})| \leqslant |f(x_{k_i}) - f(p)| + |f(p) - f(y_{k_i})| \to 0,$$

då $i \to \infty$. Detta motsäger att $\varepsilon > 0$. Alltså är f likformigt kontinuerlig. ■

Nu är vi redo för beviset av sats 11.4.

Bevis av sats 11.4: Låt oss bevisa satsen genom att använda oss av sats 11.3. Låt $\varepsilon > 0$. Vi vill finna en övertrappa Ψ och en undertrappa Φ sådana att

$$\int_a^b \Psi(x)\, dx - \int_a^b \Phi(x)\, dx < \varepsilon.$$

Enligt sats 11.6 har vi att f är likformigt kontinuerlig. Välj $\delta > 0$ sådant att om $|x - y| < \delta$ så är

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Låt nu P vara en uppdelning av $[a,b]$ bestående av n delintervall $[x_{i-1}, x_i] \in P$ med egenskapen att längderna av varje delintervall är mindre än δ, alltså $\Delta_i = x_i - x_{i-1} < \delta$.

Då f är kontinuerlig så antar f ett minvärde m_i och ett maxvärde M_i på varje slutet intervall $[x_{i-1}, x_i]$. Vi kan nu konstruera en översumma och en undersumma med egenskapen

$$\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta_i = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta_i \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i = \varepsilon. \tag{11.9}$$

Alltså är f integrerbar enligt sats 11.3. Vi har dessutom visat genom vår konstruktion att (11.7) och (11.8). ■

11.5 Riemannsummor

Definition 11.7. Låt f vara en funktion definierad i intervallet $[a,b]$ och låt $P_n = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ vara en uppdelning av $[a,b]$. En summa av typen

$$\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i,$$

där $\alpha_i \in [x_{i-1}, x_i]$, kallas en **Riemannsumma** för f i intervallet $[a,b]$.

Följande sats säger att Riemannsummor av kontinuerliga funktioner kan användas för att approximera integraler.

Sats 11.8. *Låt f vara kontinuerlig i intervallet $[a,b]$ och låt $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en följd av uppdelningar av $[a,b]$ sådana att det största delintervallets längd $\Delta_{\max}(n) \to 0$, då $n \to \infty$. Då gäller att Riemannsumman*

$$\sum_{i=1}^{N} f(\alpha_i)\Delta_i \to \int_a^b f(x)\,dx,$$

då $n \to \infty$.

Bevis: Låt m_i och M_i vara det minsta respektive största värdet av f på intervallet $[x_{i-1}, x_i]$. Vi har att Riemannsumman är instängd av

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\Delta_i \leqslant \sum_{i=1}^{N} f(\alpha_i)\Delta_i \leqslant \sum_{i=1}^{N} M_i\Delta_i.$$

Enligt (11.7) och (11.8) så gäller att både höger- och vänsterled går mot

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

och därmed följer satsen. ■

11.6 Räkneregler

Antag att $a < b$ och att f är en integrerbar funktion på $[a, b]$, då *definierar* vi

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Följande räkneregler visas först för trappfunktioner och därefter generaliseras dem till integrerbara funktioner. Vi lämnar beviset för trappfunktioner till läsaren och bevisar hur generaliseringen till integrerbara funktioner går till.

Sats 11.9. *Låt f och g vara integrerbara funktioner på intervallet $[a, b]$ och $c \in \mathbb{R}$. Då gäller att*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx, \tag{11.10}$$

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx, \tag{11.11}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \tag{11.12}$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{11.13}$$

Om $f(x) \leqslant g(x)$, för varje $x \in [a, b]$ så gäller att

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx. \tag{11.14}$$

Bevis: Vi visar (11.10) och lämnar resterande bevis som en övning till läsaren.

Även verifieringen av (11.10) i fallet att f och g är trappfunktioner lämnas till läsaren att verifiera.

Vi behöver nu utvidga (11.10) till godtyckliga integrerbara funktioner. Eftersom f och g är integrerbara finns det undertrappor $\Phi_{n,f}$ och $\Phi_{n,g}$ samt övertrappor $\Psi_{n,f}$ och $\Psi_{n,g}$ för f respektive g sådana att

$$\int_a^b \Psi_{n,f}(x)\,dx - \int_a^b \Phi_{n,f}(x)\,dx < \frac{1}{2n}$$

och

$$\int_a^b \Psi_{n,g}(x)\,dx - \int_a^b \Phi_{n,g}(x)\,dx < \frac{1}{2n}.$$

Trappfunktionerna $\Phi_n := \Phi_{n,f} + \Phi_{n,g}$ och $\Psi_n := \Psi_{n,f} + \Psi_{n,g}$ är en under- respektive övertrappa till $f + g$. Funktionen $f + g$ är därmed integrerbar eftersom

$$\int_a^b \Psi_n(x)\,dx - \int_a^b \Phi_n(x)\,dx < \frac{1}{n}.$$

Denna olikhet säger att

$$\int_a^b \Phi_n(x)\,dx \to \int_a^b (f(x)+g(x))\,dx,$$

då $n \to \infty$. Med andra ord har vi att

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx &= \lim_{n\to\infty}\int_a^b \Phi_n(x)\,dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_a^b (\Phi_{n,f}(x)+\Phi_{n,g}(x))\,dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_a^b \Phi_{n,f}(x)\,dx + \lim_{n\to\infty}\int_a^b \Phi_{n,g}(x)\,dx \\ &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\end{aligned}$$

vilket visar (11.10). ■

Exempel 11.10 (Tentamen 2011-10-18, 11%)**.**

a) Visa att
$$\int_0^1 e^{x^2}\sin 5x\,dx \leqslant 10.$$

b) Visa att det finns ett tal N sådant att

$$\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2-1}{1+n^2+\log n} \geqslant 100.$$

LÖSNING:

a) Eftersom e^t är växande för alla t och x^2 är växande då $0 \leqslant x$, så följer att e^{x^2} är växande då $0 \leqslant x$. Alltså är $e^{x^2} \leqslant e^{1^2} = e$ om $0 \leqslant x \leqslant 1$. Därtill vet vi att $\sin t \leqslant 1$ för alla t. Om vi använder dessa två olikheter så får vi att
$$e^{x^2}\sin(5x) \leqslant e^{x^2} \leqslant e$$
om $0 \leqslant x \leqslant 1$. En egenskap hos integralen är att den bevarar olikheter och alltså är

$$\int_0^1 e^{x^2}\sin(5x)dx \leqslant \int_0^1 e^{x^2}dx \leqslant \int_0^1 e\,dx = e < 10.$$

b) Betrakta serien

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2-1}{1+n^2+\log n} = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=2}^{k}\frac{n^2-1}{1+n^2+\log n}.$$

Vi vet att om en serie $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ är konvergent så är $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Eftersom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{1+n^2+\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+1+\frac{\log n}{n^2}} = 1 \neq 0$$

så följer att vår serie är divergent. Eftersom serien också är positiv så följer att $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=2}^{k} \frac{n^2-1}{1+n^2+\log n} = \infty$. Att $\lim_{k\to\infty} b_k = \infty$, för en talföljd b_k, betyder att b_k blir hur stor som helst bara k är tillräckligt stort. Mer precist formulerat: för varje tal B finns ett tal N sådant att $b_n > B$ för varje $n > N$. Alltså vet vi att det finns ett tal N sådant att

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{n^2-1}{1+n^2+\log n} \geqslant 100.$$

▲

11.7 Medelvärdessatser för integraler

Sats 11.11 (Medelvärdessatsen för integraler)**.** *Låt f vara kontinuerlig i $[a, b]$. Då finns det ett tal $\alpha \in (a, b)$ sådant att*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\alpha)(b-a).$$

Satsen följer direkt från en något mer generellare sats, nämligen genom att sätta $g(x) = 1$ i följande sats

Sats 11.12 (Generaliserade medelvärdessatsen för integraler)**.** *Låt f och g vara kontinuerliga funktioner i $[a, b]$ och $g \geqslant 0$. Då finns det ett tal $\alpha \in (a, b)$ sådant att*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\alpha)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Bevis: Eftersom f är kontinuerlig så har f ett max- och minvärde på $[a, b]$. Låt M och m vara max respektive minvärdet för f på $[a, b]$. Vi har att $m \leqslant f(x) \leqslant M$, för varje $x \in [a, b]$ och därmed även

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x),$$

för varje $x \in [a, b]$. Alltså gäller att

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx$$

eller omskrivet

$$m \leqslant \frac{1}{\int_a^b g(x)\,dx}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M.$$

Satsen om mellanliggande värde säger att det finns ett tal $\alpha \in (a, b)$ sådant att

$$f(\alpha) = \frac{1}{\int_a^b g(x)\, dx} \int_a^b f(x)\, dx,$$

vilket ger önskad likhet. ■

11.8 Analysens huvudsats

Definition 11.13. Låt f vara en funktion definierad på ett intervall $[a, b]$. En funktion F sägs vara en **primitiv funktion** till f på $[a, b]$ om $F'(x) = f(x)$, för varje $x \in (a, b)$ och F är kontinuerlig i $[a, b]$.

Låt F_1 och F_2 vara två primitiva funktioner till en funktion f, alltså $F_1' = F_2' = f$. Om vi nu studerar $G = F_1 - F_2$ så får vi att $G' = F_1' - F_2' = f - f = 0$. Enligt sats 8.23 a) är $G(x) = C$, för någon konstant $C \in \mathbb{R}$. Alltså gäller att två primitiva funktioner skiljer sig endast på en konstant.

Sats 11.14 (Analysens huvudsats)**.** *Låt f vara en kontinuerlig funktion på intervallet $[a, b]$. Då gäller att*

$$F(x) := \int_a^x f(t)\, dt$$

är en primitiv funktion till f i intervallet (a, b).

Bevis: Låt oss använda derivatans definition. Vi vill alltså visa att

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

Vi har att

$$\frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\, dt$$

Medelvärdessatsen 11.11 ger att det finns ett $\alpha \in (x, x+h)$ sådant att

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\, dt = \frac{1}{h}(x + h - x)f(\alpha) = f(\alpha) \to f(x),$$

då $h \to 0$. Vilket skulle visas. ■

Sats 11.15 (Insättningsformeln)**.** *Låt f vara kontinuerlig i $[a, b]$ och låt F vara en primitiv funktion till f på $[a, b]$. Då gäller att*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Bevis: Låt

$$G(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,dt.$$

Enligt analysens huvudsats är $G' = f$ och därmed är $G(x) = F(x) + C$, för något $C \in \mathbb{R}$. Vi ser att $C = 0$ eftersom $G(a) = F(a)$. Nu följer satsen från

$$F(b) = G(b) = F(a) + \int_a^b f(t)\,dt.$$

■

Det är praktiskt att i detta läget införa notationen

$$\big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a),$$

här är det underförstått att x är den variabel som ska ersättas med a och b.

Exempel 11.16. Bestäm

$$\int_2^5 (2 - x + 2x^3)\,dx.$$

Lösning: Enligt sats 11.9 kan vi integrera termvis. Alltså får vi att

$$\begin{aligned}\int_2^5 (2 - x + 2x^3)\,dx &= \left[2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2}\right]_2^5 \\ &= 10 - \frac{25}{2} + \frac{625}{2} - (4 - 2 + 8) = 300.\end{aligned}$$

▲

Exempel 11.17. Bestäm arean mellan x-axeln, funktionen $x \mapsto (1 + x^2)^{-1}$, $x = 0$ och $x = 1$.

Lösning: Eftersom integralen

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\,dx$$

beskriver just denna area så gäller det att beräkna dess värde. Eftersom

$$\frac{d}{dx}\,(\arctan x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

så får vi enligt sats 11.15 att

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\,dx = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Den sökta arean är alltså $\pi/4$. ▲

Övning 11.1. Beräkna värdet av följande integraler

a) $\int_1^2 (x - x^{-2})\, dx$

b) $\int_1^2 (2x^{-1} + x^3)\, dx$

c) $\int_0^{\pi/2} \sin(2x)\, dx$

d) $\int_{-1}^1 \cos x\, dx$

11.9 Partiell integration

Sats 11.18 (Partiell integration)**.** *Låt f, g och g' vara kontinuerliga i $[a, b]$ och låt F vara en primitiv funktion till f i $[a, b]$. Då gäller att*

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = \big[F(x)g(x)\big]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\, dx. \tag{11.15}$$

Bevis: Detta resultat är en integrerad version av produktregeln för derivator. Produktregeln för derivator ger att

$$(Fg)'(x) = f(x)g(x) + F(x)g'(x).$$

Integrerar vi denna identitet får vi

$$\int_a^b (Fg)'(x)\, dx = \int_a^b f(x)g(x)\, dx + \int_a^b F(x)g'(x)\, dx.$$

Notera att

$$\int_a^b (Fg)'(x)\, dx = \big[F(x)g(x)\big]_a^b,$$

vilket ger (11.15). ■

Exempel 11.19. Bestäm en primitiv funktion till $x \mapsto \ln x$.

Lösning: Vi använder partiell integration med $f(x) = 1$ och $g(x) = \ln x$. Vi får enligt (11.15) att

$$\int \ln x\, dx = \int 1 \cdot \ln x\, dx = [x \ln x] - \int x \frac{1}{x}\, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C,$$

där C är en reell konstant. ▲

Exempel 11.20. Beräkna integralen

$$\int_0^\pi x^2 \sin(2x)\,dx.$$

Lösning: Vi använder oss av partiell integration i två etapper. Vi får att

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi x^2 \sin(2x)\,dx &= \left[x^2\left(-\frac{\cos(2x)}{2}\right)\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2x\left(-\frac{\cos(2x)}{2}\right)\,dx \\
&= -\frac{\pi^2}{2} + \int_0^\pi x\cos(2x)\,dx \\
&= -\frac{\pi^2}{2} + \left[x\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin(2x)}{2}\,dx \\
&= -\frac{\pi^2}{2} - \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin(2x)\,dx \\
&= -\frac{\pi^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{\cos(2x)}{2}\right]_0^\pi = -\frac{\pi^2}{2}.
\end{aligned}$$

▲

Övning 11.2. Beräkna integralen

$$\int_0^1 2x^2 e^x\,dx.$$

11.10 Variabelbyte

Sats 11.21. *Låt g och g' vara kontinuerliga i $[a,b]$ och låt f vara kontinuerlig mellan $g(a)$ och $g(b)$. Då gäller att*

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx.$$

Bevis: Detta resultat är en integrerad version av kedjeregeln för derivator. Från kedjeregeln har vi att

$$\frac{d}{dx}(F(g(x))) = f(g(x))g'(x).$$

Integration av båda leden ger

$$\int_a^b \frac{d}{dx}(F(g(x)))\,dx = \int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx.$$

Vänsterledet kan omformas enligt

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{d}{dx}(F(g(x)))\,dx &= \big[F(g(x))\big]_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) \\
&= \big[F(x)\big]_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Vilket visar satsen. ■

Exempel 11.22 (Tentamen 2011-10-18, 55%)**.** Lös integralen

$$\int_2^5 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx.$$

Lösning: Vi beräknar integralen med hjälp av variabelbyte:

$$\begin{aligned}\int_2^5 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx &= \left\{\begin{array}{c} t=\sqrt{x-1} \\ x=t^2+1 \\ dt = dx/(2\sqrt{x-1}) \end{array}\right\} = \int_1^2 \frac{2}{t^2+1}dt \\ &= [2\arctan t]_1^2 = 2(\arctan 2 - \arctan 1) \\ &= 2\arctan 2 - \frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

▲

11.11 Integration av rationella funktioner

Låt f vara en rationell funktion, d.v.s.

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

där p och q är polynom. Vi ska visa en strategi för att beräkna integraler av denna typ av funktioner. Denna strategi består av stegen

a) utför polynomdivision,

b) faktorisera nämnaren,

c) partialbråksuppdela,

d) integrera termvis.

Arcustangenstermen

Exempel 11.23. Bestäm alla primitiva funktioner till funktionen

$$\frac{7}{5+20x^2}.$$

Lösning: Vi får att

$$\begin{aligned}\int \frac{7}{5+20x^2}\,dx &= 7\int \frac{1}{5(1+4x^2)}\,dx = \frac{7}{5}\int \frac{1}{1+(2x)^2}\,dx = \left\{\begin{array}{c} t=2x \\ dt = 2dx \end{array}\right\} \\ &= \frac{7}{5}\int \frac{1}{2(1+t^2)}dt = \frac{7}{10}\arctan t + C = \frac{7}{10}\arctan(2x) + C,\end{aligned}$$

där C är en godtycklig reell konstant. ▲

Lite mer generellt har vi för reella $a, b \neq 0$ och $c \neq 0$ identiteten

$$\int \frac{a}{b^2 + c^2x^2}\, dx = \frac{a}{bc} \arctan\left(\frac{cx}{b}\right) + C. \tag{11.16}$$

En identisk lösning av föregående exempel följer

$$\begin{aligned}
\int \frac{a}{b^2 + c^2x^2}\, dx &= a \int \frac{1}{b^2\left(1 + \frac{c^2x^2}{b^2}\right)}\, dx = \frac{a}{b^2} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{cx}{b}\right)^2}\, dx \\
&= \left\{ \begin{array}{c} t = \frac{cx}{b} \\ dt = \frac{c}{b} dx \end{array} \right\} = \frac{a}{b^2} \int \frac{1}{1+t^2} \frac{b}{c}\, dt \\
&= \frac{a}{bc} \int \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{a}{bc} \arctan t + C \\
&= \frac{a}{bc} \arctan\left(\frac{cx}{b}\right) + C,
\end{aligned}$$

där C är en godtycklig reell konstant.

Exempel 11.24. Bestäm alla primitiva funktioner till

$$\frac{1}{x^2 + 4x + 5}.$$

LÖSNING: Då nämnaren inte kan faktoriseras i reella polynom, så använder vi oss av kvadratkomplettering. Notera att

$$x^2 + 4x = (x+2)^2 - 4,$$

vilket ger att

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2 + 4x + 5}\, dx &= \int \frac{1}{(x+2)^2 + 1}\, dx = \left\{ \begin{array}{c} t = x + 2 \\ dt = dx \end{array} \right\} \\
&= \int \frac{1}{1+t^2}\, dt = \arctan t + C = \arctan(x+2) + C
\end{aligned}$$

▲

Även detta fall kan beskrivas med generella konstanter. Låt a och $b > 0$ vara godtyckliga reella konstanter sådana att $b - a^2 > 0$. Med hjälp av kvadratkomplettering får vi

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2 + 2ax + b}\, dx &= \int \frac{1}{(x+a)^2 + b - a^2}\, dx = \left\{ \begin{array}{c} t = x + a \\ dt = dx \end{array} \right\} \\
&= \int \frac{1}{b - a^2 + t^2}\, dt.
\end{aligned}$$

Nu kan vi använda (11.16) och får

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{b - a^2 + t^2}\, dt &= \frac{1}{\sqrt{b - a^2}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{b-a^2}}\right) + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{b - a^2}} \arctan\left(\frac{x+a}{\sqrt{b-a^2}}\right) + C
\end{aligned}$$

Alltså gäller att

$$\int \frac{1}{x^2+2ax+b}\,dx = \frac{1}{\sqrt{b-a^2}}\arctan\left(\frac{x+a}{\sqrt{b-a^2}}\right)+C \tag{11.17}$$

Logaritmtermen

Exempel 11.25. Bestäm alla primitiva funktioner till funktionen

$$\frac{4x-3}{x^2+3x+3}.$$

Lösning: Låt oss ordna så att derivatan av nämnaren, nämligen $2x+3$, återfinns i täljaren. Vi får att

$$\begin{aligned}\int \frac{4x-3}{x^2+3x+3}\,dx &= 2\int \frac{2x-\frac{3}{2}}{x^2+3x+3}\,dx = 2\int \frac{2x+3-\frac{9}{2}}{x^2+3x+3}\,dx\\ &= 2\left(\int \frac{2x+3}{x^2+3x+3}\,dx - \frac{9}{2}\int \frac{1}{x^2+3x+3}\,dx\right).\end{aligned}$$

Den första integralen löser vi genom variabelbytet $t = x^2+3x+3$. Vi får att $dt = (2x+3)dx$ och därmed är

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+3}\,dx = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C_1 = \ln(x^2+3x+3)+C_1,$$

där C_1 är en reell konstant.

Den andra integralen uppfyller villkoren för (11.17) och vi får

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+3x+3}\,dx &= \frac{1}{\sqrt{3-9/4}}\arctan\left(\frac{x+3/2}{\sqrt{3-9/4}}\right)+C_2\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+3}{\sqrt{3}}\right)+C_2\end{aligned}$$

där C_2 är en godtycklig reell konstant.

Sammantaget får vi

$$\begin{aligned}\int \frac{4x-3}{x^2+3x+3}\,dx &= 2\ln(x^2+3x+3) - \frac{9}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+3}{\sqrt{3}}\right)+C_3\\ &= 2\ln(x^2+3x+3) - 3\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+3}{\sqrt{3}}\right)+C_3,\end{aligned}$$

där C_3 är en godtycklig reell konstant. ▲

Allmänt gäller att för reella konstanter a, b, c och d sådana att $d-c^2>0$

$$\int \frac{2ax+b}{x^2+2cx+d}\,dx = a\ln(x^2+2cx+d) + \frac{b-2ac}{\sqrt{d-c^2}}\arctan\left(\frac{x+c}{\sqrt{d-c^2}}\right)+C, \tag{11.18}$$

där C är en godtycklig reell konstant. Vi använder oss av vårt tidigare exempel och (11.17)

$$\begin{aligned}
\int \frac{2ax+b}{x^2+2cx+d}\,dx &= a\left(\int \frac{2x+2c}{x^2+2cx+d}\,dx + \int \frac{\frac{b}{a}-2c}{x^2+2cx+d}\,dx\right)\\
&= a\ln(x^2+2cx+d) + (b-2ac)\int \frac{dx}{x^2+2cx+d}\\
&= a\ln(x^2+2cx+d) + \frac{b-2ac}{\sqrt{d-c^2}}\arctan\left(\frac{x+c}{\sqrt{d-c^2}}\right) + C,
\end{aligned}$$

där C är en godtycklig reell konstant.

Partialbråksuppdelning

Vi inleder med ett exempel som illustrerar vad vi vill åstadkomma.

Exempel 11.26. Antag att vi vill finna primitiv funktion till funktionen

$$\frac{4}{x(x+1)(x+2)}.$$

Eftersom vi klarar att finna primitiv funktion till

$$\frac{1}{x},\ \frac{1}{x+1} \quad \text{och} \quad \frac{1}{x+2},$$

så kan vi försöka skriva vår ursprungliga funktion som en kombination av dessa. Vi ansätter därför

$$\frac{4}{x(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}.$$

Högerledet kan skrivas om med hjälp av minsta gemensamma nämnare enligt

$$\begin{aligned}
\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} &= \frac{A(x+1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x+1)}{x(x+1)(x+2)}\\
&= \frac{Ax^2 + 3Ax + 2A + Bx^2 + 2Bx + Cx^2 + Cx}{x(x+1)(x+2)}\\
&= \frac{(A+B+C)x^2 + (3A+2B+C)x + 2A}{x(x+1)(x+2)}.
\end{aligned}$$

Alltså har vi identiteten

$$\frac{4}{x(x+1)(x+2)} = \frac{(A+B+C)x^2 + (3A+2B+C)x + 2A}{x(x+1)(x+2)}.$$

Det räcker nu att jämför koefficienterna för täljarnas polynom. Vi får att $A+B+C=0$, $3A+2B+C=0$ och $2A=4$. Alltså är $A=2$. Vi kan lösa ut resterande konstanter ur ekvationssystemet

$$\begin{cases} B + C = -2 \\ 2B + C = -6 \end{cases}$$

Lösningen $B = -4$ och $C = 2$ fås med lämplig metod. Vi har lyckats med omformuleringen och får att

$$\int \frac{4\,dx}{x(x+1)(x+2)} = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{4}{x+1} + \frac{2}{x+2} \right) dx$$
$$= 2\ln|x| - 4\ln|x+1| + 2\ln|x+2| + C,$$

där C är en godtycklig konstant. ▲

Tips vid partialbråksuppdelning

Om den faktoriserade nämnaren innehåller faktorer av typen

$$(x+a)^n,$$

för något $a \in \mathbb{R}$ och något heltal $n \geqslant 2$ så ansätt termerna

$$\frac{A_1}{x+a} + \frac{A_2}{(x+a)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x+a)^n}$$

och om den innehåller faktorer av typen

$$x^2 + ax + b$$

så ansätt termen

$$\frac{Ax+B}{x^2+ax+b}.$$

Exempel 11.27. Lös integralen

$$\int_0^{1/2} \frac{2\,dx}{(x^2+1)(x-1)^2}.$$

Lösning: Låt oss ansätt termerna

$$\frac{2}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2}.$$

Genom att skapa minsta gemensamma nämnare i högerledet får vi

$$\frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{(Ax+B)(x-1)^2 + C(x^2+1)(x-1) + D(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)^2}$$
$$= \frac{(A+C)x^3 + (-2A+B-C+D)x^2 + (A-2B+C)x + (B-C+D)}{(x^2+1)(x-1)^2}$$

Genom att jämföra koefficienter i täljarna får vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} A \quad + C = 0 \\ -2A + B - C + D = 0 \\ A - 2B + C = 0 \\ B - C + D = 2 \end{cases}$$

Lösningen är $A = 1$, $B = 0$, $C = -1$ och $D = 1$. Alltså har vi

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \frac{2\,dx}{(x^2+1)(x-1)^2} &= \int_0^{1/2} \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} \right]_0^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{5}{4} - \ln \frac{1}{2} + 2 - 1 \\ &= \frac{1}{2} \ln 5 + 1 \end{aligned}$$

▲

11.12 Taylors formel med integration

Vi börjar med ett alternativt bevis av sats Taylors formel som bygger på partialintegration.

Bevis av sats 9.1: Från insättningsformeln har vi att

$$\int_0^x f'(t)\,dt = f(x) - f(0).$$

Med hjälp av partiell integration kan vi få ut term efter term enligt

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt = f(0) + \int_0^x 1 \cdot f'(t)\,dt \\ &= f(0) + \big[(t-x)f'(t)\big]_0^x - \int_0^x (t-x)f''(t)\,dt \\ &= f(0) + f'(0)x - \left(\left[\frac{(t-x)^2}{2} f''(t) \right]_0^x - \int_0^x \frac{(t-x)^2}{2} f^{(3)}(t)\,dt \right) \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \int_0^x \frac{(t-x)^2}{2} f^{(3)}(t)\,dt \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \left[\frac{(t-x)^3}{3!} f^{(3)}(t) \right]_0^x - \int_0^x \frac{(t-x)^3}{3!} f^{(4)}(t)\,dt \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 - \int_0^x \frac{(t-x)^3}{3!} f^{(4)}(t)\,dt. \end{aligned}$$

Om vi fortsätter på samma sätt får vi

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + (-1)^{n-1} \int_0^x \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt.$$

Vi tillämpar nu den generaliserade medelvärdessatsen 11.12 för integraler med

$$g(t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \geqslant 0,$$

då $t \in (0, x)$. Vi får för något $\alpha \in (0, x)$ att

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + f^{(n)}(\alpha) \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} x^n. \end{aligned}$$

Vilket avslutar beviset. ■

Exempel 11.28. Antag att vi vill beräkna ett approximativt värde av

$$\int_0^3 \cos\sqrt{x}\,dx,$$

samt att uppskatta felet i vår beräkning.

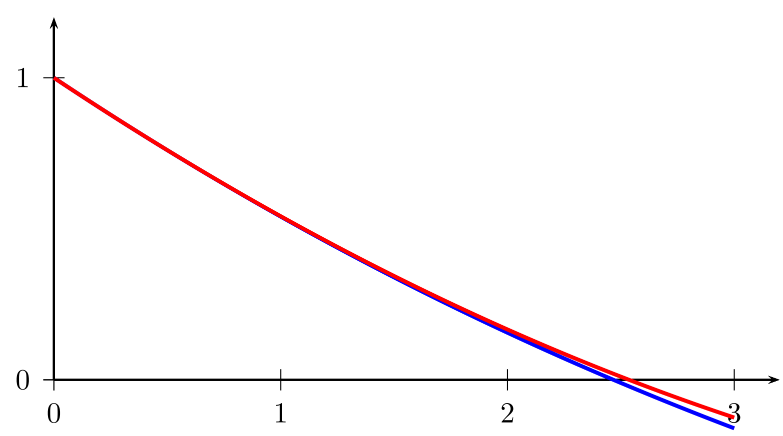
Lösning: Enligt Taylors formel är

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \cos(\alpha)\frac{t^6}{6!}$$

kring $t = 0$, där α är ett tal mellan 0 och t. Om vi substituerar $t = \sqrt{x}$ så får vi att

$$\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4!} - \cos(\alpha)\frac{x^3}{6!} \tag{11.19}$$

kring $x = 0$, där nu α är ett tal mellan 0 och $\sqrt{x}$. Låt oss skissa $\cos\sqrt{x}$ och $1 - x/2 + x^2/4!$



Det är enkelt att beräkna integralen av $1 - x/2 + x^2/4!$ över intervallet $[0, 3]$. Vi får det approximativa värdet

$$\int_0^3 \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4!}\right) dx = \left[x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{72}\right]_0^3 = 3 - \frac{9}{4} + \frac{81}{72} = \frac{135}{72}.$$

Felet i vår uträkning ges av integralen av differensen mellan $\cos\sqrt{x}$ och $1 - x/2 + x^2/4!$ på intervallet $[0, 3]$. Enligt (11.19) får vi att felet kan uppskattas enligt

$$\left|\int_0^3 \cos(\alpha)\frac{x^3}{6!}\,dx\right| \leqslant \int_0^3 \left|\cos(\alpha)\frac{x^3}{6!}\right| dx \leqslant \int_0^3 \frac{x^3}{720}\,dx = \left[\frac{x^4}{2880}\right]_0^3 = \frac{81}{2880}.$$

Alltså gäller att

$$\int_0^3 \cos\sqrt{x}\,dx = \frac{135}{72} \pm \frac{81}{2880}.$$

▲

11.13 Övningar

Övning 11.3. Låt f vara en oändligt deriverbar funktion sådan att $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 1$, $f^{(3)}(0) = 0$ och $f^{(4)}(0) = 0$. Dessutom är alla derivator till f uppåt begränsade av 4 och nedåt begränsade av -2 i intervallet $[0, 1]$. Visa att

$$\frac{419}{360} \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx \leqslant \frac{211}{180}.$$

Övning 11.4. Beräkna approximativt värdet av integralen

$$\int_0^{1/2} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Kan du göra det så att ditt approximativa värde har ett fel som är mindre än en tusendel? Finns det fler än ett sätt att lösa denna uppgift?

Övning 11.5. Approximera integralen

$$\int_1^2 \frac{dt}{t}$$

med hjälp av en Riemannsumma med

a) 2 termer,

b) 4 termer.

Förklara varför dina svar på a) och b) kan användas som approximationer av $\ln 2$.

Övning 11.6. Bestäm det positiva talet x så att integralen

$$\int_0^x (4t - t^2)\,dt$$

maximeras. Bestäm också integralens maximala värde.

12 Integration över obegränsade intervall

12.1 Definitionen och jämförelsesatser

Definition 12.1. Låt f vara en funktion som är integrerbar på $[a, R]$, för varje $R > a$. Då definieras integralen

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,dx.$$

Om detta gränsvärde existerar sägs integralen vara konvergent, i annat fall divergent.

Sats 12.2. *Integralen*

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$$

är konvergent om och endast om $p > 1$.

Bevis: Antag först att $p \neq 1$. Då gäller att

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{x^p}\,dx = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^R = \lim_{R\to\infty} \left(\frac{R^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right).$$

Detta gränsvärde är konvergent om och endast om $R^{1-p} \to 0$, då $R \to \infty$, vilket sker om och endast om $p > 1$.

I fallet att $p = 1$ har vi

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^R = \lim_{R\to\infty} \ln R = \infty.$$

Alltså är integralen konvergent om och endast om $p > 1$. ■

Sats 12.3. *Låt f och g vara integrerbara funktioner i $[a, R]$, för varje $R > a$, sådana att $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, för varje $x \geqslant a$. Då gäller att om $\int_a^\infty g(x)\,dx$ är konvergent så är även $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergent.*

Beviset är näst intill identiskt med sats 10.4 och lämnas därför som en övning till läsaren.

Följdsats 12.4. *Låt f och g vara integrerbara funktioner i $[a, R]$, för varje $R > a$, sådana att $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, för varje $x \geqslant a$. Då gäller att om $\int_a^\infty f(x)\,dx$ är divergent så är även $\int_a^\infty g(x)\,dx$ divergent.*

Bevis: Resultatet är en negation av sats 12.3. ■

Sats 12.5. *Låt f och g vara positiva och integrerbara funktioner i $[a, R]$, för varje $R > a$, sådana att*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K,$$

för något $K \neq 0$. Då gäller att

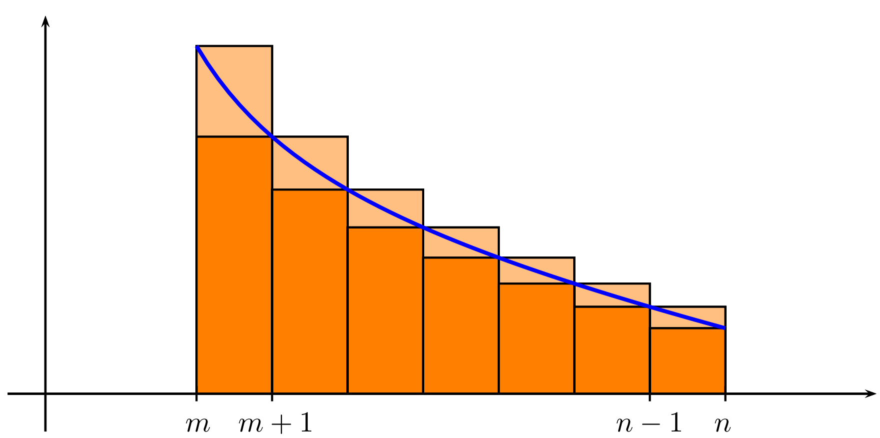
$$\int_a^\infty f(x)\,dx \text{ konvergerar om och endast om } \int_a^\infty g(x)\,dx \text{ konvergerar.}$$

Beviset är näst intill identiskt med sats 10.8 och lämnas därför som en övning till läsaren.

12.2 Samband mellan summor och integraler

Sats 12.6. *Låt f vara en avtagande funktion i intervallet $[m, n]$, där m och n är heltal sådana att $m < n$. Då gäller att*

$$\sum_{j=m+1}^{n} f(j) \leqslant \int_m^n f(x)\,dx \leqslant \sum_{j=m}^{n-1} f(j) \tag{12.1}$$



Figur 12.1: Summor och integraler

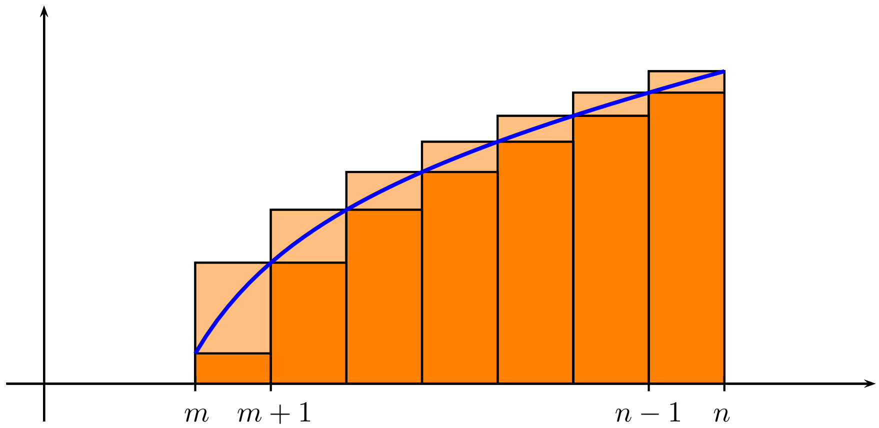
BEVIS: Beviset följer direkt från figure 12.1. Notera att vänsterledet och högerledet är en undersumma respektive översumma till integralen. ■

Versionen av 12.6 för växande funktioner blir

Sats 12.7. *Låt f vara en växande funktion i intervallet $[m, n]$, där m och n är heltal sådana att $m < n$. Då gäller att*

$$\sum_{j=m}^{n-1} f(j) \leqslant \int_m^n f(x)\,dx \leqslant \sum_{j=m+1}^{n} f(j) \tag{12.2}$$

Vi illustrerar satsen med en figur



Figur 12.2: Summor och integraler

Sats 12.8 (Cauchys integralkriterium)**.** *Låt f vara en positiv och avtagande funktion i (m, ∞), då gäller att $\sum_{j=m}^{\infty} f(j)$ är konvergent om och endast om $\int_m^{\infty} f(x)\,dx$ är konvergent.*

Bevis: Antag först att $\sum_{j=m}^{\infty} f(j)$ är konvergent med summan S. Vi vill visa att gränsvärdet

$$\lim_{R\to\infty} \int_m^R f(x)\,dx \tag{12.3}$$

är existerar. Att gränsvärdet existerar följer från sats 4.7 om vi lyckas visa att $R \mapsto \int_m^R f(x)\,dx$ är växande och uppåt begränsad. Då f är positiv så är det klart att $R \mapsto \int_m^R f(x)\,dx$ är växande. Låt n vara det minsta heltalet som uppfyller att $R < n$. Enligt sats 12.6 har vi att

$$\int_m^R f(x)\,dx \leqslant \int_m^n f(x)\,dx \leqslant \sum_{j=m}^{n-1} f(j) \to S,$$

då $R \to \infty$ och då även $n \to \infty$. Alltså existerar gränsvärdet (12.3).

Omvänt gäller att om $\int_m^{\infty} f(x)\,dx$ existerar så visar vi på liknande sätt att $\sum_{j=m}^{n} f(j)$ är växande, ty f är positiv, och uppåt begränsad från sats 12.6.

■

12.3 Övningar

Övning 12.1. Bevisa sats 12.3.

Övning 12.2. Bevisa sats 12.5.

Övning 12.3.

a) Konvergerar eller divergerar integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+1} dx?$$

b) Bestäm värdet av

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x}{x^2+1} dx.$$

c) Bestäm värdet av

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{2R} \frac{x}{x^2+1} dx.$$

d) Kan du av svaren från b) och c) besvara a)?

Övning 12.4.

a) Beräkna den generaliserade integralen $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$.

b) Visa att serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}}$ är konvergent. Uppskatta seriens summa med hjälp av uppgift a).

13 Lokal integrerbarhet

Bakgrunden är att vi vill integrera en funktion över ett intervall där det finns punkter där funktionen inte är definierad. Problemställningen är enkel: Går det? Och i så fall: Hur gör vi?

Definition 13.1. Låt f vara en integrerbar funktion i intervallet $[a+\varepsilon, b]$, för varje litet $\varepsilon > 0$ som ej är definierad i punkten a. Vi definierar

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

Om detta gränsvärde existerar sägs integralen vara konvergent, i annat fall divergent. Funktionen f sägs vara **integrerbar** i intervallet $(a, b]$.

Läsaren kan själv formulera definitionen i fallet att funktionen f inte skulle vara definierad i punkten b. Vi använder räkneregel (11.12) i fallet att f inte är definierad i en inre punkt av $[a, b]$.

Definition 13.2. Låt f vara en integrerbar funktion i intervallen $[a, c)$ och $(c, b]$ och odefinierad i punkten $c \in (a, b)$. Då definieras

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Om båda integralerna i högerledet är konvergenta så sägs integralen $\int_a^b f(x)\,dx$ vara konvergent, annars divergent.

Sats 13.3. *Integralen*

$$\int_0^1 \frac{1}{x^q}\,dx$$

är konvergent om och endast om $q < 1$.

Vi skulle kunna bevisa denna sats på ett liknande sätt som beviset av sats 12.2. Vi väljer här att överföra denna situation på resultatet av sats 12.2.

Bevis: Vi har att

$$\int_0^1 \frac{1}{x^q}\,dx = \left\{ \begin{array}{c} x = \frac{1}{t} \\ dx = -\frac{dt}{t^2} \end{array} \right\} = -\int_\infty^1 \frac{1}{(1/t)^q}\frac{1}{t^2}\,dt = \int_1^\infty \frac{1}{t^{2-q}}\,dt.$$

Vi vet från sats 12.2 har vi att integralen konvergerar om och endast om $2 - q > 1$, vilket är detsamma som $q < 1$. ■

Sats 13.4. *Låt f och g vara integrerbara funktioner i $[a+\varepsilon, b]$, för varje $\varepsilon > 0$, sådana att $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, för varje $x \in (a, b]$. Då gäller att om $\int_a^b g(x)\,dx$ är konvergent så är även $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergent.*

Beviset är näst intill identiskt med sats 10.4 och lämnas därför som en övning till läsaren.

Följdsats 13.5. *Låt f och g vara integrerbara funktioner i $[a+\varepsilon, b]$, för varje $\varepsilon > 0$, sådana att $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, för varje $x \in (a, b]$. Då gäller att om $\int_a^b f(x)\,dx$ är divergent så är även $\int_a^b g(x)\,dx$ divergent.*

Bevis: Resultatet är en negation av sats 12.3. ■

Sats 13.6. *Låt f och g vara positiva och integrerbara funktioner i $[a+\varepsilon, b]$, för varje $\varepsilon > 0$, sådana att*

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = K,$$

för något $K \neq 0$. Då gäller att

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \text{ konvergerar om och endast om } \int_a^\infty g(x)\,dx \text{ konvergerar.}$$

Beviset är näst intill identiskt med sats 10.8 och lämnas därför som en övning till läsaren.

Exempel 13.7 (Tentamen 2011-10-18, 31%)**.**

a) På vilket sätt är integralen

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{x^{1/3}} dx$$

generaliserad?

b) Avgör om integralen är konvergent eller divergent.

Lösning:

a) Integranden är funktionen $f(x) = \frac{\cos x}{x^{1/3}}$. Denna funktion är kontinuerlig på intervallet $(0, \infty)$, men $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$. Integralen är alltså generaliserad eftersom integranden är obegränsad på intervallet $(0, 1]$.

b) På intervallet $(0, 1]$ är $0 < \cos(x) \leqslant 1$ och $0 < x^{1/3}$, så vi har

$$0 < \frac{\cos x}{x^{1/3}} \leqslant \frac{1}{x^{1/3}} \quad \text{för alla } x \in (0, 1].$$

Den generaliserade integralen $\int_0^1 x^{-1/3} dx$ är konvergent (eftersom $1/3 < 1$; se sidan 315 i Persson-Böiers). Eftersom vi har ovanstående olikhet så följer det från jämförelsesats (Sats 11 på sidan 316 i Persson-Böiers) att den generaliserade integralen $\int_0^1 \cos(x) x^{-1/3} dx$ är konvergent.

▲

13.1 Övningar

Övning 13.1. Är följande integraler generaliserade? Ange i förekommande fall på vilket sätt de är generaliserade och avgör om de konvergerar. Beräkna slutligen integralerna.

a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{1-x}$

b) $\displaystyle\int_0^3 |2x-1|\,dx$

14 Integralens tillämpningar

14.1 Areaberäkning

Exempel 14.1. Beräkna arean som stängs in av en ellips, alltså arean av alla punkter (x, y) som uppfyller att

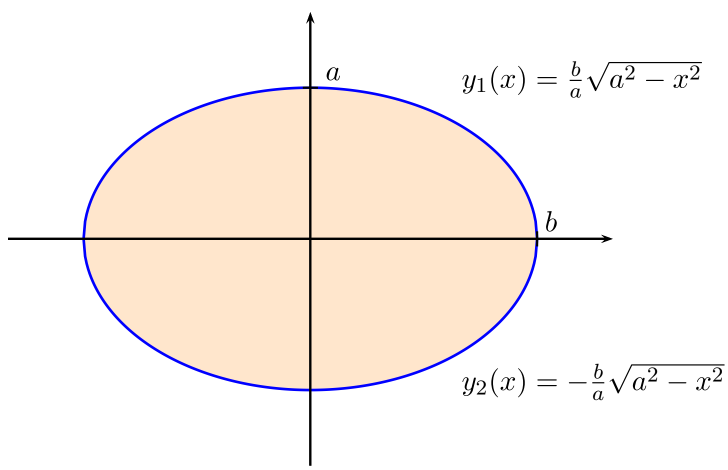
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1,$$

där a och b är positiva reella tal.

Lösning: Arean är den som bildas mellan funktionerna

$$y(x) = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

definierade för $x \in [-a, a]$.



Av symmetriskäl uppfyller arena A att

$$\begin{aligned} A &= \int_{-a}^{a} (y_1(x) - y_2(x))\,dx = 4\int_0^a y_1(x)\,dx = \frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \\ &= \left\{ \begin{array}{c} x = a\sin t \\ dx = a\cos t\,dt \end{array} \right\} = \frac{4b}{a}\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\,a\cos t\,dt \\ &= 4ab\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t}\cos t\,dt = 4ab\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt. \end{aligned}$$

Vi använder nu trigonometriska identiteten

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$$

och får att

$$
\begin{aligned}
4ab \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt &= 4ab \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2} \, dt \\
&= 4ab \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right]_0^{\pi/2} \\
&= ab\pi
\end{aligned}
$$

Här ser vi att cirkelskivans area, då $a = b = r$, blir πr^2. ▲

14.2 Volymberäkning

Exempel 14.2 (Klotets volym)**.** Låt oss beräkna volymen av ett klot. Som ni kanske redan misstänker så ska vi beräkna volymen genom att rotera en cirkel. En cirkel med radien r fås av de punkter x och y som uppfyller $x^2 + y^2 = r^2$. Ur detta uttryck kan vi lösa ut y enligt

$$
y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}
$$

För att göra det enkelt för oss noterar vi att om vi roterar grafen av en fjärdedels cirkel kring x-axeln så får vi ett halvt klot. Alltså blir hela klotets volym två gånger rotationsintegralen av y

$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_0^r y^2 \, dx = 2\pi \int_0^r \left(r^2 - x^2\right) dx = 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r = 2\pi \frac{2r^3}{3} \\
&= \frac{4\pi r^3}{3}
\end{aligned}
$$

Ett svar som vi väl känner igen från geometrin. ▲

14.3 Medelvärden

14.4 Övningar

Övning 14.1. Beräkna volymen av den rotationskropp, begränsad av $x = 0$ och $x = 1$, som uppkommer då vi roterar $f(x) = x^2$ kring x-axeln.

Övning 14.2. Genom att rotera funktionen $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}}$ får vi någonting som med lite vilja kan tänkas likna ett vattenglas. Antag att du vill mäta upp exakt 4 volymenheter av vatten i glaset. Hur högt upp i glaset skall du fylla?

Övning 14.3. Beräkna volymen av den rotationskropp, begränsad av $x = 0$ och $x = \pi/2$, som uppkommer då vi roterar $f(x) = \sqrt{\cos(x)}$ kring x-axeln.

Övning 14.4. Bestäm det begränsade område som innesluts av kurvorna $y = 4x^3 + 12x$ och $y = 16x^2$. Beräkna områdets area.

Övning 14.5. Beräkna volymen av den rotationskropp som genereras då området mellan kurvan $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, och x-axeln roteras ett varv runt x-axeln.

Övning 14.6. Beräkna volymen av den rotationskropp som genereras då området mellan kurvan $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, och x-axeln roteras ett varv runt y-axeln.

Övning 14.7.

a) Bestäm definitionsmängd för var och en av de två funktionerna $f(x) = \sqrt{x}\sqrt{-32 - x}$ och $g(x) = \sqrt{-x^2 - 32x}$.

b) Beräkna den area som dessa funktioner naturligen definierar, nämligen arean under grafen.

15 Differentialekvationer

15.1 Introduktion

15.2 Linjära ODE av första ordningen med konstanta koefficienter

Sats 15.1. *Låt $a \in \mathbb{R}$. En funktion y löser differentialekvationen*

$$y' + ay = 0$$

om och endast om

$$y(x) = Ce^{-ax},$$

där $C \in \mathbb{R}$.

Bevis: Låt oss först visa att $y(x) = Ce^{-ax}$ löser differentialekvationen. Vi har att

$$y'(x) + ay(x) = Ce^{-ax}(-a) + aCe^{-ax} = 0,$$

alltså löser $y(x) = Ce^{-ax}$ differentialekvationen.

Låt $y_1(x) = C_1e^{-ax}$, för någon konstant $C_1 \neq 0$. Antag att y är en lösning till differentialekvationen $y' + ay = 0$. Eftersom $y_1 \neq 0$ gäller att lösningen y kan skrivas på formen

$$y(x) = y_1(x)\frac{y(x)}{y_1(x)}.$$

Låt oss kalla $w(x) = y(x)/y_1(x)$. Eftersom y_1 är en lösning till differentialekvationen har vi att

$$\begin{aligned} y'(x) + ay(x) &= y_1'(x)w(x) + y_1(x)w'(x) + ay_1(x)w(x) \\ &= (y_1'(x) + ay_1(x))w(x) + y_1w'(x) \\ &= y_1(x)w'(x) = 0. \end{aligned}$$

Vilket ger att $w'(x) = 0$, alltså är $w(x) = C_2$, där $C_2 \in \mathbb{R}$ är en konstant. En godtycklig lösning y är därför alltid på formen

$$y(x) = y_1(x)w(x) = C_1e^{-ax}C_2 = Ce^{-ax}.$$

Vilket skulle bevisas. ■

15.3 ODE av andra ordningen med konstanta koefficienter

Definition 15.2. Låt $y'' + ay' + by = 0$ vara en differentialekvation, där a och b är reella tal. Polynomet

$$r \mapsto r^2 + ar + b,$$

kallas det **karakteristiska polynomet** till differentialekvationen och $r^2 + ar + b = 0$, kallas den **karakteristiska ekvationen** för differentialekvationen.

Sats 15.3. *Låt $a, b \in \mathbb{R}$ och låt r_1 och r_2 vara lösningarna till den karakteristiska ekvationen $r^2 + ar + b = 0$.*

En funktion y löser differentialekvationen

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{15.1}$$

om och endast om y uppfyller nedanstående

a) I fallet r_1 och r_2 är reella och $r_1 \neq r_2$, så är

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}, \tag{15.2}$$

b) I fallet $r_1 = r_2$, så är

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{r_1 x}, \tag{15.3}$$

c) I fallet $r_1 = c + d\mathrm{i}$ och $r_2 = c - d\mathrm{i}$, där $d \neq 0$, så är

$$y(x) = e^{cx}(C_1 \cos(dx) + C_2 \sin(dx)), \tag{15.4}$$

där $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$.

Hjälpsats 15.4. *Låt r_1 och r_2 vara rötterna till ekvationen $r^2 + ar + b = 0$. Då gäller att $r_1 + r_2 = -a$.*

Bevis: Enligt faktorsatsen är

$$r^2 + ar + b = (r - r_1)(r - r_2).$$

Utvecklar vi högerledet får vi $r^2 - (r_1 + r_2)r + r_1 r_2$. Identifierar vi koefficienter så får vi önskad identitet. ■

Bevis: Det är en direkt räkning för att verifiera att om y är på någon av formerna (15.2) – (15.4) så löser y differentialekvationen. Det svåra är att visa omvändningen, d.v.s. att det finns inga andra funktioner än dessa som löser differentialekvationen.

Antag att y är en lösning av (15.1). Eftersom en exponentialfunktion aldrig antar värdet noll så kan vi skriva y på formen

$$y(x) = y_1(x)w(x), \tag{15.5}$$

där $y_1(x) = e^{r_1 x}$. Problemet handlar nu om att ta reda på hur w ser ut. Eftersom $y_1'' + ay_1' + b = 0$ har vi att

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by &= y_1''w + 2y_1'w' + y_1w'' + a(y_1'w + y_1w') + by_1w \\ &= (y_1'' + ay_1' + by_1)w + 2y_1'w' + y_1w'' + ay_1w' \\ &= 2y_1'w' + y_1w'' + ay_1w' \\ &= (2r_1w' + w'' + aw')e^{r_1x} \\ &= (w'' + (a + 2r_1)w')e^{r_1x} \end{aligned}$$

Lösningen till differentialekvationen $(w')' + (a + 2r_1)(w') = 0$ är enligt sats 15.1 funktionen

$$w'(x) = C_1 e^{-(a+2r_1)x}$$

och från sats 15.4 får vi att $a + 2r_1 = r_1 - r_2$. Alltså är

$$w'(x) = C_1 e^{(r_2 - r_1)x}. \tag{15.6}$$

I fallet att $r_2 \neq r_1$ har vi

$$w(x) = \frac{C_1}{r_2 - r_1} e^{(r_2-r_1)x} + C_2 = C_3 e^{(r_2-r_1)x} + C_2,$$

där $C_3 = \frac{C_1}{r_2 - r_1}$. Instoppat i (15.5) ger

$$y(x) = e^{r_1 x}(C_3 e^{(r_2-r_1)x} + C_2) = C_3 e^{r_2 x} + C_2 e^{r_1 x},$$

vilket visar a) i fallet att r_1 och r_2 är reella. Om r_1 och r_2 är komplexa så är $r_1 = \overline{r_2}$, ty a och b är reella. Vi kan därför skriva att $r_1 = c + d\mathrm{i}$ och $r_2 = c - d\mathrm{i}$ och får att

$$\begin{aligned} y(x) &= C_3 e^{r_2 x} + C_2 e^{r_1 x} = C_3 e^{(c+d\mathrm{i})x} + C_2 e^{(c-d\mathrm{i})x} \\ &= e^{cx}(C_3 e^{\mathrm{i}dx} + c_2 e^{-\mathrm{i}dx}). \end{aligned}$$

Här utnyttjar vi att $e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ och $e^{-\mathrm{i}\theta} = \cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta$. Alltså är

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{cx}(C_3(\cos(dx) + \mathrm{i}\sin(dx)) + C_2(\cos(dx) - \mathrm{i}\sin(dx))) \\ &= e^{cx}((C_3 + C_2)\cos(dx) + (C_3 - C_2)\mathrm{i}\sin(dx)) \\ &= e^{cx}(C_4 \cos(dx) + C_5 \sin(dx)) \end{aligned}$$

där C_4 och C_5 är komplexa konstanter, vilket visar c).

I fallet att $r_1 = r_2$ så utgår vi från (15.6). Den säger i detta fall att $w'(x) = C_1$ och därmed är $w(x) = C_1 x + C_2$ och y blir därför

$$y(x) = e^{r_1 x}(C_1 x + C_2)$$

vilket visar b). ■

15.4 Partikulärlösningar

Exempel 15.5 (Tentamen 2011-10-18, 52%)**.** Betrakta differentialekvationen $y''(x) + 2y'(x) - y(x) = -2xe^{-x}$

a) Visa att $y(x) = xe^{-x}$ är en lösning till differentialekvationen.

b) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen.

c) Beräkna gränsvärdena

$$\lim_{x\to\infty} y(x) \qquad \text{och} \qquad \lim_{x\to-\infty} y(x)$$

i fallet då $y(x)$ löser differentialekvationen och $y(0) = 1$ och $y'(0) = -\sqrt{2}$.

LÖSNING:

a) Vi börjar med att derivera funktionen $u(x) = xe^{-x}$ och får

$$u'(x) = (1-x)\, e^{-x} \quad \text{och} \quad u''(x) = (x-2)\, e^{-x}.$$

Om vi nu sätter $y(x) = u(x)$ i differentialekvationens vänsterled så får vi

$$u''(x) + 2u'(x) - u(x) = e^{-x}\big((x-2) + 2(1-x) - x\big) = -2xe^{-x},$$

vilket är differentialekvationens högerled och alltså är $u(x)$ en lösning.

b) Det karakteristiska polynomet till den homogena ekvationen

$$y''(x) + 2y'(x) - y(x) = 0$$

är lika med

$$\lambda^2 + 2\lambda - 1 = (\lambda + 1 - \sqrt{2})(\lambda + 1 + \sqrt{2}).$$

Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen ges därmed av

$$Ce^{(-1+\sqrt{2})x} + De^{(-1-\sqrt{2})x}$$

där C och D är godtyckliga konstanter. I föregående uppgift såg vi att $u(x) = xe^{-x}$ var en lösning till $y''(x) + 2y'(x) - y(x) = -2xe^{-x}$ så den allmänna lösningen till denna ekvation får vi genom att lägga till den homogena ekvationens lösningar:

$$xe^{-x} + Ce^{(-1+\sqrt{2})x} + De^{(-1-\sqrt{2})x}.$$

c) Om differentialekvationen ska uppfylla $y(0) = 1$ och $y'(0) = -\sqrt{2}$ så får vi från uttrycket för den allmänna lösningen i föregående uppgift att

$$1 = 0 \cdot e^{-0} + Ce^{(-1+\sqrt{2})\cdot 0} + De^{(-1-\sqrt{2})\cdot 0} = C + D$$

och (genom att derivera)

$$\begin{aligned} -\sqrt{2} = (1-0)\, e^{-0} + C(-1+\sqrt{2})e^{(-1+\sqrt{2})\cdot 0} + D(-1-\sqrt{2})e^{(-1-\sqrt{2})\cdot 0} = \\ = 1 - (C+D) + \sqrt{2}(C-D) = \sqrt{2}(C-D). \end{aligned}$$

Alltså är $C + D = 1$ och $C - D = -1$ vilket ger att $C = 0$ och $D = 1$. Så lösningen är i detta fall lika med $xe^{-x} + e^{(-1-\sqrt{2})x}$. Om $x \to \infty$ så ser vi att $e^{(-1-\sqrt{2})x} \to 0$ (eftersom $-1 - \sqrt{2} < 0$) och $xe^{-x} \to 0$ (standardgränsvärde), och alltså är

$$\lim_{x\to\infty}(xe^{-x} + e^{(-1-\sqrt{2})x}) = 0.$$

Därefter har vi att

$$\lim_{x\to-\infty}(xe^{-x} + e^{(-1-\sqrt{2})x}) = \lim_{x\to-\infty} e^{(-1-\sqrt{2})x}(xe^{\sqrt{2}x} + 1) = \infty,$$

på grund av att

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{\sqrt{2}x} = \left\{t = -\sqrt{2}x\right\} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot \lim_{t\to\infty} te^{-t} = 0$$

och $\lim_{x\to-\infty} e^{(-1-\sqrt{2})x} = \infty$.

▲

15.5 Övningar

Övning 15.1. För vilka värden på konstanten $\lambda > 0$ har randvärdesproblemet

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda^2 y(x) = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

icke-triviala lösningar, d.v.s. lösningar som inte är identiskt noll?

Övning 15.2. I X-stad bor idag 10 000 människor. Man räknar med att stadens befolkning varje år ökar med 0.1 procent, till följd av att det är fler personer som föds än som dör. Dessutom har staden en nettoinflyttning på 100 personer varje år, dvs det är 100 fler som flyttar in till staden än det är som flyttar därifrån. Gör en matematisk modell i form av en differentialekvation som beskriver befolkningsutvecklingen i staden. Vilket begynnelsevillkor bör uppfyllas? När är stadens befolkning 11 000? Hur realistisk är modellen på lång sikt?

Övning 15.3. Efter en gasolycka börjar det sippra in förorenad luft i en lokal vars volym är 2000 kubikmeter. Den förorenade luften har en koncentration av 10 procent av det giftiga ämnet och sipprar in i en takt av 0.1 kubikmeter per minut. Samtidigt sugs lika mycket av (den väl blandade) luften i lokalen ut. När är koncentrationen av det giftiga ämnet i lokalen uppe i 1 procent?